

一类具有交错扩散和捕获项的捕食-食饵模型的稳态解*

罗丽琴, 李海侠, 吴绍艳

宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 陕西 宝鸡 721013

摘要: 研究了一类具有 Crowley-Martin 反应函数和捕获项的捕食-食饵交错扩散模型. 首先, 利用线性算子的稳定性理论给出了常数稳态解的稳定条件以及交错扩散驱动的 Turing 不稳定条件. 其次, 运用能量估计法和 Leray-Schauder 度理论分别讨论了非常数正稳态解的不存在性和存在性. 最后, 通过数值模拟对理论结果进行了验证和补充. 研究表明交错扩散对正常数稳态解的稳定性和非常数正稳态解的存在性具有非常重要的影响, 会引起模型非均匀空间模式的形成, 而且采取合理的捕捞策略能确保种群的可持续发展.

关键词: 捕食-食饵交错扩散模型; Crowley-Martin 反应函数; 捕获项; Turing 不稳定; 存在性

中图分类号: O175.26 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2025)04-0134-13

Steady-state solutions of a predator-prey model with cross-diffusion and harvesting

LUO Liqin, LI Haixia, WU Shaoyan

School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China

Abstract: A cross-diffusion predator-prey model with Crowley-Martin functional response and harvesting are studied. Firstly, the stable conditions of constant steady-state solutions and the conditions for cross-diffusion-driven Turing instability are obtained by the stability theory of linear operators. Moreover, the nonexistence and existence of non-constant positive steady-state solutions are discussed by using the energy estimation method and Leray-Schauder degree theory. Finally, the theoretical results are varified and supplemented by some numerical simulations. The results indicate that cross-diffusion has very important effects on the stability of constant positive steady-state solution and the existence of non-constant postive steady-state solutions, which can cause the formation of spatial patterns, and reasonable harvesting strategies can ensure the sustainable development of the populations.

Key words: cross-diffusion prepator-prey model; Crowley-Martin functional response; harvesting; Turing instability; existence

捕食-食饵模型是种群理论研究的一个重要领域, 通过对捕食者和食饵种群之间相互作用关系的研究可以更好地预测生态系统的动态变化. 自然界中捕食者和食饵种群之间的相互干扰、疾病和物种自身防御

* 收稿日期: 2024-04-23 录用日期: 2025-01-15 网络首发日期: 2025-04-27

基金项目: 国家自然科学基金(12271431, 12061081); 陕西省科技厅工业公关项目(2022GY-071)

作者简介: 罗丽琴(1999年生), 女; 研究方向: 偏微分方程应用及其可视化;

E-mail: luoliqin@stu.bjwlxy.edu.cn

通信作者: 李海侠(1977年生), 女; 研究方向: 偏微分方程应用及其可视化;

E-mail: lihaixia@bjwlxy.edu.cn

全文阅读



ZR20240130

策略等因素会导致种群不同程度的迁移扩散现象, 这种现象对研究捕食者和食饵种群的生长规律具有重要意义. 在生态系统中, 捕食者和食饵除了自身内部从高密度区域向低密度区域迁移的自扩散现象以外, 还存在食饵为了生存躲避捕食者的侵略向捕食者低密度区域迁移, 以及食饵聚集成巨大的群体共同抵御捕食者导致捕食者向食饵低密度区域迁移等种群间的交错扩散现象. 近些年, 具有交错扩散的捕食-食饵模型成为国内外学者的研究热点(Wen, 2013; Bie et al., 2014; Ling et al., 2014; Zhao et al., 2017; Li et al., 2020; Zhu et al., 2022; 杨铜洁等, 2023), 许多学者讨论了交错扩散对捕食-食饵模型的影响, 如 Li et al. (2022) 研究了具有 Holling-II 反应函数的捕食-食饵交错扩散模型, 讨论了交错扩散对模型空间模式形成的影响; 杨铜洁等 (2023) 研究了具有交错扩散的捕食-食饵模型正常数稳态解的稳定性和 Turing 不稳定性. 另一方面, 随着社会的快速发展, 人们越来越重视生态环境以及生物种群的保护和可持续发展(Guo et al., 2024), 而人类的捕获行为对保护生物多样性和资源的合理利用方面具有重要意义. 目前众多学者对具有捕获项的捕食-食饵模型进行了大量研究, 并取得了许多有意义的成果(Li et al., 2017; Mortuja et al., 2021; Singh et al., 2021; 李海侠, 2023), 如 Mortuja et al. (2021) 研究了一类具有食饵捕获项的捕食-食饵模型, 得到了当捕获率小于最大可持续产量时, 两种群可以共存并保持平衡; Singh et al. (2021) 讨论了一类具有捕获项的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵模型, 分析了周期解的存在性和产生分歧的条件. 然而目前研究具有捕获项的捕食-食饵交错扩散模型的文献相对较少.

基于以上分析, 本文考虑如下具有 Crowley-Martin 反应函数和捕获项的捕食-食饵交错扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + d_{12} \Delta(uv) + ru \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{muw}{1+au} - p_1 Eu, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + d_{21} \Delta(uv) + v \left(\frac{mnu}{(1+au)(1+bv)} - s - p_2 E\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, \mathbf{n} 是边界上的单位外法向量. u, v 分别表示食饵和捕食者的浓度, r, k 分别表示食饵的内禀增长率和环境最大容纳量, s 代表捕食者的死亡率, a, b 分别代表捕食者对食饵的处理时间和捕食者之间的干扰强度, m, n 代表捕食者的捕获速率和捕食者转化为生物量的速率, p_1, p_2 代表食饵和捕食者的捕获系数, E 代表人类的捕获能力, $d_1 > 0, d_2 > 0$ 代表自扩散系数, $d_{12} > 0, d_{21} > 0$ 分别代表 u, v 的交错扩散系数, d_{12} 表示食饵种群向捕食者种群密度较低的方向移动, d_{21} 表示捕食者种群向食饵种群密度较低的方向移动. 模型(1)中 $\frac{uw}{(1+au)(1+bv)}$ 是 Crowley-Martin (C-M) 反应函数, 关于 C-M 反应函数的详细介绍可见文献(Li, 2014; 李海侠, 2017, 2023; Li et al., 2018; Tiwari et al., 2019; Lu, 2022).

模型(1)中不考虑扩散和捕获项时, Baek et al. (2014) 考虑了类似模型(1)具有 Beddington-DeAngelis 反应函数的捕食-食饵模型正解的稳定性和持久性, Alebraheem (2023) 研究了该捕食-食饵模型非负解的稳定性和正解的有界性; 当 $p_1 = p_2 = 0, b = 0$ 时, Bie et al. (2014) 研究了交错扩散对模型正稳态解稳定性的影响, 发现交错扩散会引起 Turing 失稳. 本文在 Alebraheem (2023) 的基础上讨论交错扩散和捕获项对模型(1)正常数稳态解的稳定性以及非常数正稳态解不存在性和存在性的影响. 通过比较发现具有交错扩散和捕获项的生物模型能更加合理地解释一些生物现象, 更贴合实际. 而且, 交错扩散的引入和 C-M 反应函数的复杂性, 使得正常数稳态解的稳定性和非常数正稳态解的存在性的研究变得更加困难.

