

在水平分离器中两相流重粒子运动的轨迹的计算

郭金基
 (力学系)

摘要

本文建立水平分离器中两相流重粒子运动的非线性常微分方程组, 使用分离变量法与迭代逼近法得到常微分方程组的解和计算重粒子运动的轨迹及速度, 并给出算例进行结果分析.

一、两相流体中粒子运动的微分方程组

在水平分离器中, 气流与固体粒子混合而形成的两相流体从弯管流出, 由于容积的突然扩大, 气流减速, 粒子在气流的输送力和重力作用下, 按一定的轨迹运动而分离, 如图1所示. 本文着重讨论分离的情况, 下面分别建立输送气流的贝努里能量方程及粒子运动的微分方程组.

选取分离器入口为坐标原点, ox 为水平方向, oy 为垂直方向. 由于气流的速较低, 假设流体是不可压缩的和理想的流体; 并且是定常运动. 流经固体粒子前后两断面 (设为 1-1、2-2 断面) 流体的贝努里能量方程为:

$$p_1 + \frac{\gamma_a}{2g} U_{t_1}^2 = p_2 + \frac{\gamma_a}{2g} U_{t_2}^2 + \zeta \frac{\gamma_a}{2g} U_{t_2}^2 \quad (1)$$

式中 γ_a 为气体的重度; p_1 、 p_2 分别为 1-1、2-2 断面的静压力; ζ 为流体阻力

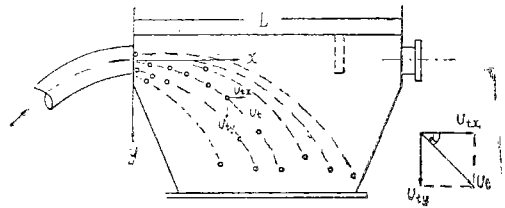


图 1

系数,它与雷诺数及固体粒子的形状有关。 U_{t1} 、 U_{t2} 分别为流体相对于固体粒子的速度,它可以分解为 x 、 y 方向两个速度,即:

$$U_t = \sqrt{U_{tx}^2 + U_{ty}^2}, \quad U_{tx} = U_{sx} - U_{ax}, \quad U_{ty} = U_{sy} - U_{ay} \quad (2)$$

其中 U_{ax} 、 U_{ay} 分别为气流在 x 、 y 向的速度分量; U_{sx} 、 U_{sy} 分别为粒子在 x 、 y 向的绝对运动的速度,在选取 xoy 坐标系下可表为:

$$U_{sx} = \frac{dx}{dt}, \quad U_{sy} = \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

式中 t 为时间。

设粒子迎风面积为 F_s ,特征尺寸为 d_s ,则粒子的体积为

$$V_s = F_s \cdot d_s \quad (4)$$

在分离过程中,假设输送气流的速度 U_a 大于粒子运动的速度 U_s ,则粒子分别受到气流的动压力、流体的阻力、静压力,同时在垂直方向还受到重力及气体的浮力的作用。根据牛顿第二定律,在水平及垂直方向粒子运动的微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= (p_{1x} - p_{2x}) F_{sx} + F_s \cdot \frac{\gamma_a}{2g} U_t^2 \cos \alpha - \zeta F_s \cdot \frac{\gamma_a}{2g} U_t^2 \cos \alpha, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= (\gamma_s - \gamma_a) F_s \cdot d_s + (p_{1y} - p_{2y}) F_{sy} + F_s \cdot \frac{\gamma_a}{2g} U_t^2 \sin \alpha - \zeta F_s \cdot \frac{\gamma_a}{2g} U_t^2 \sin \alpha \end{aligned} \right\} (5)$$

式中 m 为粒子的质量; $m = \frac{\gamma_s}{g} F_s \cdot d_s$; p_{1x} 、 p_{1y} 分别为粒子在 x 、 y 向迎风面受到的静压力; p_{2x} 、 p_{2y} 为背风面受到的静压力; α 为合成速度 U_t 与 x 向的夹角。易见,

$$\cos \alpha = U_{tx}/U_t, \quad \sin \alpha = U_{ty}/U_t \quad (6)$$

由于本文研究的粒子不大,可假定静压力 $p_{1x} \approx p_{2x}$ 、 $p_{1y} \approx p_{2y}$ 。现将(4)、(6)式代入(5)式加以简化,可得粒子运动的微分方程组为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{2d_s} \frac{\gamma_a}{\gamma_s} (1 - \zeta) U_t \cdot U_{tx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (1 - \gamma_a/\gamma_s) g + \frac{1}{2d_s} \frac{\gamma_a}{\gamma_s} (1 - \zeta) U_t \cdot U_{ty} \end{aligned} \right\} (7)$$

