第29卷 第2期 1990年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.29 No.2 1990

带差分项的函数方程的配置解法

吴兹潜 禤启沃
(计算机科学系)

摘 要

对于带差分项的函数方程给出配置解法的误差估计和算例.

关键词 函数方程，配置解

关于函数方程[1]

$$Lf(x)\equiv f(x)-\sum_{i=1}^{l}a_if(\alpha_ix+\beta_i)=h(x),\quad |x|\leqslant b \tag{1}$$

$$(|\alpha_i|<1,\ i=1,2,\cdots,l;\qquad b\geqslant\max_{(i)}(|\beta_i|/(1-|\alpha_i|))$$

已有多种数值算法[2～5]. 一般来说，这些算法各有所长，适应方程(1)不同的情况. 对于未知元 $f(x)$ 是函数而非函数向量的情况，文[5]提出的配置法具有较高的精度，但该文对于方程(1)作了诸 β_i 为零及 $h(x)=O(|x|^\mu)(x\to0)$ 的假设，本文拟取消这些假设，研究一般情况下方程(1)配置解法的收敛性.

1 引理与算法描述

关于函数方程(1)的唯一可解性与稳定性，有

引理 设 $h(x)\in C^\mu[-b,b]$，其中 μ 是适合 $Q_\mu=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^\mu|<1$ 的非负整数，则函数方程(1)在 $C^\mu[-b,b]$ 有唯一解的充要条件是

$$q_j=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\neq1,\qquad j=0,1,\cdots,\ \mu-1,$$

唯一解连续依赖于 $\max\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant\mu-1\\|x|\leqslant b}}\{|h^{(j)}(0)|,\ |h^{(\mu)}(x)|\}$.

设 Π: $-b=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 是 $[-b,b]$ 上的 N 等分均布分划，步长是 $\lambda=2b/N$. 函数方程(1)关于分划 Π 的一次样条配置解 $\hat f(x)$ 定义为 Π 上的一个一次样条函数，满足：

$$L\hat f(x)=h(x),\qquad x=x_0,x_1,\cdots,x_N \tag{2}$$

本文1988年5月20日收到

若$\varphi_j(x)(0\leqslant j\leqslant N)$为分划$\Pi$上的一次样条基函数，则配置解$\hat{f}(x)=\sum_{j=0}^{N}c_j\varphi_j(x)$，系数$c_j(0\leqslant j\leqslant N)$满足代数方程组

$$\sum_{j=0}^{N}c_jL\varphi_j(x_i)=h(x_i),\qquad i=0,1,\cdots,N$$

2 收敛性证明

定理1 记

$$\hat{f}_j=\hat{f}(x_j),\qquad \delta_N=\max_{0<j<N}|\hat{f}_{j+1}-2\hat{f}_j+\hat{f}_{j-1}|.$$

若 $h(x)\epsilon C^2[-b,b]$，$Q_1\triangleq\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i|<1$，则

$$\delta_N\leqslant M_2\lambda^2/(1-Q_1)\qquad M_2=\max_{|x|<b}|h''(x)| \tag{3}$$

证明 由配置条件(2)得

$$\hat{f}_{j+1}-2\hat{f}_j+\hat{f}_{j-1}=\sum_{i=1}^{l}a_i[\hat{f}(\alpha_ix_{j+1}+\beta_i)-2\hat{f}(\alpha_ix_j+\beta_i)+\hat{f}(\alpha_ix_{j-1}+\beta_i)]$$
$$+[h(x_{j+1})-2h(x_j)+h(x_{j-1})],\qquad 0<j<N. \tag{4}$$

对于确定的i和j，三个点$\alpha_ix_{j+1}+\beta_i$，$\alpha_ix_j+\beta_i$，$\alpha_ix_{j-1}+\beta_i$的位置分布有下述两种情况：

情况Ⅰ 三点落在分划Π上同一子区间。此时因$\hat{f}(x)$在该子区间为线性函数，故二阶差分

$$\hat{f}(\alpha_ix_{j+1}+\beta_i)-2\hat{f}(\alpha_ix_j+\beta_i)+\hat{f}(\alpha_ix_{j-1}+\beta_i)=0.$$