为了方便讨论, 对模型(1)进行无量纲化: 令 $\bar{u} = \frac{u}{k}, \bar{t} = rt, \bar{m} = \frac{m}{r}, \bar{a} = ak, \bar{s} = \frac{s}{r}, h = \frac{mnk}{r}, q_1 = \frac{p_1 E}{r}, q_2 = \frac{p_2 E}{r}, \bar{d}_1 = \frac{d_1}{r}, \bar{d}_2 = \frac{d_2}{r}, \bar{d}_{12} = \frac{d_{12}}{r}, \bar{d}_{21} = \frac{d_{21}k}{r}$, 并将它们仍记作 $u, t, m, a, s, d_1, d_2, d_{12}, d_{21}$, 则模型(1)简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + d_{12} \Delta(uv) + u(1-u) - \frac{muv}{1+au} - q_1 u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + d_{21} \Delta(uv) + v \left(\frac{hu}{(1+au)(1+bv)} - s - q_2 \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

本文主要讨论模型(2)正常数稳态解的稳定性、Turing 不稳定性以及非常数正稳态解的不存在性和存在性.

1 Turing 不稳定

本节主要研究模型(2)中交错扩散对正常数稳态解的稳定性的影响. 首先给出以下引理.

引理 1 (裘光明, 2002) (笛卡尔符号规律) 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 为实系数多项式, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 为已知常数, 则方程 $f(x) = 0$ 的正根的个数等于其系数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 的变号数减去一个非负偶数.

其次研究模型(2)常数稳态解的存在性和稳定性. 易得到模型(2)有如下非负常数稳态解:

- (i) 平凡解 $W_0 = (0, 0)$;
- (ii) 若 $q_1 < 1$, 则有半平凡解 $W_1 = (1 - q_1, 0)$;
- (iii) 设 $W_2 = (u_*, v_*)$ 为模型(2)的正常数稳态解, 则 W_2 满足

$$\begin{cases} 1 - u_* - \frac{mv_*}{1+au_*} - q_1 = 0, \\ \frac{hu_*}{(1+au_*)(1+bv_*)} - s - q_2 = 0. \end{cases}$$

得到

$$A(u_*)^3 + B(u_*)^2 + C(u_*) + D = 0, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= a^2 b(s + q_2), & B &= (s + q_2)ab(2 + q_1 a - a), \\ C &= (s + q_2)(b - 2ab - am + 2q_1 ab) + mh, & D &= (s + q_2)(-b - m + q_1 b). \end{aligned}$$

若 $1 - \frac{2}{a} < q_1 < 1$, $h > a(s + q_2)$, 则有 $A > 0, B > 0, C > 0, D < 0$. 根据引理 1 可知方程(3)存在唯一正常根

u_* . 进而若 $u_* < 1 - q_1$, 则模型(2)存在唯一正常数稳态解 $W_2 = (u_*, v_*)$, 其中 $v_* = \frac{(1 - u_* - q_1)(1 + au_*)}{m}$.

当模型(2)中没有扩散时, 根据类似于 Alebraheem(2023)的方法可知以下结论成立.

定理 1 (i) 若 $q_1 > 1$, 则 W_0 稳定; 若 $q_1 < 1$, 则 W_0 不稳定.

(ii) 设 $q_1 < 1$. 若 $q_2 > \frac{h(1 - q_1)}{1 + a(1 - q_1)} - s$, 则 W_1 稳定; 若 $q_2 < \frac{h(1 - q_1)}{1 + a(1 - q_1)} - s$, 则 W_1 不稳定.

(iii) 设 $1 - \frac{2}{a} < q_1 < 1$, $h > a(s + q_2)$, $u_* < 1 - q_1$. 若 $mav_* < (1 + au_*)^2$, 则 W_2 局部渐近稳定.

接下来考虑模型(2)对应的自扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(1-u) - \frac{muv}{1+au} - q_1 u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v \left(\frac{hu}{(1+au)(1+bv)} - s - q_2 \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

正常数稳态解的稳定性.

令 $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_i < \dots$ 是齐次 Neumann 边界条件下 $-\Delta$ 在 Ω 上的特征值. 定义 $X_{ij} \triangleq \{c\phi_{ij} \mid c \in \mathbb{R}^2\}$, $X \triangleq \left\{ w \in [C^1(\overline{\Omega})]^2 \mid \frac{\partial w}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega \right\}$, 其中 $\{\phi_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, \dim E(\mu_i)\}$ 是 $E(\mu_i)$ 的标准正交基, 且有

$$X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i, \quad X_i = \bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)} X_{ij}.$$

定理 2 设 $1 - \frac{2}{a} < q_1 < 1, h > a(s + q_2), u_* < 1 - q_1$. 若 $mav_* < (1 + au_*)^2$, 则模型(4)的正常数稳态解 W_2 局部渐近稳定.

证明 模型(4)在 $W_2 = (u_*, v_*)$ 处的线性化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Jw + D_0 \Delta w,$$

其中

$$w = (u, v)^T, \quad D_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

且

$$a_{11} = 1 - 2u_* - \frac{mv_*}{(1 + au_*)^2} - q_1 = u_* \left(\frac{mav_*}{(1 + au_*)^2} - 1 \right), \quad a_{12} = -\frac{mu_*}{1 + au_*},$$

$$a_{21} = \frac{hv_*}{(1 + au_*)^2(1 + bv_*)}, \quad a_{22} = \frac{hu_*}{(1 + au_*)(1 + bv_*)^2} - s - q_2 = \frac{hu_*}{(1 + au_*)(1 + bv_*)} \left(\frac{1}{1 + bv_*} - 1 \right).$$

显然 λ 是算子 $J + D_0 \Delta$ 在 X_i 中的特征值当且仅当 λ 是矩阵 $-\mu_i D_0 + J$ 的特征值, 则 $-\mu_i D_0 + J$ 的特征多项式为

$$p_i(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}\{M_i\}\lambda + \det\{M_i\},$$

其中

$$M_i = -\mu_i D_0 + J, \quad \text{tr}\{M_i\} = \text{tr}\{J\} - (d_1 + d_2)\mu_i, \quad \text{tr}\{J\} = a_{11} + a_{22},$$

$$\det\{M_i\} = \det\{D_0\}\mu_i^2 - (a_{11}d_2 + a_{22}d_1)\mu_i + \det\{J\}, \quad \det\{D_0\} = d_1d_2, \quad \det\{J\} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

若 $mav_* < (1 + au_*)^2$, 则 $a_{11} < 0$, 故 $\text{tr}\{M_i\} < 0, \det\{M_i\} > 0$, 此时 W_2 局部渐近稳定.

最后研究模型(2)的 Turing 不稳定性.

定理 3 设 $1 - \frac{2}{a} < q_1 < 1, h > a(s + q_2), u_* < 1 - q_1, mav_* < (1 + au_*)^2$. 若 $a_{11}u_* - a_{12}v_* > 0, d_{21} > d_{21}^*$, 则模型(2)的正常数稳态解 W_2 不稳定, 即模型(2)产生 Turing 不稳定.

