

混合型微分方程

吴 兹 潜

过去人們研究过常系数的, 典則的混合型方程, 如拉符倫捷夫方程

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{Sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{Sgn} y = \begin{cases} -1 & \text{当 } y < 0 \\ 0 & \text{当 } y = 0 \\ 1 & \text{当 } y > 0 \end{cases}$$

的某些定解問題; 人們还研究过只含一个自变数系数的混合型方程, 如特里谷米方程和察普雷金方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$$K(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

$$K(0)=0, \quad K'(y)>0, \quad K(-y)=-K(y)$$

的某些定解問題

1955年, 丁夏畦在‘数学学报’上發表了一篇名为‘混合型微分方程’的文章, 他用复变函数的方法, 証明了方程

$$\operatorname{Sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{Sgn} x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

的特里谷米問題的解是唯一存在的, 在这篇論文中还討論了方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

的特里谷米問題, 但丁夏畦并没有解决方程(5)在橢圓域的定解問題。

本文目的在于研究方程(5)的二域的特里谷米問題; 且以积分方程的方法解决方程(4)的特里谷米問題; 最后解决了丁夏畦所沒有解决的方程(5)的多域特里谷米問題。

本文分两部分: 第一部分証明方程(5)的二域的特里谷米問題; 第二部分証明方程(4), (5)的多域特里谷米問題。

第一部分：二域問題

在這一部分里，我們要討論方程(5)的二域的特里谷米問題，亦即限制方程(5)中的 $x \geq 0$ 。

§ 1. 定义特里谷米問題：在未定义特里谷米問題前，先定义方程(5)的混合域，在 x 軸上取兩點 $A(0,0)$, $B(1,0)$ ，過這兩點在方程(5)的雙曲域部分作特征綫 $L_1: x^{\frac{3}{2}} - (-y)^{\frac{3}{2}} = 0$ 和 $L_2: \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + (-y)^{\frac{3}{2}}) = 1$ 交於點 C ，以 A 和 B 為端點，作一全在第一象限內的約當弧 σ ，這樣便定义了一個由弧 σ 和特征綫 L_1 和 L_2 所圍成的混合域 D ，且稱域 D 屬於第一象限的部分為橢圓域 D_1 ，稱屬於第四象限的部分為雙曲域 D_2 ，稱綫段 AB 為蛻型綫。

所謂的方程(5)的特里谷米問題，是要求一全在域 D 上的函數 $u(x,y)$ ，使它滿足如下性質：

1. 使函數 $u(x,y)$ 在域 D 內除坐標軸上的點外，處處滿足方程(5)；
2. 函數 $u(x,y)$ 的一導偏導數在閉域 D 上除點 A, B 可能變為低於一級無窮大量外，在其餘點上均為連續；
3. 函數 $u(x,y)$ 在邊界上滿足條件

$$\begin{cases} u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(s) \\ u(x,y)|_{L_1} = \psi(x) \end{cases} \quad (6)$$

其中， φ 和 ψ 都是連續可微函數。

§ 2. 極值原理，唯一性定理：丁夏畦在他的論文中，通過解決一系列定解問題後，在蛻型綫上建立了 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的函數關係式，這就是論文[4]中的式(32)：

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{1}{2} B^{-1} \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right) \int_0^1 \psi \left(4^{-\frac{1}{8}} tx \right) (1-t)^{\frac{1}{6}} dt + 4^{-\frac{1}{8}} B^{-1} \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right) x \\ & \int_0^1 \psi' \left(4^{-\frac{1}{8}} tx \right) (1-t)^{-\frac{1}{6}} t dt + r_1^{-1} r_2 B^{-1} \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right) x \int_0^1 v(x(1-\omega)^{\frac{1}{8}}) \\ & (1-\omega)^{-\frac{1}{8}} \omega^{-\frac{1}{8}} d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{其中， } u(x) = u(x,0), \quad v(x) = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad r_1 = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad r_2 = 4^{-\frac{1}{8}} \frac{\Gamma^2(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{5}{3})},$$

$$r_3 = 4^{-\frac{1}{8}} r_2$$

為便利起見，可將式(7)改寫為

$$\tau(x) = \psi_1(x) + rx \int_0^1 v(x(1-\omega)^{\frac{1}{3}}) (1-\omega)^{-\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}} d\omega \quad (8)$$