情况Ⅱ 三点不落在同一子区间。因$|\alpha_i|<1$，这三点必落在某两个相邻的子区间$[x_{k-1},x_k]$，$[x_k,x_{k+1}]$之中，无妨设$\alpha_i>0$及

$$x_{k-1}<\alpha_ix_{j-1}+\beta_i<\alpha_ix_j+\beta_i<x_k<\alpha_ix_{j+1}+\beta_i<x_{k+1}$$

利用$\hat{f}(x)$的分段线性性质，得

$$\hat{f}(\alpha_ix_{j+1}+\beta_i)-2\hat{f}(\alpha_ix_j+\beta_i)+\hat{f}(\alpha_ix_{j-1}+\beta_i)$$
$$=(\hat{f}_{k+1}-2\hat{f}_k+\hat{f}_{k-1})[(\alpha_ix_{j+1}+\beta_i-x_k)/\lambda].$$

因此，无论情况Ⅰ或Ⅱ，都有

$$|\hat{f}(\alpha_ix_{j+1}+\beta_i)-2\hat{f}(\alpha_ix_j+\beta_i)+\hat{f}(\alpha_ix_{j-1}+\beta_i)|$$
$$\leqslant\delta_N|\alpha_ix_{j+1}+\beta_i-x_k|\lambda^{-1}\leqslant\delta_N|\alpha_i| \tag{5}$$

此外，容易证明(4)式右端关于$h(x)$的二阶差分有估计

$$|h(x_{j+1})-2h(x_j)+h(x_{j-1})|\leqslant M_2\lambda^2 \tag{6}$$

故从(4)、(5)和(6)三式得

$$|\hat{f}_{j+1}-2\hat{f}_j+\hat{f}_{j-1}|\leqslant\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i|\delta_N+M_2\lambda^2.$$

对所得不等式两边取最大值得$\delta_N\leqslant Q_1\delta_N+M_2\lambda^2$，立知(3)式成立。证毕。

定理 2　记 $D'=\{x\mid |x|\leqslant b, x\neq x_j,\ x\neq(x_i-\beta_i)/\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant l,\ 0\leqslant j\leqslant N\}$，$s(x)$是$h(x)$关于分划$\Pi$的一次样条插值函数，$\hat{f}(x)$是函数方程(1)关于$\Pi$的一次样条配置解，若 $Q_1=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i|<1$，$h(x)\epsilon C^2[-b,b]$，则$R(x)\equiv L\hat{f}(x)-S(x)$在$D'$上的导数有估计

$$|R'(x)|\leqslant\frac{M_2\lambda Q_1}{1-Q_1},\qquad M_2=\max|h''(x)| \tag{7}$$

证明　易知对任意$x\epsilon D'$，x与$\alpha_i x+\beta_i(1\leqslant i\leqslant l)$都不是分划$\Pi$的节点$x_j(0\leqslant j\leqslant N)$。故$R(x)$在$D'$可导。设$x\epsilon(x_j,\ x_{j+1})$，$\alpha_i x+\beta_i\epsilon(x_{k_i},\ x_{k_{i+1}})$，由配置条件(2)，应用$\hat{f}(x)$的分段线性性质得

$$R'(x)=[\hat{f}(x)-\sum_{i=1}^{l}a_i\hat{f}(\alpha_i x+\beta_i)]'-[S(x_{j+1})-S(x_j)]\lambda^{-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{l}a_i[\hat{f}(\alpha_i x_{j+1}+\beta_i)-\hat{f}(\alpha_i x_j+\beta_i)-\alpha_i(\hat{f}_{k_i+1}-\hat{f}_{k_i})]\lambda^{-1} \tag{8}$$

因$\alpha_i x_{j+1}+\beta_i$与$\alpha_i x_j+\beta_i$的距离小于分划Π的步长λ，故该两点（对确定的i而言）有以下两种情况：

