第 64 卷　第 4 期
2025 年　7 月

中山大学学报（自然科学版中英文）
ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI

Vol. 64　No. 4
Jul.　2025

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. ZR20240238

半二面体群上凯莱图的完美边态转移*

陶亚雯，王维忠

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州 730070

摘　要：研究半二面体群 SD_{8n} 上凯莱图的完美边态转移．利用 SD_{8n} 的表示和特征标，给出了其上凯莱图允许完美边态转移的充要条件．

关键词：凯莱图；半二面体群；完美边态转移；量子行走

中图分类号：O157.5　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2025）04－0147－09

Cayley graphs of semi-dihedral groups having perfect edge state transfer

TAO Yawen，*WANG Weizhong*

School of Mathematics and Physics，*Lanzhou Jiaotong University*，*Lanzhou 730070*，*China*

Abstract：The perfect edge state transfer on Cayley graphs over semi-dihedral groups SD_{8n} is investigated. Using the representations and characters of SD_{8n}，some necessary and sufficient conditions are given for admitting perfect edge state transfer of Cayley graphs over SD_{8n}.

Key words：Cayley graphs；semi-dihedral groups；perfect edge state transfer；quantum random walk

量子随机行走在量子信息处理和量子计算中起着至关重要的作用．Aharonov et al.（1993）首次提出量子随机行走的概念．量子随机行走可由其转移矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$ 描述．

设 $G=(V,E)$ 是一个简单连通的无向图，t 是一个正实数，$\boldsymbol{A}$ 为图 G 的邻接矩阵，则图 G 的转移矩阵为：

$$\boldsymbol{H}(t)=\exp(-\mathrm{i}t\boldsymbol{A}),\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

1　预备知识

在量子信息处理中，一个重要的任务是将量子态从一个位置转移到另一个位置．作为量子随机行走的一种特殊情况，图上的完美态转移（Christandl et al.，2004）能使得量子行走时状态转移的保真度保持不变．

设 $v\in V(G)$，$\boldsymbol{e}_v$ 表示顶点 v 的特征向量（即在 v 位置元素为 1，其余位置元素为 0 的单位向量）．

定义 1（Christandl et al.，2004）　给定图 G 中的两个顶点 u 和 v，若存在一个复数 γ，使得

$$\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{e}_u=\gamma\boldsymbol{e}_v,$$

且 $|\gamma|=1$，即矩阵 $H(t)$ 的 (u,v)-元满足 $\left|\boldsymbol{H}(t)_{u,v}\right|=1$，则称在时间 $t(t>0)$，图 G 的顶点 u 和顶点 v 之间存在完美态转移．此外，若 G 在时间 $t(t>0)$ 有 $\left|\boldsymbol{H}(t)_{u,u}\right|=1$，则称 G 在顶点 u 处是周期的；若 G 在每一个顶点处都是周期的，则称 G 是周期的．

* **收稿日期：**2024-07-19　　**录用日期：**2024-09-01　　**网络首发日期：**2025-04-21

基金项目：国家自然科学基金（11961040）；甘肃省自然科学基金（20JR5RA418）

作者简介：陶亚雯（2000年生），女；**研究方向：**代数图论；E-mail：taoyawen@163.com

通信作者：王维忠（1976年生），男；**研究方向：**代数图论；E-mail：wangwzh@mail.lzjtu.cn

Chen et al.(2019)指出完美态转移是一种罕见的现象，因此作者将完美态转移的概念推广到完美边态转移，并且证明了当顶点数固定时，具有完美边态转移的图比具有完美态转移的图更多.

定义 2(Chen et al.,2019) 给定图 G 中的两条边 (a,b) 和 (c,d)，若存在一个复数 γ，使得

$$\boldsymbol{H}(t)(e_a - e_b) = \gamma(e_c - e_d),$$

且 $|\gamma| = 1$，则称在时间 $t(t>0)$，图 G 的边 (a,b) 和 (c,d) 之间存在完美边态转移.

尽管 Chen et al.(2020)给出了一个正则图存在完美边态转移的充要条件(见本文引理 4)，但实际中利用该结果来判定一个图是否存在完美边态转移时这些条件并不容易得到验证. 因此，一个自然的问题是如何给出一个简便且可行的条件，用以判断图上是否具有完美边态转移. 本文主要研究半二面体群上凯莱图的完美边态转移问题.

1.1 半二面体群的表示

设 $n \geqslant 2$ 为整数，则半二面体群定义为

$$SD_{8n} = \left\langle u, v \middle| u^{4n} = v^2 = 1, vuv = u^{2n-1} \right\rangle.$$

设 G 是一个有限群，V 是维数大于 1 的有限维复向量空间，则称从 G 到 V 上的一般线性群 $GL(V)$ 的同态 ρ 为 G 的一个表示，且将向量空间 V 的维数称为 ρ 的次数.

对于两个表示

$$\rho: G \rightarrow GL(V) \text{ 和 } \delta: G \rightarrow GL(W),$$

若存在一个同构 T：$V \rightarrow W$ 使得对所有 $g \in G$，满足 $\rho_g = T\delta_g T^{-1}$，则称这两个表示是等价的，记为 $\rho \sim \delta$.