式中 U_t 、 U_{tx} 、 U_{ty} 如(2)式所示。

在分离过程中,粒子运动的速度(U_{sx} 、 U_{sy})常常可以大于输送气流的速度。这时不必考虑流体动压力对粒子运动的影响。在其它条件相同的情况下,只要将(7)式中的 $(1 - \zeta)$ 改为 $(-\zeta)$,该式依然可用。

方程(7)是非线性常微分方程组,欲求其通解是困难的。文〔1〕在研究微细粒子时曾作过 $\zeta U_t \approx \zeta_x U_{tx} \approx \zeta_y U_{ty}$ 的假设(其中 ζ_x 、 ζ_y 分别为 x 、 y 向流体阻力系数)。本文研究的是重粒子在水平分离器的分离,(7)式右边 γ_a/γ_s 是一个小量,如果采用这一假设产生的误差较小,实用上已足够准确,并假定 $U_{sx} > U_{ax}$ 、 $U_{sy} > U_{ay}$,则(7)式可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{2d_s} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \cdot \zeta_x \cdot \left(\frac{dx}{dt} - U_{ax}\right)^2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (1 - \gamma_a/\gamma_s)g - \frac{1}{2d_s} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \cdot \zeta_y \cdot \left(\frac{dy}{dt} - U_{ay}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

粒子运动的初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } t=0 \text{ 时, } \quad x=0, \quad y=0 \\ \frac{dx}{dt} = U_{sxo}, \quad \frac{dy}{dt} = U_{syo} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

二、粒子运动的流体阻力系数

两相流中粒子的运动受到两种阻力:一种是由流体与粒子之间的相对速度所产生的动压力而引起的;另一种是考虑流体的粘性影响由摩擦引起的。它们取决于流体绕流时,在粒子周围的流态,即在紊流时,粒子主要克服动压力引起的阻力;在层流时,粒子主要克服摩擦阻力。

从理论分析和实验可知,粒子在流体中运动的阻力系数 ζ 、 ζ_x 、 ζ_y 分别是相对应雷诺数的函数。当粒子在流体中以相对速度 U_{tx} 、 U_{ty} 运动时,雷诺数定义为:

$$Re_t = U_t \cdot d_s / \nu, \quad Re_{tx} = U_{tx} \cdot d_{sx} / \nu, \quad Re_{ty} = U_{ty} \cdot d_{sy} / \nu \quad (10)$$

式中 ν 为流体运动的粘性系数; d_{sx} 、 d_{sy} 分别为 x 、 y 向为迎流方向的特征尺寸。

文〔1〕、〔2〕给出球形粒子在输送管中以沉降速度运动时阻力系数的计算(相当于(8)式 $U_{ax} = \frac{dx}{dt} = 0$ 的情形),此时

$$\zeta_y = k / Re_{ty}^\lambda \quad (11)$$

式中 k 、 λ 与雷诺数有关,可通过实验来确定。

多数的粒子并非球形,而且阻力系数不但受粒子形状的影响;即使同一种粒子,由于它相对于气流的速度不同、迎风面积不同,阻力系数也有所变化,情况极为复杂。文〔1〕给出 $Re_t \geq 1000$ 在牛顿定律范围内,圆柱体、锥体、立方体、薄板、球等的阻力系数,以及迎风面积与特征尺寸之间的关系。

本文研究头部近似为球形与棱柱体相接的粒子,放置在均匀的流场中,迎流方向如图2所示。流经粒子前后一定距离选取1-1、2-2截面(垂直于迎流方向),用毕托管及测压管测量该截面的速度及静压力。通过测定粒子前后截面上的速度分布,可以计算其动量的变化;根据动量定理,这部分动量的改变等于粒子的阻力。当 $Re_t \geq 1000$ 时,近似地应用贝努里方程(1)式,将阻力系数 ζ 与粒子的阻力联系起来,因而通过动量法,可以确定阻力系数为:

$$\zeta_a \approx 0.5, \quad \zeta_y \approx 1, \quad \zeta \approx 0.72 \quad (12)$$