其中, $r=r_1^{-1}r, B^{-1}(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$, ψ_1 表式(7)右端的第一项和第三项之和。

通过一个简单的变换, 可将式(8) 写为

$$\tau(x) = \psi_1(x) + 3r \int_0^x \frac{v(t)tdt}{|x^3-t^3|^{1/3}} \quad (9)$$

若 $\psi=0$, 则 $\psi_1=0$, 故当 $\psi=0$ 时, 式(9) 可写为

$$\tau(x) = 3r \int_0^x \frac{v(t)tdt}{|x^3-t^3|^{1/3}} \quad (10)$$

由阿培尔积分反演公式, 从式(10), 有

$$v(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi x} r^{-1} \frac{d}{dx} \int_0^x \tau(t)t^2(t^3-x^3)^{-2/3} dt \quad (11)$$

现在让我们来考虑特里谷米问题的极值原理, 若特里谷米问题的解 $u(x,y)$ 在特征线 L_1 上为零, 则方程(5)的解在闭域 $\bar{D}_1$ 上的正的极大值和负的极小值只能在 σ 上达到, 事实上, 在域 D_1 内函数 $u(x,y)$ 显然不能达到极值, 设在域 $\bar{D}_1$ 上正的极大值在区间 $0 < x < 1$ 中的点 $P(\xi, 0)$ 达到, 在点 ξ 必然有

$$\tau'(\xi) = 0 \quad 0 < \xi < 1 \quad (12)$$

由等式(12), 式(11)在点 ξ 成为 (当 $0 < x_j < \xi$ 时),

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r}{\sqrt{3}} v(\xi^{1/3}) \xi^{1/3} &= \left[\frac{2}{3} \int_0^{\xi} \frac{\tau(\xi^{1/3}) - \tau(t^{1/3})}{(\xi-t)^{5/3}} dt + \frac{2}{3} \int_{x_0}^{\xi} \frac{\tau(\xi^{1/3}) - \tau(t^{1/3})}{(\xi-t)^{5/3}} dt \right. \\ &\quad \left. + \tau(\xi^{1/3}) \xi^{-2/3} \right] \end{aligned}$$

由于 $\tau'(\xi) = 0$, $\tau(\xi) - \tau(t) \geq 0$, 即得

$$v(\xi) > 0 \quad (13)$$

显然, 这与李希登斯坦因所证明的一般椭圆型方程的查伦巴定理的推广相矛盾, 故极值原理得证。

由这一极值原理容易得知, 方程(5)的特里谷米问题解决是唯一的, 事实上, 若特里谷米问题有两个解 u_1 和 u_2 , 则 $u_1 - u_2$ 是边界条件为零的齐次问题, 则 $u_1 - u_2$ 的正的极大值和负的极小值在 σ 上达到, 且为零。故在整个混合域上 $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$ 。

由这一极值原理, 不仅可以直接导出解的唯一性, 且可用来证明更普遍的情况下解的存在性, 亦即不要求解的偏导数一直连续到混合域 D 的边界上, 而只要求解本身连续到边界, 以及一阶偏导数在域内连续, 便可用类似于施瓦兹交替法来证明特里谷米问题的解是存在的 (附带说明, 这一极值原理对于第二部分仍然适用)。

§3. 存在定理: 直接驗證得知函数 $|\zeta - x^3|^{-1/3}$, $\zeta = \xi^3 - \eta^3 + 2i\xi^{3/2}\eta^{3/2}$, $\zeta \neq x^3$, 在域 $\eta \geq 0$, $\eta \geq 0$ 是方程(5)的解。

記函数 $G(x; \xi, \eta) = |\zeta - x^3|^{-1/3} + g$ 是方程(5)在域 D_1 上的解折解, 且滿足

$$\begin{aligned} g &= -|\zeta - x^3|^{-1/3} & \xi \in \sigma \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

在域 D_1 中用一小的解折曲綫來除掉点 $(x, 0)$, 而剩下部分应用格林公式

$$\int \eta \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} - G \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) d\eta - \int \xi \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi = 0 \quad (15)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对于所确定的定义域, 由公式(15)可写为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) \xi G v(\xi) d\xi + \int_{\sigma} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\sigma_{\varepsilon}: |\zeta - x^3| = \varepsilon$