情况 I　两点落在分划Π的同一子区间。因$\alpha_i x+\beta_i$介于该两点之间，而$\alpha_i x+\beta_i$落在$(x_{k_i},\ x_{k_{i+1}})$，故上述两点亦必落在$[x_{k_i},\ x_{k_{i+1}}]$。但$\hat{f}(x)$在$[x_{k_i},\ x_{k_{i+1}}]$是线性函数，故(8)式右端中括号[　]的值为零。

情况 Ⅱ　两点落在Π的两个相邻子区间中，无妨设$\alpha_i>0$及

$$x_{k_{i-1}}<\alpha_i x_j+\beta_i<x_{k_i}<\alpha_i x_{j+1}+\beta_i<x_{k_{i+1}},$$

则(8)式右端中括号[　]的值是

$$\hat{f}(\alpha_i x_{j+1}+\beta_i)-\hat{f}_{k_i}+\hat{f}_{k_i}-\hat{f}(\alpha_i x_j+\beta_i)-\alpha_i(\hat{f}_{k_{i+1}}-\hat{f}_{k_i})$$

$$=(\alpha_i x_j+\beta_i-x_{k_i})(\hat{f}_{k+1}-2\hat{f}_k+\hat{f}_{k-1})\lambda^{-1}$$

故无论情况 I 或 Ⅱ，(8)式右端中括号[　]的值有估计

$$|\hat{f}(\alpha_i x_{j+1}+\beta_i)-\hat{f}(\alpha_i x_j+\beta_i)-\alpha_i(\hat{f}_{k_{i+1}}-\hat{f}_{k_i})|\leqslant|\alpha_i x_j+\beta_i-x_{k_i}|\delta_N\lambda^{-1}$$

$$\leqslant|(\alpha_i x_{j+1}+\beta_i)-(\alpha_i x_j+\beta_i)|\delta_N\lambda^{-1}\leqslant|\alpha_i|\delta_N \tag{9}$$

于是由(8)与(9)两式得

$$|R'(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i|\delta_N\lambda^{-1}=Q_1\delta_N\lambda^{-1} \tag{10}$$

由定理 1 关于δ_N的估计式(3)及上述(10)式，立知(7)式成立。证毕。

定理 3　设$\hat{f}(x)$为函数方程(1)关于分划Π上的一次样条配置解。若$Q_1=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i|<1$，$h(x)\epsilon C^2[-b,b]$，则$L\hat{f}(x)-h(x)$在$D'$的导数有估计

$$[L\hat{f}(x)-h(x)]' \leqslant \frac{1+Q_1}{2(1-Q_1)} M_2\lambda, \qquad M_2 = \max |h''(x)| \tag{11}$$

证明 设$S(x)$是$h(x)$关于分划Π的一次样条插值函数，易证在D'上有

$$|[s(x)-h(x)]'| \leqslant M_2\lambda/2 \tag{12}$$

于是由不等式

$$|[L\hat{f}(x)-h(x)]'| \leqslant |[L\hat{f}(x)-s(x)]'| + |[s(x)-h(x)]'|$$

及定理 2 的(7)式，立知(11)式成立。证毕。

定理 4 若 $\sum_{i=1}^{l} a_i \neq 1$, $Q_1 = \sum_{i=1}^{l} |a_i\alpha_i| < 1$及 $h(x) \epsilon C^2[-b,b]$，则函数方程(1) 关于分划Π的一次样条配置解$\hat{f}(x)$有误差估计

$$|\hat{f}(x)-f(x)| \leqslant \frac{(1+Q_1)M_2\lambda}{2(1-Q_1)^2}\left[\frac{\lambda}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{l}|a_i|((1-\alpha_i)b+|\beta_i|)}{|1-\sum_{i=1}^{l}a_i|}\right] \tag{13}$$