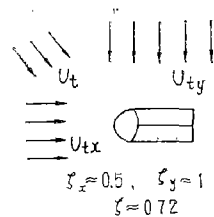


图 2

以上测量型阻的方法, 仅是近似值, 但与文〔1〕给出类似几何形状的粒子的阻力系数比较, 是很接近的。

三、重粒子的速度与运动轨迹的计算

为了解两相流中粒子运动的非线性常微分方程组(7)或(8)式, 阻力系数在 $Re_l \geq 1000$ 条件下取为常数. 在水平分离器中, 通常气流速度较低, 且很平稳, 因而可假定速度 U_{ax} 、 U_{ay} 为常量.

1. 近似分析解

先讨论在 $U_{sx} > U_{ax}$ 、 $U_{sy} > U_{ay}$ 条件下, 重粒子分离的情形, 采用 $\zeta U_i \approx \zeta_x U_{ix} \approx \zeta_y U_{iy}$ 的假设, 从(8)式出发, 寻求近似分析解.

$$\text{设 } C_x = -\frac{1}{2d_s} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \cdot \zeta_x, \quad C_y = \frac{1}{2d_s} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \cdot \zeta_y \quad (13)$$

代入(8)式, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= C_x \left(\frac{dx}{dt} - U_{ax} \right)^2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= (1 - \gamma_a/\gamma_s)g - C_y \left(\frac{dy}{dt} - U_{ay} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

注意到 U_{ax} 、 U_{ay} 为常量及(2)、(3)式, 采用分离变数法^[5]求解(14)式, 并利用初始条件(9), 可得:

$$U_{sx} = \frac{dx}{dt} = U_{ax} + \frac{U_{tx_0}}{1 - C_x \cdot U_{tx_0} \cdot t} \quad (15)$$

$$U_{sy} = \frac{dy}{dt} = \frac{E_1(\sqrt{D_g} + \sqrt{C_y} U_{ay})e^{2\sqrt{C_y} D_g t} - (\sqrt{D_g} - \sqrt{C_y} U_{ay})}{\sqrt{C_y}(1 + E_1 e^{2\sqrt{C_y} D_g t})} \quad (16)$$

$$\text{式中 } D_g = (1 - \gamma_a/\gamma_s)g, \quad E_1 = \frac{\sqrt{D_g} + \sqrt{C_y} \cdot U_{ty_0}}{\sqrt{D_g} - \sqrt{C_y} \cdot U_{ty_0}} \quad (17)$$

$$U_{tx_0} = U_{sx_0} - U_{ax_0}, \quad U_{ty_0} = U_{sy_0} - U_{ay_0}$$

再次应用分离变数法, 并用初始条件(9), 可得:

$$x = U_{ax} \cdot t - \frac{1}{C_x} \cdot \ln(1 - C_x U_{tx_0} \cdot t) \quad (18)$$

$$y = U_{ay} t - \sqrt{D_g/C_y} \cdot t + \frac{1}{C_y} \ln(1 + E_1 \cdot e^{2\sqrt{C_y} D_g t}) - \frac{1}{C_y} \ln(1 + E_1) \quad (19)$$

2. 迭代逼近解

运用文〔4〕提出逐级迭代法寻求逼近解. 从方程组(7)出发, 不需引用 $\zeta \cdot U_i \approx \zeta_x \cdot U_{ix} \approx \zeta_y \cdot U_{iy}$ 的假设. 把(9)式的初始条件 U_{tx_0} 、 U_{ty_0} 作为零级逼近解, 代入方程组(7)式右边, 把非线性方程线性化, 经过积分可得一级逼近解, 然后再代入方程

(7) 式右边, 修正非线性项, 并利用初始条件(9)式, 可得二级逼近解。这样, 经过多级迭代修正非线性项后, 逼近方程组(7)的精确解。

以下写出 k 级迭代解应满足的方程及初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_{sx}^{(k)}}{dt} &= D_x \cdot U_t^{(k-1)} \cdot (U_{sx}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \\ \frac{dU_{sy}^{(k)}}{dt} &= D_g + D_y U_t^{(k-1)} \cdot (U_{sy}^{(k-1)} - U_{ay_0}) \end{aligned} \right\} (7')$$

式中 $D_x = \frac{1}{2ds} \cdot \frac{\gamma_a}{\gamma_s} \cdot (1 - \zeta) = D_y$, $U_{sx}^{(k-1)}$, $U_{sy}^{(k-1)}$, $U_t^{(k-1)}$ 为 $k-1$ 级迭代逼近解。