证明 模型(2)在 W_2 处的线性化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Jw + D_1 \Delta w, \tag{5}$$

其中

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1 + d_{12}v_* & d_{12}u_* \\ d_{21}v_* & d_2 + d_{21}u_* \end{pmatrix}.$$

令

$$w = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} c_{mn} e^{\lambda t} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right), \quad k^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \equiv k_x^2 + k_y^2, \tag{6}$$

其中 c_{mn} 是初始条件的傅里叶系数, k_x 和 k_y 分别代表水平和垂直方向上的波数, m, n 是任意非负整数, λ 代表生长常数. 现将式(6)代入式(5)中, 易得模型(2)在 W_2 处的特征方程为

$$\lambda^2 - T(k^2)\lambda + S(k^2) = 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
 T(k^2) &= \text{tr} \{-k^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{J}\} = \text{tr} \{\mathbf{J}\} - (d_1 + d_{12}v_* + d_2 + d_{21}u_*)k^2, \\
 S(k^2) &= \det \{-k^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{J}\} = A'k^4 - B'k^2 + C', \quad A' = \det \{\mathbf{D}_1\} = d_1d_2 + d_1d_{21}u_* + d_2d_{12}v_*, \\
 B' &= d_1a_{22} + d_2a_{11} + d_{12}a_{22}v_* - d_{12}a_{21}u_* + d_{21}a_{11}u_* - d_{21}a_{12}v_*, \quad C' = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
 \end{aligned}$$

当 $ma_{11}v_* < (1 + au_*)^2$ 时, 可知 $T(k^2) < 0, A' > 0, C' > 0$. 若 $S(k^2) < 0$, 则此时模型(2)发生 Turing 不稳定. 因此 W_2 稳定性的临界条件是

$$\min_{k^2 > 0} S(k^2) = S(k_0^2) = 0, \tag{7}$$

其中 $k_0^2 = B'/(2A')$. 因为 $k_0^2 > 0$, 所以 B' 需要满足 $B' > 0$ 即 $d_1a_{22} + d_2a_{11} + d_{12}a_{22}v_* - d_{12}a_{21}u_* + d_{21}a_{11}u_* - d_{21}a_{12}v_* > 0$. 将交错扩散系数 d_{21} 作为临界参数. 令 $B' = \xi d_{21} - \sigma$, 其中 ξ, σ 为正常数且 $\xi = a_{11}u_* - a_{12}v_* > 0, \sigma = -(d_1a_{22} + a_{22}d_{12}v_* + a_{11}d_2 - d_{12}a_{21}u_*) > 0$. 令 $d_{21} = l + \sigma/\xi, l = B'/\xi$, 将 d_{21} 代入式(7), 得

$$\frac{l^2 \xi^2}{4 \det \{\mathbf{J}(u_*, v_*)\}} - d_1u_*l - d_1d_2 - d_1u_*\frac{\sigma}{\xi} - d_1d_{12}v_* = 0.$$

计算得到上述方程有唯一正根 l^* . 令 $d_{21}^* = l^* + \sigma/\xi$, 则当 $d_{21} > d_{21}^*$ 时有 $B' > 0, \min S(k^2) < 0$. 这表明 $d_{21} > d_{21}^*$ 时, W_2 不稳定, 此时模型(2)产生 Turing 不稳定.

注1 定理2表明自扩散不会引起模型(2)的 Turing 不稳定, 但从定理3发现交错扩散可以使模型(2)产生 Turing 不稳定. 同时可以知道当 $d_{21} = 0$ 时, $B' > 0$ 永远无法满足, 此时模型(2)不会产生 Turing 不稳定. 若 $a_{11}u_* - a_{12}v_* > 0$, 则当 d_{21} 足够大时, 可以满足 $B' > 0, S(k^2) < 0$, 此时模型(2)会产生 Turing 不稳定.

2 非常数正稳态解的不存在性和存在性

2.1 先验估计

本小节利用最大值原理和 Harnack 不等式给出模型(2)对应的稳态模型

$$\begin{cases}
 d_1 \Delta u + d_{12} \Delta(uv) + u(1 - u) - \frac{muw}{1 + au} - q_1 u = 0, & x \in \Omega, \\
 d_2 \Delta v + d_{21} \Delta(uv) + v \left(\frac{hu}{(1 + au)(1 + bv)} - s - q_2 \right) = 0, & x \in \Omega, \\
 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega
 \end{cases} \tag{8}$$

正解的上下界. 首先给出如下引理:

引理2(Lou et al., 1996)(最大值原理) 设 $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$.

(i) 若 $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足 $\Delta w(x) + g(x, w(x)) \geq 0, x \in \Omega; \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \leq 0, x \in \partial \Omega$; 且 $w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$, 则 $g(x_0, w_0) \geq 0$.

(ii) 若 $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足 $\Delta w(x) + g(x, w(x)) \leq 0, x \in \Omega; \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \geq 0, x \in \partial \Omega$; 且 $w(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} w$, 则 $g(x_0, w_0) \leq 0$.

引理3(Lin et al., 1988)(Harnack 不等式) 设 $c(x) \in C(\overline{\Omega})$. 令 $w(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 为

$$\Delta w(x) + c(x)w(x) = 0, x \in \Omega; \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial \Omega$$

的正解, 则存在一正常数 $C_* = C_*(\|c(x)\|_{\infty}, \Omega)$, 使得 $\max_{\overline{\Omega}} w \leq C_* \min_{\overline{\Omega}} w$.

为了方便讨论, 下面令 $\Lambda = \Lambda\{m, n, a, b, h, q_1, q_2, d_1, d_2, d_{12}, d_{21}\}$.

定理4(上界) 设 $q_1 < 1$. 若存在正常数 D 使得 $\frac{d_{12}}{d_1}, \frac{d_{21}}{d_2} \leq D$, 则存在正常数 $C_i = C_i(D, \Lambda) (i = 1, 2)$,

使得模型(8)的所有正解 (u, v) 满足

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq C_1, \quad \max_{\bar{\Omega}} v \leq C_2.$$

证明 令 $\phi_1 = d_1 u + d_{12} uv$, $\phi_2 = d_2 v + d_{21} uv$, 则模型(8)可写成

$$\begin{cases} -\Delta \phi_1 = \frac{1 - u - \frac{mv}{1 + au} - q_1}{d_1 + d_{12}v} \phi_1, & x \in \Omega, \\ -\Delta \phi_2 = \frac{-s + \frac{hu}{(1 + au)(1 + bv)} - q_2}{d_2 + d_{21}u} \phi_2, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9)$$

令 $x_1 \in \bar{\Omega}$ 且 $\phi_1(x_1) = \max_{\bar{\Omega}} \phi_1$, 对式(9)的第一个方程应用引理2得到 $u(x_1) \leq 1 - q_1$, 同时可得 $v(x_1) \leq \frac{1 + a(1 - q_1)}{m}$. 故可以推出

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \frac{1}{d_1} \max_{\bar{\Omega}} \phi_1 = \frac{1}{d_1} (d_1 u(x_1) + d_{12} u(x_1) v(x_1)) \leq 1 - q_1 + \frac{d_{12}}{d_1} (1 - q_1) \left(\frac{1 + a(1 - q_1)}{m} \right) \triangleq C_1.$$