对于 G 的每个表示 ρ：$G \rightarrow GL(V)$，定义相应的特征标为：

$$\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C},$$
$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\left(\rho(g)\right),\ g \in G,$$

这里 $\mathrm{tr}\left(\rho(g)\right)$ 是关于向量空间 V 的一组基的表示矩阵的迹.

对于 V 的一个子空间 U，若对任意的 $g \in G$ 和 $\theta \in U$，有 $\rho(g)\theta \in U$，则称 U 为 G 的不变子空间，很容易看出 V 和 $\{0\}$ 是 G 的不变子空间，它们被称为平凡的 G-不变子空间. 若 V 只有平凡的 G-不变子空间，则称表示 ρ 是 G 的不可约表示. 同时，相应的特征标称为 G 的不可约特征标.

在本文中，设 n 是正整数，记 Q_1、Q_2、Q_3 为以下集合：

$$Q_1 = \{2, 4, \cdots, 2n-2\}, \qquad Q_2 = \{1, 3, \cdots, n-1\} \cup \{2n+1, 2n+3, \cdots, 3n-1\},$$
$$Q_3 = \{1, 3, \cdots, n-2\} \cup \{2n+1, 2n+3, \cdots, 3n-2\}.$$

引理 1(Hormozi et al.,2013) 设 $n \geqslant 2$ 为整数，$\omega = \exp\left(\pi \mathrm{i}/(2n)\right)$. 若 n 是偶数，则 SD_{8n} 的表示和特征标分别如表 1 和表 2 所示；若 n 是奇数，则 SD_{8n} 的表示和特征标分别如表 3 和表 4 所示.

表 1 SD_{8n}(n 为偶数)的表示

Table 1 Representations of SD_{8n} for even n

g	$u^l (0 \leqslant l \leqslant 4n-1)$	$vu^l (0 \leqslant l \leqslant 4n-1)$
ψ_1	1	1
ψ_2	1	−1
ψ_3	$(-1)^l$	$(-1)^l$
ψ_4	$(-1)^l$	$(-1)^{l+1}$
$\xi_j(j \in Q_1 \cup Q_2)$	$\begin{pmatrix} \omega^{jl} & 0 \\ 0 & \omega^{(2n-1)jl} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega^{(2n-1)jl} \\ \omega^{jl} & 0 \end{pmatrix}$

1.2 凯莱图的谱

设 G 是有限群，$S \subseteq G$ 且 $1 \notin S = S^{-1}$，则 G 关于 S 的凯莱图(Cayley,1877)$\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是指以 G 为顶点集的简单无向图，且顶点 g，$h \in G$ 邻接当且仅当 $gh^{-1} \in S$.

表2　SD_{8n}（n 为偶数）的特征标

Table 2　Characters of SD_{8n} for even n

g	$u^l(0 \le l \le 4n-1)$	$vu^l(0 \le l \le 4n-1)$
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^l$	$(-1)^l$
χ_4	$(-1)^l$	$(-1)^{l+1}$
$\chi_j(j \in Q_1)$	$2\cos\left(\pi jl/(2n)\right)$	0
$\chi_j(j \in Q_2)$	$\exp\left(\pi j\mathrm{i}l/(2n)\right)+(-1)^l\exp\left(-\pi j\mathrm{i}l/(2n)\right)$	0

表3　SD_{8n}（n 为奇数）的表示

Table 3　Representations of SD_{8n} for odd n

g	$u^l(0 \le l \le 4n-1)$	$vu^l(0 \le l \le 4n-1)$
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^l$	$(-1)^l$
ψ_4	$(-1)^l$	$(-1)^{l+1}$
ψ_5	$(\mathrm{i})^l$	$(\mathrm{i})^l$
ψ_6	$(\mathrm{i})^l$	$(\mathrm{i})^{l+2}$
ψ_7	$(-\mathrm{i})^l$	$(-\mathrm{i})^l$
ψ_8	$(-\mathrm{i})^l$	$(-\mathrm{i})^{l+2}$
$\xi_j(j \in Q_1 \cup Q_3)$	$\begin{pmatrix} \omega^{jl} & 0 \\ 0 & \omega^{(2n-1)jl} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega^{(2n-1)jl} \\ \omega^{jl} & 0 \end{pmatrix}$

表4　SD_{8n}（n 为奇数）的特征标

Table 4　Characters of SD_{8n} for odd n

g	$u^l(0 \le l \le 4n-1)$	$vu^l(0 \le l \le 4n-1)$
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^l$	$(-1)^l$
χ_4	$(-1)^l$	$(-1)^{l+1}$
χ_5	$(\mathrm{i})^l$	$(\mathrm{i})^l$
χ_6	$(\mathrm{i})^l$	$(\mathrm{i})^{l+2}$
χ_7	$(-\mathrm{i})^l$	$(-\mathrm{i})^l$
χ_8	$(-\mathrm{i})^l$	$(-\mathrm{i})^{l+2}$
$\chi_j(j \in Q_1)$	$2\cos\left(\pi jl/(2n)\right)$	0
$\chi_j(j \in Q_3)$	$\exp\left(\pi j\mathrm{i}l/(2n)\right)+(-1)^l\exp\left(-\pi j\mathrm{i}l/(2n)\right)$	0

下面两个引理建立了图谱理论与有限群的表示和特征标理论之间的桥梁.