当 $t=0$ 时, $U_{sx} = U_{sx_0}$, $U_{sy} = U_{sy_0}$

为了求解(7')式, 把时间 $[0, t_n]$, 分成 N 个小区间。每个小区间 k 级迭代应满足的方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_{sx_n}^{(k)}}{dt} &= D_x \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sx_n}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \\ \frac{dU_{sy_n}^{(k)}}{dt} &= D_g + D_y \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sy_n}^{(k-1)} - U_{ay_0}) \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ n = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix} (20)$$

式中 $U_{sx_n}^{(k-1)}$, $U_{sy_n}^{(k-1)}$ 为 $k-1$ 级迭代在 $t=t_n$ 点的速度值。

当 $t=t_{n-1}$ 时, $U_{sx_n}^{(k)}(t_{n-1}) = U_{sx_{n-1}}^{(k)}(t_{n-1})$, $U_{sy_n}^{(k)}(t_{n-1}) = U_{sy_{n-1}}^{(k)}(t_{n-1})$

在起始点必须满足初始条件(10)式, 两相邻的小区间必须满足速度连续条件。

利用初始参数法很易求出每个小区间的分析解为:

$$\left. \begin{aligned} U_{sx_n}^{(k)}(t) &= U_{sx_n}^{(k)}(t_{n-1}) + D_x \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sx_n}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \cdot (t - t_{n-1}) \\ U_{sy_n}^{(k)}(t) &= U_{sy_n}^{(k)}(t_{n-1}) + [D_g + D_y \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sy_n}^{(k-1)} - U_{ay_0})] \cdot (t - t_{n-1}) \end{aligned} \right\} (21)$$

式中 $U_{sx_n}^{(k)}(t_{n-1})$, $U_{sy_n}^{(k)}(t_{n-1})$ 实质上为第 n 个小区间的起始参数。

再用速度连续条件可得区间上的点(分点)的速度值:

$$\left. \begin{aligned} U_{sx_n}^{(k)} &= U_{sx_{n-1}}^{(k)} + D_x \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sx_n}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \cdot \Delta t_n \\ U_{sy_n}^{(k)} &= U_{sy_{n-1}}^{(k)} + [D_g + D_y \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sy_n}^{(k-1)} - U_{ay_0})] \cdot \Delta t_n \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots, N) (22)$$

式中 $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$; $U_{sx_n}^{(k)}$, $U_{sy_n}^{(k)}$ 表示(21)式中用 $t=t_n$ 代入而得的速度值。

求出 k 级迭代相应的分点速度值之后, 再代入方程(7)式, 可计算相对应的小区间的轨迹:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_n^{(k)}}{dt} &= U_{sx_{n-1}}^{(k)} + D_x \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sx_n}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \cdot (t - t_{n-1}) \\ \frac{dy_n^{(k)}}{dt} &= U_{sy_{n-1}}^{(k)} + [D_g + D_y U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sy_n}^{(k-1)} - U_{ay_0})] \cdot (t - t_{n-1}) \end{aligned} \right\} (23)$$

式中 $n = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, m$; $t_{n-1} \leq t \leq t_n$.

当 $t = t_{n-1}$ 时, $x_n^{(k)}(t_{n-1}) = x_{n-1}^{(k)}(t_{n-1})$, $y_n^{(k)}(t_{n-1}) = y_{n-1}^{(k)}(t_{n-1})$

同样, 在起始点必须满足初始条件(9)式, 每一区间上的点(分点)要求满足位移的连续条件.

应用初始参数法, 可以求出小区间内的分析解. 再利用相邻小区间分点上的连续条件, 可得该分点上的轨迹坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x_n^{(k)} &= x_{n-1}^{(k)} + U_{sx_{n-1}}^{(k)} \cdot \Delta t_n + \frac{1}{2} D_x \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sx_n}^{(k-1)} - U_{ax_0}) \cdot (\Delta t_n)^2 \\ y_n^{(k)} &= y_{n-1}^{(k)} + U_{sy_{n-1}}^{(k)} \cdot \Delta t_n + \frac{1}{2} [D_g + D_y \cdot U_{t_n}^{(k-1)} \cdot (U_{sy_n}^{(k-1)} - U_{ay_0})] (\Delta t_n)^2 \end{aligned} \right\} (24)$$

式中 $n = 1, 2, \dots, N$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

以上讨论适用于 $U_{ax} > U_{sx}$, $U_{ay} > U_{sy}$ 条件下重粒子的分离; 若讨论相反的条件,

只要将(24)式中 D_x 、 D_y 的值用 $-\frac{1}{2} \zeta \frac{\gamma_a}{\gamma_s}$ 代替, 全部公式依然适用.