同理, 令 $x_2 \in \bar{\Omega}$ 且 $\phi_2(x_2) = \max_{\bar{\Omega}} \phi_2$, 则 $v(x_2) \leq \frac{hC_1}{(q_2 + s)b}$, 得

$$\max_{\bar{\Omega}} v \leq \frac{1}{d_2} \max_{\bar{\Omega}} \phi_2 = \frac{1}{d_2} (d_2 v(x_2) + d_{21} u(x_2) v(x_2)) \leq \frac{hC_1}{(q_2 + s)b} + \frac{d_{21}}{d_2} \frac{hC_1^2}{(q_2 + s)b} = \frac{hC_1}{(q_2 + s)b} \left(1 + \frac{d_{21}}{d_2} C_1 \right) \triangleq C_2.$$

定理 5 (下界) 设 $q_1 < 1$, $\frac{h(1 - q_1)}{1 + a(1 - q_1)} \neq s + q_2$. 若存在正常数 D, d 使得 $\frac{d_{12}}{d_1}, \frac{d_{21}}{d_2} \leq D$ 且 $\min\{d_1, d_2\} \geq d$, 则存在正常数 $Q_i = Q_i(d, D, \Lambda)$ ($i = 1, 2$), 使得模型(8)的所有正解 (u, v) 满足

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq Q_1, \quad \min_{\bar{\Omega}} v \geq Q_2.$$

证明 易知

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - u - \frac{mv}{1 + au} - q_1}{d_1 + d_{12}v} \right)_{\infty} &\leq \frac{(1 + \max u)(1 + a \max u) + m \max v + q_1(1 + a \max u)}{\min(d_1 + d_{12}v)(1 + a \min u)} \\ &\leq \frac{(1 + C_1)(1 + aC_1) + mC_2 + q_1(1 + aC_1)}{d_1}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \left(\frac{-s + \frac{hu}{(1 + au)(1 + bv)} - q_2}{d_2 + d_{21}u} \right)_{\infty} &\leq \frac{(s + q_2)(1 + \max u)(1 + b \max v) + h \max u}{\min(d_2 + d_{21}u)(1 + a \min u)(1 + b \min v)} \\ &\leq \frac{(s + q_2)(1 + aC_1)(1 + bC_2) + hC_1}{d_2}. \end{aligned}$$

通过引理3可知存在正常数 $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(d, \Lambda)$, $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(d, \Lambda)$, 使得

$$\max_{\bar{\Omega}} \phi_1 \leq \tilde{C}_1 \min_{\bar{\Omega}} \phi_1, \quad \max_{\bar{\Omega}} \phi_2 \leq \tilde{C}_2 \min_{\bar{\Omega}} \phi_2.$$

因此

$$\frac{\max_{\bar{\Omega}} u(x)}{\min_{\bar{\Omega}} u(x)} \leq \frac{\max_{\bar{\Omega}} \phi_1(x)}{\min_{\bar{\Omega}} \phi_1(x)} \frac{\max(d_1 + d_{12}v)}{\min(d_1 + d_{12}v)} \leq \tilde{C}_1 \left(1 + \frac{d_{12}}{d_1} C_2 \right) \triangleq C_1^*,$$

以及

$$\frac{\max_{\Omega} v(x)}{\min_{\Omega} v(x)} \leq \frac{\max_{\Omega} \phi_2(x)}{\min_{\Omega} \phi_2(x)} \frac{\max(d_2 + d_{21}u)}{\min(d_2 + d_{21}u)} \leq \tilde{C}_2 \left(1 + \frac{d_{21}}{d_2} C_1\right) \triangleq C_2^*,$$

即

$$\max_{\Omega} u(x) \leq C_1^* \min_{\Omega} u(x), \quad \max_{\Omega} v(x) \leq C_2^* \min_{\Omega} v(x).$$

对模型(8)第二个方程在 Ω 上积分, 得

$$\int_{\Omega} v(x) \left(\frac{hu(x)}{(1+au(x))(1+bv(x))} - s - q_2 \right) dx = 0.$$

因此一定存在一点 $x_3 \in \Omega$, 使得 $\frac{hu(x_3)}{(1+au(x_3))(1+bv(x_3))} - s - q_2 = 0$. 进而得到 $\max_{\Omega} u(x) \geq u(x_3) \geq$

$\frac{s+q_2}{h}$. 于是

$$\min_{\Omega} u(x) \geq \frac{\max_{\Omega} u(x)}{C_1^*} \geq \frac{u(x_3)}{C_1^*} \geq \frac{s+q_2}{hC_1^*} \triangleq Q_1.$$

现证若 $\frac{h(1-q_1)}{1+a(1-q_1)} \neq s+q_2$, 则存在 Q_2 , 使得 $\min_{\Omega} v \geq Q_2$. 假设正解 v 没有正下界, 则一定存在序

列 $\{(d_{1n}, d_{2n}, d_{12,n}, d_{21,n})\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $d_{1n} \geq d, d_{2n} \geq d, d_{12,n} > 0, d_{21,n} > 0$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时模型(8)对应的正解 (u_n, v_n) 满足 $\min_{\Omega} v_n \rightarrow 0$. 由引理3得

$$\max_{\Omega} v_n \rightarrow 0. \quad (10)$$

根据椭圆型方程的正则性理论可知存在 $\{(u_n(x), v_n(x))\}_{i=1}^{\infty}$ 的收敛子列, 仍记作 $\{(u_n(x), v_n(x))\}_{i=1}^{\infty}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $(u_n(x), v_n(x)) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$. 由 $\min_{\Omega} u(x) \geq Q_1$ 和式(10)可知 $\bar{u} > 0, \bar{v} \equiv 0$.

由于 $(u_n(x), v_n(x))$ 是模型(8)的正解, 因此有 $0 < u_n(x) \leq C_1, 0 < v_n(x) \leq C_2$, 且

$$\int_{\Omega} u_n(x) \left(1 - u_n(x) - \frac{mv_n(x)}{1+au_n(x)} - q_1 \right) dx = 0, \quad \int_{\Omega} v_n(x) \left(\frac{hu_n(x)}{(1+au_n(x))(1+bv_n(x))} - s - q_2 \right) dx = 0. \quad (11)$$

若 $\bar{u} > 0, \bar{v} \equiv 0$, 则当 n 充分大时, 根据式(11)可知 $\bar{u} = 1 - q_1$, 得

$$\frac{hu_n(x)}{(1+au_n(x))(1+bv_n(x))} - s - q_2 \rightarrow \frac{h\bar{u}}{1+a\bar{u}} - s - q_2 = \frac{h(1-q_1)}{1+a(1-q_1)} - s - q_2 \neq 0,$$

进一步

$$\int_{\Omega} v_n(x) \left(\frac{hu_n(x)}{(1+au_n(x))(1+bv_n(x))} - s - q_2 \right) dx \neq 0,$$

与式(11)矛盾. 因此存在 Q_2 , 使得 $\min_{\Omega} v(x) \geq Q_2$.

2.2 非常数正稳态解的不存在性

本小节运用能量估计法证明模型(2)非常数正稳态解的不存在性.

定理6 若 $d_{12} = d_{21} = 0$ 且存在正常数 d_1^*, d_2^* 使得 $d_1 \geq d_1^*, d_2 \geq d_2^*$, 则模型(8)不存在非常数正解.