引理2（Babai，1979）　设 G 是 n 阶有限群，$S \subseteq G$ 且 $1 \notin S = S^{-1}$，$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_h$ 是群 G 的非等价不可约

表示的完全集，χ_i 是 ρ_i 对应的特征标，且 $\chi_i(1)=d_i(i=1,\cdots,h)$. 则凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 的谱为：

$$\mathrm{Spec}(\Gamma)=\left\{\left[\lambda_{11}\right]^{d_1},\cdots,\left[\lambda_{1d_1}\right]^{d_1},\cdots,\left[\lambda_{h1}\right]^{d_h},\cdots,\left[\lambda_{hd_h}\right]^{d_h}\right\},$$

这里 $\lambda_{i,1},\cdots,\lambda_{i,d_i}$ 是矩阵 $\sum_{g\in S}\boldsymbol{R}_i(g)$ 的所有特征值，$\boldsymbol{R}_i(g)$ 是不可约表示 ρ_i 对应的表示矩阵，$\lambda_i^{d_i}$ 表示 λ_i 的重数为 d_i.

此外，对任意自然数 t 有

$$\lambda_{i1}^t+\lambda_{i2}^t+\cdots+\lambda_{id_i}^t=\sum_{s_1,\cdots,s_t\in S}\chi_{\rho_i}\left(\prod_{l=1}^{t}s_l\right).$$

引理 3（Steinberg，2011） 设 $G=\{g_1,\cdots,g_n\}$ 是一个群，$\rho^{(1)},\cdots,\rho^{(s)}$ 是 G 的不可约表示等价类的酉表示完全集，χ_i 是次数为 d_i 的表示 $\rho^{(i)}$ 对应的特征标，$S\subseteq G$，$1\notin S=S^{-1}$，且对所有 $g\in G$ 都满足 $gSg^{-1}=S$，则凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 的特征值为：

$$\lambda_k=\frac{1}{d_k}\sum_{g\in S}\chi_k(g)\ (1\leqslant k\leqslant s),$$

且每个 λ_k 的重数都为 d_k^2. 此外，向量

$$v_{hj}^{(k)}=\sqrt{\frac{d_k}{|G|}}\left(\rho_{hj}^{(k)}(g_1),\cdots,\rho_{hj}^{(k)}(g_n)\right)^{\mathrm{T}}(1\leqslant h,j\leqslant d_k)$$

构成特征空间 V_{λ_k} 的一个正交基，其中 $\rho_{hj}^{(k)}(g_i)$ 是矩阵 $\boldsymbol{\rho}^{(k)}(g_i)$ 的 (h,j)-元.

2 主要结果

在这部分，我们将给出凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(SD_{8n},S)$ 允许完美边态转移的两个充分必要条件.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶图 G 的邻接矩阵，其特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_1,\cdots,q_n)$，其中 q_i 是特征值 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 对应的特征向量. 因此可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解如下：

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{E}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{E}_n$$

其中投影矩阵 $\boldsymbol{E}_i=q_iq_i^*(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足：

$$\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=\begin{cases}\boldsymbol{E}_i, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

因此，G 的转移矩阵有如下分解：

$$\boldsymbol{H}(t)=\exp(-\mathrm{i}\lambda_1 t)\boldsymbol{E}_1+\cdots+\exp(-\mathrm{i}\lambda_n t)\boldsymbol{E}_n. \tag{1}$$

Chen et al.(2020)利用图的Laplacian矩阵研究了边态转移，且给出了正则图允许完美边态转移的充要条件.

引理 4（Chen et al., 2020） 设 $(a,b),(c,d)$ 是正则图 Γ 的边，$\boldsymbol{Q}_{a,b}=\frac{1}{2}(e_a-e_b)(e_a-e_b)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Q}_{c,d}=\frac{1}{2}(e_c-e_d)(e_c-e_d)^{\mathrm{T}}$，$\Theta^+$ 是满足 $\boldsymbol{E}_i(e_a-e_b)=\boldsymbol{E}_i(e_c-e_d)$ 的特征值 λ_i 的集合，Θ^- 是满足 $\boldsymbol{E}_i(e_a-e_b)=-\boldsymbol{E}_i(e_c-e_d)$ 的特征值 λ_i 的集合，其中 $\boldsymbol{E}_i$ 是图 Γ 的特征值 λ_i 对应的投影矩阵. 假设 $\lambda\in\Theta^+$，则 Γ 在时刻 t 存在从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 的完美边态转移当且仅当：

1） e_a-e_b 和 e_c-e_d 是强共谱的；

2） 存在一个整数 k 使得对所有 $\lambda_i\in\Theta^+$，都有 $t(\lambda-\lambda_i)=2k\pi$；

3） 存在一个整数 k 使得对所有 $\lambda_i\in\Theta^-$，都有 $t(\lambda-\lambda_i)=(2k+1)\pi$.

引理4给出了正则图上存在完美边态转移的充要条件，然而，使用引理4来确定正则图上是否存在完美边态转移需要大量计算. 在下文中，我们利用群表示和特征标理论来研究半二面体群上凯莱图的完美边态转移.