3. 关于迭代逼近解的收敛性

设定 $\mathcal{D} \{ \gamma_a, \gamma_s, \zeta, U_{ax_0}, U_{ay_0} \} \in R^n$; $U_{ax_0} > 0, U_{ay_0} > 0, 0 < \gamma_a < \gamma_{a0}, 0 < \gamma_s < \gamma_{s0}, 0 < \zeta < \zeta_0$ 为 R^n 空间的集, 从方程(7')式经过积分运算后, 可写成显式泛函方程:

$$\left. \begin{aligned} U_{sx} &= F(t, U_{sx}, U_{sy}, U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta) \\ U_{sy} &= G(t, U_{sx}, U_{sy}, U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta) \end{aligned} \right\} (25)$$

其中 $t > 0, U_{sx} > 0, U_{sy} > 0; t, U_{sx}, U_{sy} \in R^n, F, G \in R^n, \forall U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta \in \mathcal{D} \subset R^n$

由泛函方程(25)构成迭代序列:

$$\left. \begin{aligned} U_{sx}^{(k+1)} &= F(t, U_{sx}^{(k)}, U_{sy}^{(k)}, U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta) \\ U_{sy}^{(k+1)} &= G(t, U_{sx}^{(k)}, U_{sy}^{(k)}, U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta) \end{aligned} \right\} (25')$$

由物理参数控制, 对于区域 $\mathcal{D}_0 \{ t, U_{sx}^{(k)}, U_{sy}^{(k)} \} \in R^n$ 任意给出试向量, 只要满足收缩运算的条件^[5]:

$$\left\{ (t - t_{n-1})^2 + [F(t, U_{sx}^{(k)}, U_{sy}^{(k)}, \dots) - F(t_{n-1}, U_{sx}^{(k-1)}, U_{sy}^{(k-1)}, \dots)]^2 + [G(t, U_{sx}^{(k)}, U_{sy}^{(k)}, \dots) - G(t_{n-1}, U_{sx}^{(k-1)}, U_{sy}^{(k-1)}, \dots)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \theta [(t - t_{n-1})^2 + (U_{sx}^{(k)} - U_{sx}^{(k-1)})^2 + (U_{sy}^{(k)} - U_{sy}^{(k-1)})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

其中要求 $0 < \theta < 1$, $U_{sx}^{(k+1)}, U_{sy}^{(k+1)} \in R^n$, $F, G \in R^n$, $\forall U_{ax_0}, U_{ay_0}, \gamma_a, \gamma_s, \zeta \in \mathcal{D} \subset R^n$, 可以证明: 迭代序列 (25') 式是收敛的, 并收缩到唯一的不动点 (U_{sx}^*, U_{sy}^*) .

若用逐级迭代的解析表达式代入 (26) 式, 验证收缩运算的条件, 过于繁杂. 本文用逐级迭代每一小区间分点的速度值代替 (25') 式的函数值, 化为数值运算, 验证迭代逼近解的收缩运算条件, 即:

$$\begin{aligned} & [(\Delta t_n)^2 + (U_{sx_n}^{(k+1)} - U_{sx_{n-1}}^{(k)})^2 + (U_{sy_n}^{(k+1)} - U_{sy_{n-1}}^{(k)})^2]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 9 [(\Delta t_n)^2 + (U_{sx_n}^{(k)} - U_{sx_{n-1}}^{(k-1)})^2 + (U_{sy_n}^{(k)} - U_{sy_{n-1}}^{(k-1)})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (27) \end{aligned}$$

实践表明: 凡满足上述条件, 迭代序列是收敛的; 计算结果可靠.

4. Runge - Kutta 解法

为了说明迭代逼近解的可靠性, 本文还按照文^[6]介绍等步长 Runge-Kutta 法求解方程组 (7) 式. 限于篇幅, 计算过程从略, 结果将列于后面的例题中.