证明 假设 (u, v) 是模型(8)在无交错扩散时的正解, 定义

$$\bar{u} = \frac{\int_{\Omega} u(x) dx}{|\Omega|}, \quad \bar{v} = \frac{\int_{\Omega} v(x) dx}{|\Omega|}.$$

将模型(8)的第一个方程两边同时乘以 $u - \bar{u}$, 并在 Ω 上进行积分可得

$$\begin{aligned}
 d_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\Omega} (u - \bar{u}) \left[u(1 - u) - \frac{muw}{1 + au} - q_1 u - \left(\bar{u}(1 - \bar{u}) - \frac{m\bar{u}\bar{v}}{1 + a\bar{u}} - q_1 \bar{u} \right) \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ (u - \bar{u})^2 \left[(1 - q_1) - (u + \bar{u}) - \frac{m\bar{v}}{(1 + au)(1 + a\bar{u})} \right] - \frac{(amu\bar{u} + mu)}{(1 + au)(1 + a\bar{u})} (u - \bar{u})(v - \bar{v}) \right\} dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left\{ (u - \bar{u})^2 + \frac{(amu\bar{u} + mu)}{(1 + au)(1 + a\bar{u})} |u - \bar{u}| |v - \bar{v}| \right\} dx.
 \end{aligned}$$

同理, 令 $N = (1 + au)(1 + bv)$, $\bar{N} = (1 + a\bar{u})(1 + b\bar{v})$. 则有

$$\begin{aligned}
 d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \int_{\Omega} (v - \bar{v}) \left(-sv - q_2 v + s\bar{v} + q_2 \bar{v} + \frac{hw}{N} - \frac{h\bar{u}\bar{v}}{\bar{N}} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} (v - \bar{v}) \left[(-s - q_2)(v - \bar{v}) + \frac{(h\bar{v} + bh\bar{v}v)(u - \bar{u})}{N\bar{N}} + \frac{(hu + hau\bar{u})(v - \bar{v})}{N\bar{N}} \right] dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (v - \bar{v}) \left[(-s - q_2)(v - \bar{v}) + \frac{h}{b}(u - \bar{u}) + \frac{h}{a}(v - \bar{v}) \right] dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left\{ \left(-s - q_2 + \frac{h}{a} \right) (v - \bar{v})^2 + \frac{h}{b} |u - \bar{u}| |v - \bar{v}| \right\} dx.
 \end{aligned}$$

将上述得到的结果相加并运用 ε -Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
 d_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left\{ (u - \bar{u})^2 + \frac{(amu\bar{u} + mu)}{(1 + au)(1 + a\bar{u})} |u - \bar{u}| |v - \bar{v}| \right\} dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left\{ \left(-s - q_2 + \frac{h}{a} \right) (v - \bar{v})^2 + \frac{h}{b} |u - \bar{u}| |v - \bar{v}| \right\} dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 dx + \int_{\Omega} \frac{h}{a} (v - \bar{v})^2 dx + \int_{\Omega} P |u - \bar{u}| |v - \bar{v}| dx \\
 &\leq \int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 dx + \int_{\Omega} \frac{h}{a} (v - \bar{v})^2 dx + \int_{\Omega} \left[\frac{P}{2\varepsilon} (u - \bar{u})^2 + \frac{\varepsilon P}{2} (v - \bar{v})^2 \right] dx,
 \end{aligned}$$

其中 ε 是足够小的正数. 应用 Poincaré 不等式

$$\mu_1 \int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \mu_1 \int_{\Omega} (v - \bar{v})^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

可知

$$d_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left\{ d_1^* |\nabla u|^2 + d_2^* |\nabla v|^2 \right\} dx,$$

其中 μ_1 是在 Neumann 边界条件下 $-\Delta$ 算子的最小正特征值, $d_1^* = \frac{2\varepsilon + P}{2\mu_1\varepsilon}$, $d_2^* = \frac{2h + \varepsilon Pa}{2\mu_1 a}$. 上述计算表明当

$d_1 \geq d_1^*$, $d_2 \geq d_2^*$ 时, $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$. 即 $d_{12} = d_{21} = 0$ 时, 模型(8)没有非常数正稳态解.

2.3 非常数正稳态解的存在性

本节利用 Leray-Schauder 度理论讨论模型(2)非常数正稳态解的存在性. 令

$$X = \left\{ w \in [C^1(\bar{\Omega})]^2 \mid \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \right\}, \quad X^+ = \{ w \in X \mid w > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \},$$

$$\Gamma = \left\{ w \in X \mid \underline{Q} < u(x), \quad v(x) < \bar{C}, \quad x \in \bar{\Omega} \right\},$$

其中 $\bar{C} = \max \{ C_1, C_2 \}$, $\underline{Q} = \min \{ Q_1, Q_2 \}$. 方便起见, 将模型(8)写成

$$\begin{cases} -\Delta \Phi(w) = H(w), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$, $H(w) = (f(u, v), g(u, v))^T$, 这里 $f(u, v) = u(1 - u) - \frac{muw}{1 + au} - q_1 u$, $g(u, v) =$

$v \left(\frac{hu}{(1 + au)(1 + bv)} - s - q_2 \right)$ 且设

$$D_1 = \Phi_w(w^*) = \begin{pmatrix} d_1 + d_{12}v_* & d_{12}u_* \\ d_{21}v_* & d_2 + d_{21}u_* \end{pmatrix}, \quad J = H_w(w^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $w^* = (u_*, v_*)$, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 在定理 2 证明中给出. 显然对模型 (12) 的所有非负解 w , $\det \{ \Phi_w(w) \} > 0$ 总是成立, 因此 $\Phi_w^{-1}(w)$ 存在且满足 $\det \{ \Phi_w^{-1}(w) \} > 0$. 进一步 w 是模型 (12) 的一个正解当且仅当

$$\mathcal{Z}(w) \triangleq w - (I - \Delta)^{-1} \{ \Phi_w^{-1}(w) [H(w) + \nabla w \Phi_{ww}(w) \cdot \nabla w] + w \} = 0, \quad w \in X^+,$$

其中 $(I - \Delta)^{-1}$ 是 $I - \Delta$ 在齐次 Neumann 边界条件下有界区域 X 的逆算子. $\mathcal{Z}(\cdot)$ 是恒等算子的紧扰动, 因此对于任意的 $w \in \partial\Gamma$, $\mathcal{Z}(w) \neq 0$, Leray-Schauder 度 $\deg(\mathcal{Z}(\cdot), 0, \Gamma)$ 可被定义.

计算可得

$$\mathcal{Z}_w(w^*) = I - (I - \Delta)^{-1} [\Phi_w^{-1}(w^*) H_w(w^*) + I] = I - (I - \Delta)^{-1} (D_1^{-1} J + I).$$

如果 $\mathcal{Z}_w(w^*)$ 可逆, 那么 \mathcal{Z} 在 w^* 处的指数可以被定义为 $\text{index}(\mathcal{Z}(\cdot), w^*) = (-1)^\zeta$, 其中 ζ 是 $\mathcal{Z}_w(w^*)$ 所有带负实部特征值的代数重数之和. 同时 λ 是 $\mathcal{Z}_w(w^*)$ 在 X_{ij} 上特征值的充要条件是 λ 是矩阵 $I - \frac{1}{1 + \mu_i} (D_1^{-1} J + I) = \frac{1}{1 + \mu_i} (\mu_i I - D_1^{-1} J)$ 的特征值, 其中对于任意 $i \geq 0$ 及 $j \in [1, \dim E(\mu_i)]$, X_{ij} 在 $\mathcal{Z}_w(w^*)$ 不变. 因此

$\mathcal{Z}_w(w^*)$ 可逆当且仅当对于任意的 $i \geq 0$ 矩阵 $I - \frac{1}{1 + \mu_i} (D_1^{-1} J + I)$ 非奇异. 令

$$N(\mu) \triangleq \det \{ \mu I - D_1^{-1} J \} = \frac{1}{\det \{ D_1 \}} \det \{ \mu D_1 - J \}, \tag{13}$$

可知对任意的 $i \geq 0$, $N(\mu_i) \neq 0$ 时, $\mathcal{Z}_w(w^*)$ 在 X_{ij} 上的负特征值个数为奇数的唯一条件是 $N(\mu_i) < 0$. 因此有以下引理.