设 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示整数集、有理数域、实数域和复数域，为了进一步讨论，我们引入2-adic赋值函数(孙继逊,1985). 称一个映射：

$$v_2:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\},\quad v_2(0)=\infty,\quad v_2\left(2^l\frac{a}{b}\right)=l,\ \text{其中}a,b,l\in\mathbb{Z}\ \text{且}\ 2\nmid ab$$

为2-adic 赋值函数.假设对任意 $l\in\mathbb{Z}$，$\infty+\infty=\infty+l=\infty$，且 $l<\infty$，则2-adic 赋值函数有以下性质：

1） $v_2(\alpha\beta)=v_2(\alpha)+v_2(\beta)$；

2） $v_2(\alpha+\beta)\geqslant\min\left\{v_2(\alpha),\ v_2(\beta)\right\}$，等式成立当且仅当 $v_2(\alpha)\neq v_2(\beta)$.

为了简便起见，我们记 $SD_{8n}=\left\langle u,\ v\,\middle|\,u^{4n}=v^2=1,\ vuv=u^{2n-1}\right\rangle$ 中的元素如下：对于一个整数 a，若 $0\leqslant a\leqslant 4n-1$，则 a 对应于元素 u^a；若 $4n\leqslant a\leqslant 8n-1$，则 a 对应于元素 vu^a.

由引理 1 可知，在凯莱图 $\Gamma=\mathrm{Cay}\left(SD_{8n},S\right)$ 中，当 $n>1$ 是一个偶数时，可设 λ_i 为对应于一次表示 $\psi_i(i=1,2,3,4)$ 的 1 重特征值，δ_j 为对应于二次表示 $\xi_j\left(j\in Q_1\cup Q_2\right)$ 的 4 重特征值；当 $n>1$ 是一个奇数时，可设 λ_i 为对应于一次表示 $\psi_i(i=1,2,\cdots,8)$ 的 1 重特征值，δ_j 为对应于二次表示 $\xi_j\left(j\in Q_1\cup Q_3\right)$ 的 4 重特征值.

定理 1　设 S 是半二面体群 SD_{8n}($n>1$ 是偶数)的非空子集，且对任意 $g\in SD_{8n}$ 有 $gSg^{-1}=S$. 设 $(a,b),(c,d)$ 是凯莱图 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n},S\right)$ 的两条不同的边，且 $\boldsymbol{Q}_{a,b}=\frac{1}{2}\left(e_a-e_b\right)\left(e_a-e_b\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_{c,d}=\frac{1}{2}\left(e_c-e_d\right)\left(e_c-e_d\right)^{\mathrm{T}}$，$0\leqslant c,a\leqslant 4n-1,4n\leqslant d,b\leqslant 8n-1$. 则

1） 若 a,b,c,d 都是偶数(或奇数)，则 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n},S\right)$ 在时间 $t(t>0)$ 有从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 的完美边态转移当且仅当

① Γ 是整图；

② $a-c=b-d=2n\left(\text{或}a-c=2n,\ b=d\right)$；

③ 对特征值 $\delta_j\left(j\in Q_2\right)$，有 $v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)=\rho$；对其它任意特征值 $\lambda\neq\delta_j\left(j\in Q_2\right)$，有 $v_2\left(\lambda_4-\lambda_2\right)\geqslant\rho+1$，$v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)\geqslant\rho+1\left(j\in Q_1\right)$. 此外，发生完美边态转移的最小时间 $t=\pi/k$，其中 $k=\gcd\left(\lambda-\lambda_2:\lambda\in\mathrm{Spec}(\Gamma)\setminus\left\{\lambda_2\right\}\right)$. Γ 是周期的当且仅当 Γ 是整图且最小周期为 $2\pi/k$.

2） 若 a,c 是偶数，b,d 是奇数(或 a,c 是奇数，b,d 是偶数)，则 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n},S\right)$ 在时间 $t(t>0)$ 有从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 的完美边态转移当且仅当

① Γ 是整图；

② $a-c=b-d=2n\left(\text{或}a-c=2n,\ b=d\right)$；

③ 对特征值 $\delta_j\left(j\in Q_2\right)$，有 $v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)=\rho$；对其它任意特征值 $\lambda\neq\delta_j\left(j\in Q_2\right)$，有 $v_2\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\geqslant\rho+1$，$v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)\geqslant\rho+1\left(j\in Q_1\right)$. 此外，发生完美边态转移的最小时间 $t=\pi/k$，其中 $k=\gcd\left(\lambda-\lambda_2:\lambda\in\mathrm{Spec}(\Gamma)\setminus\left\{\lambda_2\right\}\right)$. Γ 是周期的当且仅当 Γ 是整图且最小周期为 $2\pi/k$.

证明　1） 设 $\omega=\exp\left(\pi\mathrm{i}/(2n)\right)$，由引理 3 可知，存在一个正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3,\boldsymbol{q}_4,\boldsymbol{q}_j^{(1)},\boldsymbol{q}_j^{(2)},\boldsymbol{q}_j^{(3)},\boldsymbol{q}_j^{(4)}\right)\left(j\in Q_1\cup Q_2\right),$$

其中 $\boldsymbol{q}_i(i=1,2,3,4)$ 为 1 重特征值 λ_i 对应的特征向量，$\boldsymbol{q}_j^{(1)}$、$\boldsymbol{q}_j^{(2)}$、$\boldsymbol{q}_j^{(3)}$、$\boldsymbol{q}_j^{(4)}\left(j\in Q_1\cup Q_2\right)$ 为 4 重特征值 δ_j 对应的特征向量.