四、结果的分析与应用

例. ¹⁾ 气力输送吸石机采用水平分离器, 把石粒从两相流中分离. 假设石粒形状如图 2 所示, 阻力系数按 (12) 式计算, 石粒重度 $\gamma_s = 2.7 \text{ g/cm}^3$, 空气重度 $\gamma_a = 1.203 \text{ kg/m}^3$, 石粒初速度 $U_{sx_0} = 14.09 \text{ 米/秒}$, $U_{sy_0} = 0$; 输送气流速度 $U_{ax} = U_{ay} = 0.7 \text{ 米/秒}$, 石粒特征尺寸 $d_s = 10 \text{ mm}$, 试计算石粒运动的速度及轨迹.

计算过程如下:

依据给出的数据, 分别代入 (2), (17) 及 (13) 式, 依次可得 $U_{tx_0} = 13.39$, $U_{ty_0} = -0.7$, $U_t = 13.3983$; $D_g = 9.796$, $E_1 = 0.93539$; $C_x = -0.011139$, $C_y = 0.022277$; $D_x = D_y = -0.01604$ (以上均化为无量纲量).

将以上各值代入 (15) ~ (19) 式, 可得近似分析解的速度及轨迹坐标表达式:

$$\begin{aligned} U_{sx} &= 0.7 + 13.39 / (1 + 0.14915 t) \\ U_{sy} &= 0.7 + 20.9699 [(0.93539 e^{0.93429 t} - 1) / (0.93539 e^{0.93429 t} + 1)] \\ x &= 0.7 t + 89.775 \ln(1 + 0.14915 t) \\ y &= -20.2699 t + 44.8893 \cdot \ln(1 + 0.93539 e^{0.93429 t}) - 29.6408 \end{aligned}$$

将以上各值代入 (22)、(24) 式, 可得迭代逼近解的表达式:

$$\begin{aligned} U_{sx_n}^{(k)} &= U_{sx_{n-1}}^{(k)} - 0.01604 U_{t_n}^{(k-1)} (U_{sx_n}^{(k-1)} - 0.7) \Delta t_n \\ U_{sy_n}^{(k)} &= U_{sy_{n-1}}^{(k)} + [9.796 - 0.01604 U_{t_n}^{(k-1)} (U_{sy_n}^{(k-1)} - 0.7) \Delta t_n] \\ x_n^{(k)} &= x_{n-1}^{(k)} + U_{sx_{n-1}}^{(k)} \Delta t_n - 8.02 \times 10^{-2} U_{t_n}^{(k-1)} (U_{sx_n}^{(k-1)} - 0.7) (\Delta t_n)^2 \end{aligned}$$

1) 广东省建筑构件工程公司谢梓英提供实用数据, 并将结果应用于 QL-A 气力输送吸石机上.

$$y_n^{(k)} = y_{s y_{n-1}}^{(k)} + U_{s y_{n-1}}^{(k)} \Delta t_n + \frac{1}{2} [9.796 - 0.01604 U_{t_n}^{(k-1)} (U_{s y_n}^{(k-1)} - 0.7)] (\Delta t_n)^2$$

式中 $n=1, 2, \dots, N$; $k=1, 2, \dots, m$; $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

在 Runge-Kutta 法的计算中, 步长 $h=0.02$ (秒), (算式从略)。

按照以上算式计算所得的石粒运动的速度及轨迹的坐标, 分别见表 1 及表 2。

表 1 石粒 ($d_s = 10\text{mm}$) 运动速度与时间 t 的关系

算 法	t (秒) u (米/秒)	0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
		迭代逼近	u_{x_1}	14.09	14.0612	14.0324	13.9748	13.9172	13.8596
u_{y_1}	0		0.0995	0.19897	0.3979	0.59683	0.79576	0.99469	1.1936
u_{x_2}	14.09		14.0613	14.0328	13.9762	13.9202	13.8646	13.8095	13.7549
近 解	u_{y_2}	0	0.09925	0.19828	0.39549	0.59185	0.78737	0.98204	1.17589
	u_{x_3}	14.09	14.0613	14.0328	13.9762	13.9201	13.8646	13.8094	13.7517
	u_{y_3}	0	0.09925	0.19828	0.39550	0.59188	0.78743	0.98216	1.17609
近似分析解	u_x	14.09	14.07	14.0502	14.0106	13.9712	13.9321	13.8932	13.8546
	u_y	0	0.098	0.1961	0.3917	0.5878	0.7832	0.9788	1.1755
Runge-Kutta法	u_x	14.09	—	14.0328	13.9761	13.9198	13.8640	13.8086	13.7536
	u_y	0	—	0.19849	0.39613	0.59293	0.78889	0.98402	1.17834