引理 4 假设对所有的 $i \geq 0$, 矩阵 $\{ \mu_i I - D_1^{-1} J \}$ 非奇异, 则

$$\text{index}(\mathcal{Z}(\cdot), w^*) = (-1)^\delta,$$

其中 $\delta = \sum_{i \geq 0, N(\mu_i) < 0} \dim E(\mu_i)$.

为了计算 $\text{index}(\mathcal{Z}(\cdot), w^*)$ 可以考虑 $N(\mu_i)$ 的符号, 即 $\det \{ \mu_i D_1 - J \}$ 的符号. 显然

$$\det \{ \mu D_1 - J \} = A'\mu^2 - B'\mu + C' \triangleq \mathcal{A}(\mu; d_{21}), \tag{14}$$

其中 A', B', C' 的具体表达式在定理 3 证明中给出. 令 $\bar{\mu}', \bar{\mu}''$ 是 $\mathcal{A}(\mu; d_{21}) = 0$ 的两个根且 $\text{Re} \{ \bar{\mu}' \} < \text{Re} \{ \bar{\mu}'' \}$. 于是得到以下极限:

$$\lim_{d_{21} \rightarrow \infty} \frac{A'}{d_{21}} = d_1 u_*, \quad \lim_{d_{21} \rightarrow \infty} \frac{B'}{d_{21}} = a_{11} u_* - a_{12} v_* \triangleq M, \quad \lim_{d_{21} \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}(\mu; d_{21})}{d_{21}} = \mu(d_1 u_* \mu - M).$$

若 $a_{11} u_* - a_{12} v_* > 0$, 则 $M > 0$. 易得以下定理.

定理 7 假设 $1 - \frac{2}{a} < q_1 < 1$, $h > a(s + q_2)$, $u_* < 1 - q_1$. 若 $ma v_* < (1 + au_*)^2$, $a_{11} u_* - a_{12} v_* > 0$, 则存在正常数 d_{21}^* , 使得当 $d_{21} > d_{21}^*$ 时, $\mathcal{A}(\mu; d_{21}) = 0$ 有两个正实根 $\bar{\mu}', \bar{\mu}''$ 满足

$$\begin{cases} \lim_{d_{21} \rightarrow \infty} \bar{\mu}'(d_{21}) = 0, \\ \lim_{d_{21} \rightarrow \infty} \bar{\mu}''(d_{21}) = \frac{M}{d_1 u_*} = \bar{\mu}. \end{cases}$$

同时也可以得到

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mu; d_{21}) < 0, & \mu \in (\bar{\mu}'(d_{21}), \bar{\mu}''(d_{21})), \\ \mathcal{A}(\mu; d_{21}) > 0, & \mu \in (-\infty, \bar{\mu}'(d_{21})) \cup (\bar{\mu}''(d_{21}), +\infty). \end{cases} \tag{15}$$

进而研究交错扩散对模型 (8) 非常数正解存在性的影响.

定理 8 假设 d_1, d_2, d_{12} 均是适当的正常数并且满足 $ma v_* < (1 + au_*)^2$, $a_{11} u_* - a_{12} v_* > 0$, 若存在 $n \geq 1$ 使得 $\bar{\mu} \in (\mu_n, \mu_{n+1})$ 以及 $\delta_n = \sum_{i=1}^n \dim E(\mu_i)$ 是奇数, 则存在正常数 d_{21}^* , 使得 $d_{21} > d_{21}^*$ 时模型 (8) 至

少存在一个非常数正解.

证明 根据定理 7 可知当 $d_{21} > d_{21}^*$ 时, 有

$$0 = \mu_0 < \bar{\mu}'(d_{21}) < \bar{\mu}''(d_{21}), \quad \bar{\mu}''(d_{21}) \in (\mu_n, \mu_{n+1}). \tag{16}$$

令 $\hat{d}_1 > d_1^*$, $\hat{d}_2 > d_2^*$ 且假设存在 $d_{21} = \hat{d}_{21} > d_{21}^*$ 使得结论不成立. 定义

$$\Phi(t, w) = \begin{pmatrix} [td_1 + (1-t)\hat{d}_1]u + td_{12}uw \\ [td_2 + (1-t)\hat{d}_2]v + td_{21}uw \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $t \in [0, 1]$, 同时可得

$$\begin{cases} -\Delta\Phi(t, w) = H(w), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{18}$$

显然 w 是模型(12)的一个非常数正解当且仅当它是模型(18)在 $t = 1$ 时的一个正解. 对于 $t \in [0, 1]$, w 是模型(18)的一个正解当且仅当

$$\mathcal{Z}(t; w) \triangleq w - (I - \Delta)^{-1} \{ \Phi_w^{-1}(t; w) [H(w) + \nabla w \Phi_{ww}(t; w) \cdot \nabla w] + w \} = 0, \quad w \in X^+.$$

当 $t = 1$ 时, $\mathcal{Z}(1; w) = \mathcal{Z}(w)$. 当 $t = 0$ 时, 定理 6 表明 $\mathcal{Z}(0; w) = 0$ 只有唯一正常数解. 通过计算可以知道

$$\mathcal{Z}_w(t; w^*) = I - (I - \Delta)^{-1} [\Phi_w^{-1}(t; w^*) H_w(w^*) + I] = I - (I - \Delta)^{-1} (\Phi_w^{-1}(t; w^*) J + I).$$

特别地

$$\mathcal{Z}_w(0; w^*) = I - (I - \Delta)^{-1} (\hat{D}_0^{-1} J + I), \quad \mathcal{Z}_w(1; w^*) = I - (I - \Delta)^{-1} (D_1^{-1} J + I) = \mathcal{Z}_w(w^*),$$

其中

$$\hat{D}_0 = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & 0 \\ 0 & \hat{d}_2 \end{pmatrix}.$$

令 $\hat{\mathcal{A}}(\mu) = \det \{ \mu \hat{D}_0 - J \}$, 根据式(13)~(14)可知

$$N(1; \mu) \triangleq \det \{ \mu I - D_1^{-1} J \} = \frac{1}{\det(D_1)} \det \{ \mu D_1 - J \} = \frac{1}{\det(D_1)} \mathcal{A}(\mu; d_{21}).$$

因此结合式(15)~(16)计算得到

$$\begin{cases} N(\mu_0) = N(0) > 0, \\ N(1; \mu_i) < 0, & 1 \leq i \leq n, \\ N(1; \mu_i) > 0, & i \geq n + 1. \end{cases}$$