在向量 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3,\boldsymbol{q}_4$ 中

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{8n}}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{8n}}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{8n}}(1,-1,\cdots,1,-1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{q}_4=\frac{1}{\sqrt{8n}}(1,-1,\cdots,1,-1,-1,1,\cdots,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

则相应的 $8n$ 阶的投影矩阵 $\boldsymbol{E}_l=\boldsymbol{q}_l\boldsymbol{q}_l^{\,*}(1\leqslant l\leqslant 4)$ 如下：

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{1}{8n}\boldsymbol{J}_{8n};\qquad \boldsymbol{E}_2=\frac{1}{8n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_{4n} & -\boldsymbol{J}_{4n}\\ -\boldsymbol{J}_{4n} & \boldsymbol{J}_{4n}\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{E}_3=\frac{1}{8n}\left(\left(-1\right)^{x+y}\right)_{0\leqslant x,y\leqslant 8n-1};\qquad \boldsymbol{E}_4=\frac{1}{8n}\begin{pmatrix}\left(\left(-1\right)^{x+y}\right) & \left(\left(-1\right)^{x+y+1}\right)\\ \left(\left(-1\right)^{x+y+1}\right) & \left(\left(-1\right)^{x+y}\right)\end{pmatrix}_{0\leqslant x,y\leqslant 4n-1}.$$

在向量 $\boldsymbol{q}_j^{(1)},\boldsymbol{q}_j^{(2)},\boldsymbol{q}_j^{(3)},\boldsymbol{q}_j^{(4)}\left(j\in Q_1\cup Q_2\right)$ 中

$$\boldsymbol{q}_j^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{4n}}\left(\left\{\omega^{jk}\right\}_{k=0}^{4n-1},0\right)^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{q}_j^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{4n}}\left(0,\left\{\omega^{(2n-1)jk}\right\}_{k=0}^{4n-1}\right)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{q}_j^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{4n}}\left(0,\left\{\omega^{jk}\right\}_{k=0}^{4n-1}\right)^{\mathrm{T}};\qquad \boldsymbol{q}_j^{(4)}=\frac{1}{\sqrt{4n}}\left(\left\{\omega^{(2n-1)jk}\right\}_{k=0}^{4n-1},0\right)^{\mathrm{T}}.$$

则相应的 $8n$ 阶的投影矩阵 $\boldsymbol{E}_j^{(i)}=\boldsymbol{q}_j^{(i)}\boldsymbol{q}_j^{(i)*}(1\leqslant i\leqslant 4)$ 如下：

$$\boldsymbol{E}_j^{(1)}=\frac{1}{4n}\left(e_j^{(1)}\left(x,y\right)\right)_{0\leqslant x,y\leqslant 8n-1};\qquad \boldsymbol{E}_j^{(2)}=\frac{1}{4n}\left(e_j^{(2)}\left(x,y\right)\right)_{0\leqslant x,y\leqslant 8n-1};$$

$$\boldsymbol{E}_j^{(3)}=\frac{1}{4n}\left(e_j^{(3)}\left(x,y\right)\right)_{0\leqslant x,y\leqslant 8n-1};\qquad \boldsymbol{E}_j^{(4)}=\frac{1}{4n}\left(e_j^{(4)}\left(x,y\right)\right)_{0\leqslant x,y\leqslant 8n-1}.$$

其中

$$e_j^{(1)}\left(x,y\right)=\begin{cases}\omega^{j(x-y)}, & 0\leqslant x,y\leqslant 4n-1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad e_j^{(2)}\left(x,y\right)=\begin{cases}\omega^{(2n-1)j(x-y)}, & 4n\leqslant x,y\leqslant 8n-1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$e_j^{(3)}\left(x,y\right)=\begin{cases}\omega^{j(x-y)}, & 4n\leqslant x,y\leqslant 8n-1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad e_j^{(4)}\left(x,y\right)=\begin{cases}\omega^{(2n-1)j(x-y)}, & 0\leqslant x,y\leqslant 4n-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此，由式(1)可得

$$\boldsymbol{H}(t)=\sum_{z=1}^{4}\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_z t\right)\boldsymbol{E}_z+\sum_{j\in Q_1\cup Q_2}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)\left(\boldsymbol{E}_j^{(1)}+\boldsymbol{E}_j^{(2)}+\boldsymbol{E}_j^{(3)}+\boldsymbol{E}_j^{(4)}\right).\tag{2}$$

结合式(2)，可以得到转移矩阵的$\left(x,y\right)$-元如下：

（i）若$0\leqslant x\leqslant 4n-1$，$4n\leqslant y\leqslant 8n-1$ 或 $0\leqslant y\leqslant 4n-1$，$4n\leqslant x\leqslant 8n-1$，则

$$\boldsymbol{H}(t)_{x,y}=\frac{1}{8n}\left(\exp(-\mathrm{i}\lambda_1 t)-\exp(-\mathrm{i}\lambda_2 t)+(-1)^{x+y}\left(\exp(-\mathrm{i}\lambda_3 t)-\exp(-\mathrm{i}\lambda_4 t)\right)\right).\tag{3}$$