表 2 石粒 ($d_s = 10\text{mm}$) 运动轨迹坐标与时间 t 的关系

算 法	x, y (米)	t (秒)							
		0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
迭代逼近解 (3级)	x	0	0.14076	0.28123	0.56130	0.84026	1.1181	1.3948	1.6705
	y	0	4.973×10^{-4}	1.988×10^{-3}	7.935×10^{-3}	1.782×10^{-2}	3.1618×10^{-2}	4.932×10^{-2}	7.091×10^{-2}
近似分析解	x	0	0.1408	0.2814	0.5620	0.8418	1.121	1.399	1.677
	y	0	4.998×10^{-4}	1.996×10^{-4}	7.777×10^{-3}	1.75×10^{-2}	3.121×10^{-2}	4.877×10^{-2}	7.027×10^{-2}

从表 1 容易验证, 迭代逼近解完全符合收缩运算的条件 (27) 式; 并且 $\max |u_{x_2} - u_{x_1}| \leq 8.91 \times 10^{-2}$, $\max |u_{x_2} - u_{x_1}| \leq 2 \times 10^{-4}$, 收敛是快速的。二级迭代解与 Runge-Kutta 法解的结果最大误差小于 2.25×10^{-3} , 本例题迭代逼近解的计算精度不低于 Runge-Kutta 法, 计算量也小于 Runge-Kutta 法。二级近似解与近似分析解的最大误差小于 9.97×10^{-2} , 在重粒子情况下, 结果很接近。但随着粒子重度 γ_s 的减小, 近似分析解的结果误差较大; 迭代逼近解依然适用, 它为非线性常微分方程组 (7) 提供了新的解法, 发展了文 [4] 的迭代逼近解法。

通过两相流粒子在水平分离器分离的一系列算例表明,影响粒子运动速度和轨迹的主要因素有:(1)阻力系数 ζ 的增大使粒子运动的速度明显地减小,如图3合成树脂(重度 $\gamma_s=0.907$) U_{sx} 与时间 t 的关系曲线可以看出。(2)随着粒子重度 γ_s 及特征尺寸 d_s 的减小,运动距离 x 明显地增大,对分离是不利的。为防止粒子飞越分离器而进入下一个装置,需在适当位置加一挡板(见图1虚线)。(3)粒子的初速 U_{sx_0} 、 U_{sy_0} 对分离影响较大,提高 U_{sy_0} ,减小 U_{sx_0} 可提高分离效率。

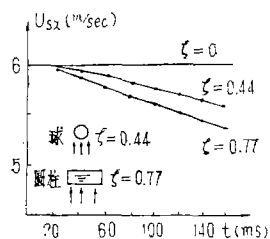


图 3

本文研究的成果可应用于粮食仓库、化工成品或半成品的水平分离器及气力输送吸石机的水平分离器的设计计算。文中所导出的方程及计算公式,亦可指导近海工程人造渔礁的投放,具有较大的实用意义。

参 考 文 献

- [1] 北京钢铁学院水力学教研室编译,气力输送装置,人民交通出版社,1974年版。
- [2] (日)狩野武著,粒状物料输送装置。
- [3] B.B 史捷班诺夫,常微分方程教程,卜元震译,高教出版社,1956年版。
- [4] 郭金基,中山大学学报(自然科学版),1979,2。
- [5] Joel Franklin; Methods of Mathematical Economics, Linear and Nonlinear Programming Fixed-point Theorems.
- [6] (法)安德烈·安戈著,电工电信工程师数学,谢洋麟等译,人民邮电出版社,1979年版。

The Computation of the Movement Orbit of Heavier Pellets for Two-phase Flow in a Horizontal Separator

Guo Jinji

Abstract

We set up the nonlinear ordinary differential equations (ODEs) of the heavier pellets for two-phase flow in a horizontal separator. The solutions of the ODEs are obtained and the movement orbit and velocity of pellets are calculated using separating variable and iterative approach method. According to experiment data we could determine the coefficients of the resistance of the flowing pellets. This paper also discusses convergent problem of the iterative approach solutions. Results analysis and numerical examples are illustrated.