因此, 对任意 $i \geq 0$, 0 不是矩阵 $\mu_i I - D_1^{-1} J$ 的特征值, 且 $\delta_n = \sum_{i \geq 0, N(\mu_i) < 0} \dim E(\mu_i) = \sum_{i=1}^n \dim E(\mu_i)$ 是奇数,

根据引理 4 得

$$\text{index}(\mathcal{Z}(1; \cdot), w^*) = (-1)^{\delta_n} = -1. \tag{19}$$

当 $t = 0$ 时, $N(0; \mu) \triangleq \det \{ \mu I - \hat{D}_0^{-1} J \} = \frac{1}{\det(\hat{D}_0)} \det \{ \mu \hat{D}_0 - J \} = \frac{1}{\det(\hat{D}_0)} \hat{\mathcal{A}}(\mu)$, 若满足 $mav^* < (1 + au^*)^2$, 则 $\hat{\mathcal{A}}(\mu) > 0$, 因此对所有的 $i \geq 0, N(0; \mu_i) > 0$, 则

$$\text{index}(\mathcal{Z}(0; \cdot), w^*) = (-1)^{\delta_n} = 1. \tag{20}$$

根据定理 4 和定理 5, 存在正常数 Q, \bar{C} 使得模型(18)的正解满足 $Q < u, v < \bar{C}$, 且对所有 $w \in \partial\Gamma, t \in [0, 1]$ 有 $\Phi(t; w) \neq 0$. 根据拓扑度的同伦不变性得到

$$\text{deg}(\mathcal{Z}(0; \cdot), \Gamma, 0) = \text{deg}(\mathcal{Z}(1; \cdot), \Gamma, 0). \tag{21}$$

然而 $\mathcal{Z}(1; w) = 0, \mathcal{Z}(0; w) = 0$ 在 Γ 上都只有唯一的正解 w^* , 由式(19)~(20)可知

$$\deg(\mathcal{Z}(0; \cdot), \Gamma, 0) = \text{index}(\mathcal{Z}(0; \cdot), w^*) = 1, \quad \deg(\mathcal{Z}(1; \cdot), \Gamma, 0) = \text{index}(\mathcal{Z}(1; \cdot), w^*) = -1,$$

与式(21)矛盾, 定理得证.

3 数值模拟

为了更好的研究交错扩散和捕获项对模型(2)的影响, 本节在一维情形 $\Omega = [0, l]$ 下对模型(2)进行数值模拟, 进而验证和补充理论结果.

(i) 交错扩散对正常数稳态解 W_2 稳定性的影响. 固定参数 $m = 10, a = 3, q_1 = 0.4, h = 6, b = 1, s = 0.6, q_2 = 0.3, d_1 = 0.1, d_2 = 0.5$. 如图 1 所示, 当交错扩散不存在 ($d_{12}=d_{21}=0$) 时, 模型(2)的正常数稳态解 W_2 稳定, 当交错扩散存在时, W_2 变得不稳定. 这说明交错扩散可以导致稳定的正常数稳态解变得不稳定, 这与定理 2 和定理 3 结论一致.

(ii) 交错扩散对非常数正稳态解存在性的影响. 固定参数 $m = 25, a = 2, q_1 = 0.38, h = 9, b = 0.3, s = 0.2, q_2 = 0.3, d_1 = 0.05, d_2 = 0.05, d_{12} = 0.05$. 从图 2 可观察到当 d_{21} 足够大时, 模型(2)存在非常数正稳态解, 这与定理 8 的结论吻合, 说明了交错扩散 d_{21} 有利于模型(2)产生非常数正稳态解.

(iii) 捕获项 q_1 和 q_2 的影响. 固定参数 $m = 25, a = 2, h = 9, b = 0.2, s = 0.2, d_1 = 0.05, d_2 = 0.05, d_{12} = 0.1, d_{21} = 0.1$. 图 3(a)和(b)显示随着 q_1 的增大, u 和 v 的浓度都会减少. 图 3(a)和(c)显示随着 q_2 的增大, v 的浓度减少, u 的浓度则先在短时间内增加后再减少. 图 3(d)说明随着 q_1 和 q_2 的逐渐增大, u 和 v 的浓度趋于 0. 这些结果表明适当的捕获率可使物种共存.