（ii）若$0\leqslant x,y\leqslant 4n-1$ 或 $4n\leqslant x,y\leqslant 8n-1$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(t)_{x,y}=&\frac{1}{8n}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_1 t\right)+\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right)+\left(-1\right)^{x+y}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_3 t\right)+\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_4 t\right)\right)\right)\\&+\frac{1}{4n}\sum_{j\in Q_1\cup Q_2}\left(\omega^{j(x-y)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)+\omega^{(2n-1)j(x-y)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)\right)\end{aligned}\tag{4}$$

由式(3)~(4)，可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\left(e_a-e_b\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)\left(e_c-e_d\right)\right|&=\left|\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{a,c}-\left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{a,d}-\left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{b,c}+\left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{b,d}\right)\right|\\&=\left|\frac{1}{4n}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right)+\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_4 t\right)\right)\right.\\&\quad+\frac{1}{8n}\sum_{j\in Q_1\cup Q_2}\left(\omega^{j(a-c)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)+\omega^{(2n-1)j(a-c)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)\right)\\&\quad\left.+\frac{1}{8n}\sum_{j\in Q_1\cup Q_2}\left(\omega^{j(b-d)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)+\omega^{(2n-1)j(b-d)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)\right)\right|\\&\leqslant 1.\end{aligned}\tag{5}$$

因此，$\left|\frac{1}{2}\left(e_a-e_b\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(t)\left(e_c-e_d\right)\right|=1$ 当且仅当

$$
\begin{cases}
\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) = \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_4 t\right); \\
\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) = \omega^{(a-c)j}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right); \\
\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) = \omega^{(b-d)j}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right); \\
\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) = \omega^{(2n-1)(a-c)j}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right); \\
\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) = \omega^{(2n-1)(b-d)j}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right).
\end{cases} \tag{6}
$$

式(6)可得 $a-c=b-d=2n$ (或 $a-c=2n$，$b=d$).

设 $t=2\pi T$，由式(6)可以推出

$$
\begin{cases}
\left(\lambda_4-\lambda_2\right)T \in \mathbb{Z}; \\
\left(\delta_j-\lambda_2\right)T \in \mathbb{Z},\ \ j \in Q_1; \\
\left(\delta_j-\lambda_2\right)T - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Z},\ \ j \in Q_2.
\end{cases} \tag{7}
$$

因为 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n}, S\right)$ 是一个简单图，我们得到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{z=1}^{4}\lambda_z + 4\sum_{j\in Q_1\cup Q_2}\delta_j = 0$. 由式(7)可得，它等价于 $(-8n\lambda_2 + 2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)T \in \mathbb{Z}$，结合引理3可知 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 均是整数，因此 $T\in\mathbb{Q}$. 又由式(7)可知，所有特征值都是有理数，且是代数整数，所以都是整数.

设

$$
G_0 = \left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Gamma)\setminus\left\{\lambda_2\right\}:\ (\lambda-\lambda_2)T\in\mathbb{Z}\right\}, \qquad M_0 = \gcd\left(\lambda-\lambda_2:\ \lambda\in G_0\right),
$$

$$
G_1 = \left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Gamma)\setminus\left\{\lambda_2\right\}:(\lambda-\lambda_2)T-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\right\}, \qquad M_1 = \gcd\left(\lambda-\lambda_2:\lambda\in G_1\right),
$$

其中gcd表示求两个或多个整数的最大公因数.

对所有 $\lambda\in G_0$，很容易验证 $T\in\dfrac{1}{M_0}\mathbb{Z}=\left\{\dfrac{l}{M_0}:\ l\in\mathbb{Z}\right\}$.

对所有 $\lambda\in G_1$，假设 $\lambda^{(1)}$，$\lambda^{(2)}\in G_1$，则 $T\left(\lambda^{(1)}-\lambda_2\right)\in\mathbb{Z}$，$T\left(\lambda^{(2)}-\lambda_2\right)\in\mathbb{Z}$，由此可得 $T\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$，

$$
v_2\left(T\left(\lambda^{(1)}-\lambda_2\right)\right) = v_2\left(T\left(\lambda^{(2)}-\lambda_2\right)\right) = -1, \qquad v_2\left(\lambda^{(1)}-\lambda_2\right) = v_2\left(\lambda^{(2)}-\lambda_2\right) = -1 - v_2(T).
$$

因此对于所有的 $\lambda\in G_1$，$v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)$ 都是相同的常数 ρ. 若 $\rho = v_2\left(\delta_j-\lambda_2\right)\geqslant 0$，则 $v_2(M_1)=\rho$. $v_2(T) = v_2\left(T\left(\lambda-\lambda_2\right)\right) - v_2\left(\lambda-\lambda_2\right) = -1-\rho$. 因此，对所有 $\lambda\in G_1$，有

$$
T\in\frac{1}{M_1}\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right) = \left\{\frac{1}{M_1}\left(\frac{1}{2}+l\right):\ l\in\mathbb{Z}\right\}.
$$