其中$f(x)$是函数方程的精确解。

证明 由引理知(1)在$C^1[-b,b]$ 有 唯一解$f(x)$。记$g(x) \equiv \hat{f}(x)-f(x)$，则$g(x)$、$g(d_i x+\beta_i) \epsilon C^1(D')$，且有

$$Lg(x) \equiv g(x) - \sum_{i=1}^{l} a_i g(\alpha_i x+\beta_i) \equiv L\hat{f}(x) - h(x) \tag{14}$$

因$f(x)\epsilon C^1[-b,b]$，而$\hat{f}(x)$是Π上的一次样条函数，故$g'(x) \equiv \hat{f}(x)' - f'(x)$在$D'$有界。记 $M_1 = \max\limits_{x\epsilon D'} |g'(x)|$。在(14)式两边求导得

$$g'(x) - \sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i g'(\alpha_i x+\beta_i) = [L\hat{f}(x)-h(x)]', \qquad x\epsilon D' \tag{15}$$

应用定理 3 得 $|g'(x)| \leqslant Q_1 M_1 + \frac{(1+Q_1)M_2\lambda}{2(1-Q_1)}, \qquad x\epsilon D'$。

两边取最大值得

$$M_1 \leqslant \frac{1+Q_1}{2(1-Q_1)^2} M_2\lambda \tag{16}$$

由(14)式及配置条件(2)得

$$g(x_j) - \sum_{i=1}^{l} a_i g(\alpha_i x_j+\beta_i) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant N \tag{17}$$

因 $\sum_{i=1}^{l} a_i \neq 1$，故(17)式可写为

$$g(x_j) = \sum_{i=1}^{l} a_i \int_{x_j}^{\alpha_i x_j+\beta_i} g'(x)\mathrm{d}x \Big/ \left(1-\sum_{i=1}^{l} a_i\right), \quad (0 \leqslant j \leqslant N) \tag{18}$$

因$g(x)$在x_j与$\alpha_i x_j+\beta_i$之间至多只有有限个点不可导，故(18)式右端的定积分是存在的。由(16)与(18)得

$$|g(x_j)|\leqslant\Big[M_1\sum_{i=1}^{l}|a_i(\alpha_i x_j+\beta_i-x_j)|\Big]\Big/\Big|1-\sum_{i=1}^{l}a_i\Big|,\qquad 0\leqslant j\leqslant N \tag{19}$$

对任意$x\in D$，设$x\in[x_k,\ x_{k+1}]$，则

$$g(x)=g(x_k)+\int_{x_k}^{x}g'(x)\mathrm{d}x. \tag{20}$$

于是由(19)、(20)得

$$|g(x)|\leqslant M_1\Big\{\frac{\lambda}{2}+\Big[\sum_{i=1}^{l}|a_i|((1-\alpha_i)b+|\beta_i|)\Big]\Big/\Big|1-\sum_{i=1}^{l}a_i\Big|\Big\} \tag{21}$$

把(16)式代入(21)式即得误差估计式(13)。证毕。

3 算 例

$$2f(x)=f((x+1)/2)+2\sin(x)$$

x	numerical N=20	solution N=40	analytic solution
-1.	-.53731419	-.53731167	-.53731135
-.8	-.34955619	-.34955594	-.34955596
-.5	-.01798970	-.01799400	-.01799440
-.1	.73559130	.73559920	.73560020
.5	1.21662710	1.21663720	1.21663850
.9	1.60618850	1.60619240	1.60619280

参 考 文 献

〔1〕Hua Loo Keng et al., *Second-order systems of partial differential equations in the plane*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985

〔2〕禤启沃等，中山大学学报（自然科学版），1982，3

〔3〕郑重建等，高等学校计算数学学报，1986，3

〔4〕吴兹潜等，中山大学学报论丛，自然科学〔13〕，1988，68～76

〔5〕董云廷，高等学校计算数学学报，1985，4

The Collocation Solution of a Class of Functional Equations with Difference Terms

*Wu Ziqian**　　*Xuan Qiwo*

Abstract

The collocation solution for the functional equation (1) is discussed, a convergence proof and a numerical example are given.

Keywords functional equation, collocation solution

*Department of Computer Science