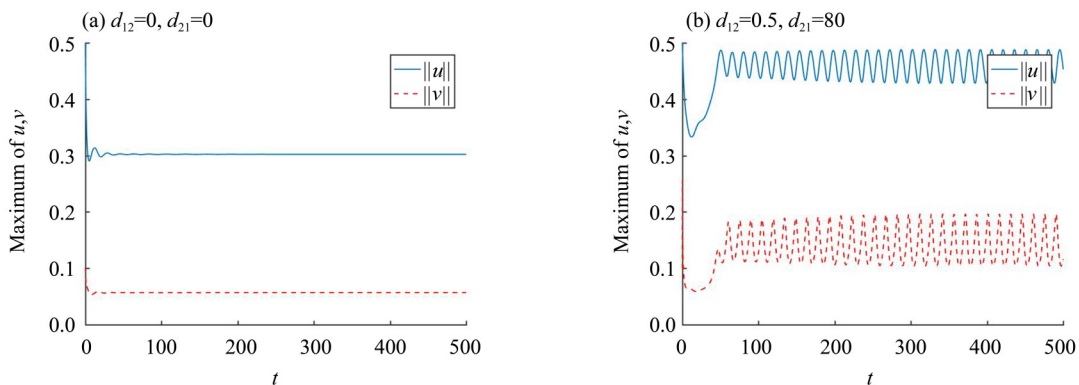


图 1 正常数稳态解 W_2 的稳定性

Fig. 1 The stability of constant positive steady-state solution W_2

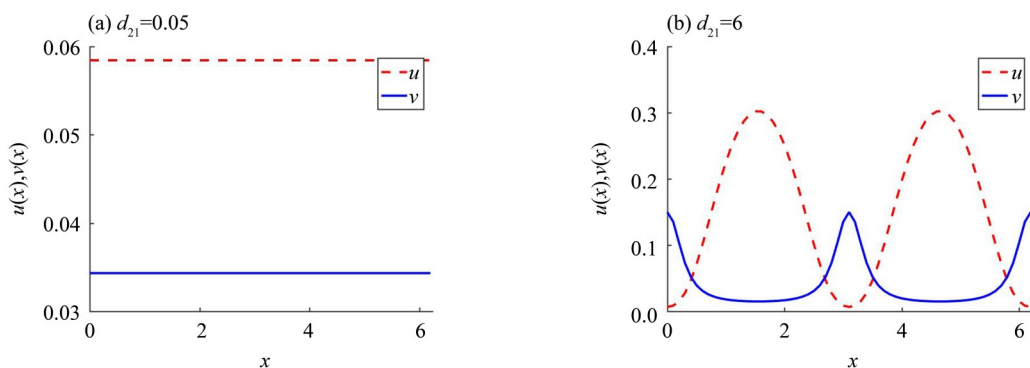
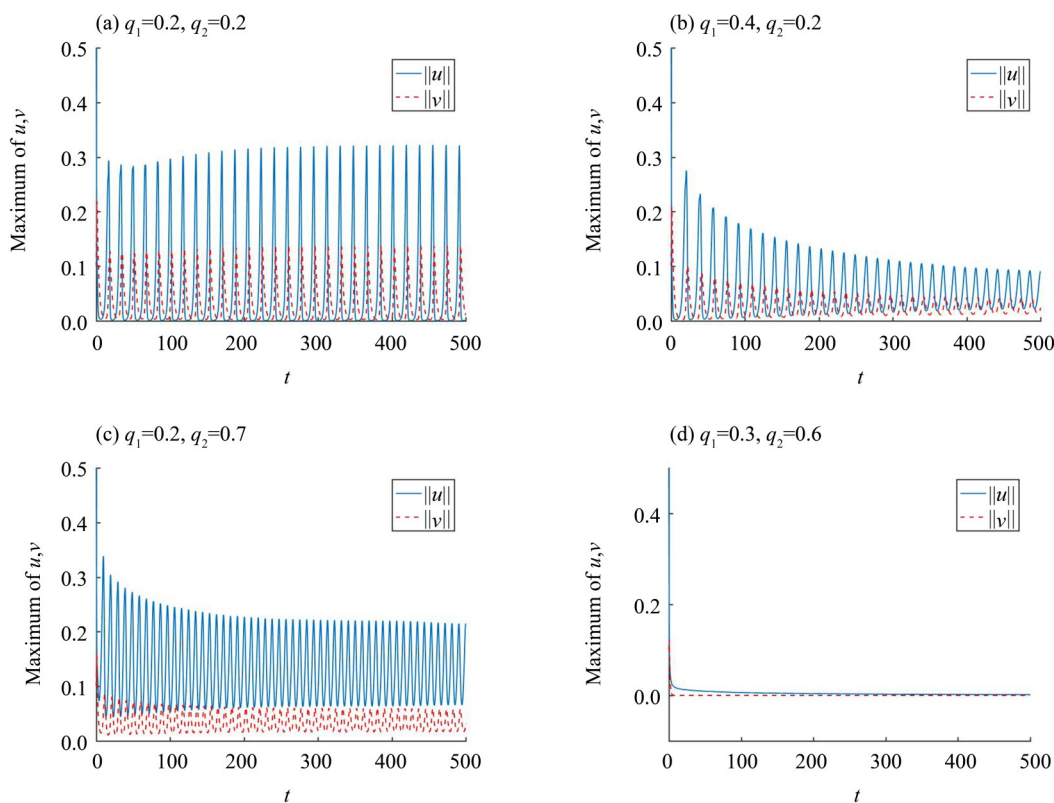


图 2 非常数正稳态解的存在性

Fig. 2 The existence of non-constant positive steady-state solutions

图3 参数 q_1 和 q_2 的影响Fig. 3 The effects of parameters q_1 and q_2

4 结论

本文探讨了一类具有C-M反应函数和捕获项的捕食-食饵交错扩散模型的Turing不稳定以及非常数正稳态解不存在性和存在性. 首先讨论了模型(2)正常数稳态解的稳定性和交错扩散引起的Turing不稳定, 得到当捕食者迅速向食饵低密度方向迁移时可导致模型产生Turing不稳定. 接着给出了模型(2)非常数正稳态解的上下界. 最后研究了模型(2)非常数正稳态解的不存在性和存在性, 通过对比得到在一定条件下, 较大的交错扩散可促进模型非常数正稳态解的产生. 理论研究和数值模拟表明交错扩散是生物模型空间模式形成的驱动因素之一, 且适当的人类捕获率方可维持生态平衡, 因此具有捕获项和交错扩散的捕食-食饵模型的动力学行为更加丰富和复杂.

参考文献:

- 李海侠, 2017. 一类扩散食物链模型正解的多重性和唯一性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 56(5): 51-59.
- 李海侠, 2023. 一类具有非线性捕获项的捕食-食饵扩散模型正解的稳定性和唯一性[J]. 应用数学学报, 46(4): 673-688.
- 裘光明, 2002. 数学辞海·第一卷[M]. 北京: 中国科学技术出版社.
- 杨铜洁, 张存华, 2023. 一类具有交错扩散的捕食者-食饵模型的稳定性分析[J]. 应用数学, 36(1): 126-133.
- ALEBRAHEEM J, 2023. Predator interference in a predator-prey model with mixed functional and numerical responses [J]. J Math, 2023: 4349573.
- BAEK H, KIM D, 2014. Dynamics of a predator-prey system with mixed functional responses[J]. J Appl Math, 2014: 536019.
- BIE Q Y, WANG Q R, YAO Z A, 2014. Cross-diffusion induced instability and pattern formation for a Holling type-II predator-prey model[J]. Appl Math Comput, 247: 1-12.
- GUO G H, WANG J J, 2024. Pattern formation and qualitative analysis for a vegetation-water model with diffusion[J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 76: 104008.

- LI H X, 2014. Asymptotic behavior and multiplicity for a diffusive Leslie-Gower predator-prey system with Crowley-Martin functional response[J]. *Comput Math Appl*, 68(7): 693–705.
- LI H X, WU J H, LI Y L, et al, 2018. Positive solutions to the unstirred chemostat model with Crowley-Martin functional response [J]. *Discrete Contin Dyn Syst B*, 23(8): 2951–2966.
- LI M, CHEN B, YE H, 2017. A bioeconomic differential algebraic predator-prey model with nonlinear prey harvesting[J]. *Appl Math Model*, 42: 17–28.
- LI X, HU G, LU S, 2020. Pattern formation in a diffusive predator-prey system with cross-diffusion effects[J]. *Nonlinear Dyn*, 100(4): 4045–4060.
- LIN C S, NI W M, TAKAGI I, 1988. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system[J]. *J Differ Equ*, 72(1): 1–27.
- LING Z, ZHANG L, LIN Z G, 2014. Turing pattern formation in a predator-prey system with cross diffusion [J]. *Appl Math Model*, 38(21/22): 5022–5032.
- LOU Y, NI W M, 1996. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion[J]. *J Differ Equ*, 131(1): 79–131.
- LU C, 2022. Dynamical analysis and numerical simulations on a Crowley–Martin predator-prey model in stochastic environment [J]. *Appl Math Comput*, 413: 126641.
- MORTUJA M G, CHAUBE M K, KUMAR S, 2021. Dynamic analysis of a predator-prey system with nonlinear prey harvesting and square root functional response[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 148: 111071.
- SINGH A, MALIK P, 2021. Bifurcations in a modified Leslie-Gower predator-prey discrete model with Michaelis-Menten prey harvesting[J]. *J Appl Math Comput*, 67(1): 143–174.
- TIWARI V, TRIPATHI J P, ABBAS S, et al, 2019. Qualitative analysis of a diffusive Crowley-Martin predator-prey model: The role of nonlinear predator harvesting[J]. *Nonlinear Dyn*, 98(2): 1169–1189.
- WEN Z J, 2013. Turing instability and stationary patterns in a predator-prey systems with nonlinear cross-diffusions [J]. *Bound Value Probl*, 2013(1): 155.
- ZHAO J F, ZHANG H T, YANG J, 2017. Stationary patterns of a ratio-dependent prey-predator model with cross-diffusion[J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 33(2): 497–504.
- ZHU M, LI J, LIAN X Z, 2022. Pattern dynamics of cross diffusion predator-prey system with strong Allee effect and hunting cooperation[J]. *Mathematics*, 10(17): 3171.

(责任编辑 冯兆永)