将 G_0, G_1 结合在一起，可以得到

$$
T\left(\boldsymbol{Q}_{a,b}, \boldsymbol{Q}_{c,d}\right) = \left(\frac{2\pi}{M_0}\mathbb{Z}\right)\cap\left(\frac{2\pi}{M_1}\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)\right)\cap\mathbb{R}_{>0} = \frac{\pi}{M_0M_1}\left(2M_1\mathbb{Z}\cap M_0(1+2\mathbb{Z})\right)\cap\mathbb{R}_{>0}. \tag{8}
$$

对任意 $z\in Z$，可得

$$
\begin{aligned}
z\in 2M_1\mathbb{Z}\cap M_0(1+2\mathbb{Z}) &\Leftrightarrow z = 2M_1x = M_0\left(1+2y\right),\ x,\ y\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2M_1x - 2M_0y = M_0 \\
&\Leftrightarrow \gcd\left(2M_0,\ 2M_1\right) \mid M_0 \Leftrightarrow v_2\left(M_0\right)\geqslant \rho+1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

设 $k=\gcd\left(M_0, M_1\right)$，则 $M_0 = km_0$，$M_1 = km_1$，$\gcd\left(m_0, m_1\right)=1$，在 $v_2\left(M_1\right)=\rho$，$v_2\left(M_0\right)\geqslant\rho+1$ 的条件下，有 $v_2(k)=\rho$，m_0 是偶数，m_1 是奇数. 则

$$
2M_1x - 2M_0y = M_0 \Leftrightarrow m_1x - m_0y = \frac{m_0}{2}\in\mathbb{Z}.
$$

注意到方程 $m_1x - m_0y = \dfrac{m_0}{2}$ 的解是

$$\begin{cases} x = \frac{m_0}{2} + m_0 l, \\ y = \frac{m_1 - 1}{2} + m_1 l, \end{cases}$$

其中 $l \in \mathbb{Z}$. 因此 $z = 2M_1 x = 2M_1 \frac{m_0}{2}(1 + 2l) = \frac{M_0 M_1}{k}(1 + 2l)$，且 $2M_1\mathbb{Z} \cap M_0(1 + 2\mathbb{Z}) = \frac{M_0 M_1}{k}(1 + 2\mathbb{Z})$. 结合式(8)可得

$$T\left(\boldsymbol{Q}_{a,b}, \boldsymbol{Q}_{c,d}\right) = \left(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z}\right) \cap \mathbb{R}_{>0} = \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\mathbb{Z}_{>0}.$$

因此，图 Γ 从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 之间发生完美边态转移的最小时间是 π/k. 由文献（Godsil，2011，2012）可知，图 Γ 是周期的当且仅当它是整图，若图 Γ 从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 之间发生完美边态转移的最小时间是 π/k，则它的最小周期是 $2\pi/k$.

2） 证明过程与 1)的类似.

注 1 由文献（Chen et al.，2019）可知，对正则图而言，由邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵所对应的转移矩阵是等价的，因此定理 1 中的结论对拉普拉斯完美边态转移和无符号拉普拉斯完美边态转移的情形也成立.

注 2 在凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}\left(SD_{8n}, S\right)$ 中，设 (a,b)，(c,d) 是 Γ 的不同边. 定理 1 给出了 a,b,c,d 都是偶数（或奇数）和 a,c 是偶数，b,d 是奇数（或 a,c 是奇数，b,d 是偶数）4 种情形下 Γ 存在完美边态转移的条件.

事实上，从定理 1 的证明过程可以看出，在其余的 12 种情形，即当 a,b 是偶数，c,d 是奇数；a,b 是奇数，c,d 是偶数；a,d 是偶数，b,c 是奇数；a,d 是奇数，b,c 是偶数；a,b,c 是偶数，d 是奇数；a,b,c 是奇数，d 是偶数；a,b,d 是偶数，c 是奇数；a,b,d 是奇数，c 是偶数；a,c,d 是偶数，b 是奇数；a,c,d 是奇数，b 是偶数；b,c,d 是偶数，a 是奇数；b,c,d 是奇数，a 是偶数时都不存在完美边态转移.

引理 5（Luo et al.，2022） 设 S 是半二面体群 SD_{8n}（$n > 1$ 是奇数）的非空子集，且对任意 $g \in SD_{8n}$ 有 $gSg^{-1} = S$. 设 (a,b)，(c,d) 是凯莱图 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n}, S\right)$ 的两条不同的边，且 $\boldsymbol{Q}_{a,b} = \frac{1}{2}\left(e_a - e_b\right)\left(e_a - e_b\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_{c,d} = \frac{1}{2}\left(e_c - e_d\right)\left(e_c - e_d\right)^{\mathrm{T}}$，$0 \leqslant c,a \leqslant 2n - 1$，$2n \leqslant d,b \leqslant 4n - 1$. 则转移矩阵的 (x,y)-元如下：

（i）若 $0 \leqslant x \leqslant 4n - 1$，$4n \leqslant y \leqslant 8n - 1$ 或 $0 \leqslant y \leqslant 4n - 1$，$4n \leqslant x \leqslant 8n - 1$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(t)_{x,y} = &\frac{1}{8n}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_1 t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) + (-1)^{x+y}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_3 t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_4 t\right)\right)\right) \\ &+\frac{1}{8n}\left(\mathrm{i}^{a-b}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_5 t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_6 t\right)\right)\right) + \frac{1}{8n}\left(\mathrm{i}^{3(a-b)}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_7 t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_8 t\right)\right)\right) \\ &+\frac{1}{4n}\sum_{j \in Q_1 \cup Q_3}\left(\omega^{j(a-b)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right) + \omega^{(2n-1)j(a-b)}\exp\left(-\mathrm{i}\delta_j t\right)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

（ii）若 $0 \leqslant x,y \leqslant 4n - 1$ 或 $4n \leqslant x,y \leqslant 8n - 1$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(t)_{x,y} = &\frac{1}{8n}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_1 t\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_2 t\right) + (-1)^{x+y}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_3 t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_4 t\right)\right)\right) \\ &+\frac{1}{8n}\left(\mathrm{i}^{a-b}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_5 t\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_6 t\right)\right)\right) + \frac{1}{8n}\left(\mathrm{i}^{3(a-b)}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\lambda_7 t\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\lambda_8 t\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

定理 2 设 S 是半二面体群 SD_{8n}（$n > 1$ 是奇数）的非空子集，且任意 $g \in SD_{8n}$ 有 $gSg^{-1} = S$. 设 (a,b)，(c,d) 是凯莱图 $\mathrm{Cay}\left(SD_{8n}, S\right)$ 的两条不同的边，且 $\boldsymbol{Q}_{a,b} = \frac{1}{2}\left(e_a - e_b\right)\left(e_a - e_b\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}_{c,d} = \frac{1}{2}\left(e_c - e_d\right)\left(e_c - e_d\right)^{\mathrm{T}}$，$0 \leqslant c,a \leqslant 2n - 1$，$2n \leqslant d,b \leqslant 4n - 1$. 则凯莱图 $\Gamma = \mathrm{Cay}\left(SD_{8n}, S\right)$ 上不存在从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 的完美边态

转移.

证明　由引理5和定理1的证明过程可知

$$\left|\frac{1}{2}\left(e_a - e_b\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}(t)\left(e_c - e_d\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{a,c} - \left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{a,d} - \left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{b,c} + \left(\boldsymbol{H}(t)\right)_{b,d}\right)\right|$$
$$= \frac{8}{16n} + \frac{4n-4}{8n} + \frac{4n-4}{8n} < 1 . \tag{12}$$

因此，当 $n > 1$ 是一个奇数时，凯莱图 Γ 上不存在从 $\boldsymbol{Q}_{a,b}$ 到 $\boldsymbol{Q}_{c,d}$ 的完美边态转移.

3　结　语

本文主要利用邻接矩阵的谱分解建立了连续量子行走和图的谱之间的联系，借助有限群的表示和特征标理论，给出了半二面体群 $SD_{8n} = \left\langle u, v \middle| u^{4n} = v^2 = 1, vuv = u^{2n-1} \right\rangle$ 上凯莱图允许完美边态转移的充要条件.

参考文献:

孙继逊，1985. 关于s-adic赋值域[J]. 湖北大学学报(自然科学版)，7(1)：6-16.

AHARONOV Y，DAVIDOVICH L，ZAGURY N，1993. Quantum random walks[J]. Phys Rev A，48(2)：1687-1690.

AREZOOMAND M，SHAFIEI F，GHORBANI M，2022. Perfect state transfer on Cayley graphs over the dicyclic group[J]. Linear Algebra Appl，639：116-134.

BABAI L，1979. Spectra of Cayley graphs[J]. J Comb Theory Ser B，27(2)：180-189.

CAO X W，FENG K Q，2021. Perfect state transfer on Cayley graphs over dihedral groups[J]. Linear Multilinear Algebra，69(2)：343-360.

CAYLEY F R S，1877. On the theory of groups[J]. Proc Lond Math Soc，s1-9(1)：126-133.

CHEN Q T，GODSIL C，2019. Edge state transfer[EB/OL]. arXiv：1906.01591v1. https://arxiv.org/abs/1906.01591v1.

CHEN Q T，GODSIL C，2020. Pair state transfer[J]. Quantum Inf Process，19(9)：321.

CHRISTANDL M，DATTA N，EKERT A，et al，2004. Perfect state transfer in quantum spin networks[J]. Phys Rev Lett，92(18)：187902.

GODSIL C，2011. Periodic graphs[J]. Electron J Combin，18(1)：P23.

GODSIL C，2012. State transfer on graphs[J]. Discrete Math，312(1)：129-147.

HORMOZI M，RODTES K，2013. Symmetry classes of tensors associated with the semi-dihedral groups SD_{8n}[J]. Colloq Math，131(1)：59-67.

LUO G J，CAO X W，WANG D D，et al，2022. Perfect quantum state transfer on Cayley graphs over semi-dihedral groups[J]. Linear Multilinear Algebra，70(21)：6358-6374.

STEINBERG B，2011. Representation theory of finite groups：An introductory approach[M]. New York：Springer.

WANG S X，FENG T，2023. Perfect state transfer on bi-Cayley graphs over abelian groups[J]. Discrete Math，346(6)：113362.

（责任编辑　冯兆永）