由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon} = \frac{1}{r^*} \Gamma(x) \quad (17)$$

其中, $\frac{1}{r^*}$ 是一固定的常数。即得

$$\Gamma(x) + r^* \int_0^1 G(x; \xi, 0) \xi v(\xi) d\xi = F^*(x) \quad (18)$$

其中, $F^*(x) = r^* \int_{\sigma} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma$

特別当 σ 是解析曲綫 $\sigma_0 = |\zeta - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $G(x; \xi, \eta)$ 可写为

$$G(x; \xi, \eta) = |\zeta - x^3|^{-1/3} - |\zeta + x^3 - 2\xi x^3|^{-1/3}$$

这时式(18)可写为

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{v(\xi) \xi d\xi}{|x^3 - \xi^3|^{1/3}} + r^{**} \int_0^1 \left(\frac{1}{|\xi^3 - x^3|^{1/3}} - \frac{1}{(\xi^3 + x^3 - 2x^3 \xi^3)^{1/3}} \right) \\ v(\xi) \xi d\xi = \varphi_1^*(x) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $r^{**} = r^*/3r$, $\varphi_1^*(x) = (F^*(x) - \psi_1(x))/3r$

应用阿培尔积分反演公式, 式(19)可写为

$$\begin{aligned} \Phi(x^{1/3}) + \frac{\sqrt{3} r^{**}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \left(\int_0^x \frac{d\xi}{|\xi - \eta|^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} \right. \\ \left. - \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi + \eta - 2\xi\eta)^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} \right) = F(x^{1/3}) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\Phi(x^{1/3}) = v(x^{1/3})x^{1/3}$ $F(x^{1/3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi_1^*(\eta^{1/3}) d\eta}{(x - \eta)^{2/3}}$

作积分变换 $\frac{x - \xi}{\xi - \alpha} = z^3$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{2\eta - 1}{\eta}$ 则式(20)左端第二积分式子化为

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3} r^{**}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi + \eta - 2\xi\eta)^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} = \\ -\frac{\sqrt{3} r^{**}}{2\pi} \int_0^1 \frac{\Phi(\eta^{1/3}) d\eta}{(2\eta - 1)^{1/3}} \int_0^1 \frac{(x(2\eta - 1))^{1/3}}{\eta} \frac{3dz}{1 + z^3} = \\ -\frac{\sqrt{3} r^{**}}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\eta}{x}\right)^{2/3} \frac{\Phi(\eta^{1/3}) d\eta}{\eta + x - 2\eta\eta} \end{aligned}$$

现在又考虑第一个积分

$$\begin{aligned} I_1(x) = \int_0^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{|\xi - \eta|^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} = \int_0^x \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \\ \left(\int_0^\eta \frac{d\xi}{(\eta - \xi)^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} + \int_\eta^x \frac{d\xi}{|\xi - \eta|^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} \right) \\ + \int_x^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \int_0^x \frac{d\xi}{(\eta - \xi)^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} \end{aligned}$$

作积分变量的变换 $\xi = (x - \eta)z + \eta$ 易得

$$\int_\eta^x \frac{d\xi}{(\xi - \eta)^{1/3} (x - \xi)^{2/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

另方面作变换 $z^3 = \frac{x - \xi}{\eta - \xi}$ 后又有

$$\int_0^{\eta} \frac{d\xi}{(\eta-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = -3 \int_{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1/3}}^{\infty} \frac{dz}{1-z^3}$$

$$\int_0^x \frac{d\xi}{(\eta-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = -3 \int_{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1/3}}^0 \frac{dz}{1-z^3} = -3 \int_{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1/3}}^{\infty} \frac{dz}{1-z^3}$$

$$+ 3 \int_0^{\infty} \frac{dz}{1-z^3} = -3 \int_{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1/3}}^{\infty} \frac{dz}{1-z^3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (x < \eta)$$

即有

$$I_1(x) = -3 \int_0^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \int_{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1/3}}^{\infty} \frac{dz}{1-z^3} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^x \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \\ + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_x^1 \Phi(\eta^{1/3}) d\eta$$

設 x 位於 $0 < x < 1$ 內, 易証

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Phi(x^{1/3}) + \int_0^1 \left(\frac{\eta}{x}\right)^{2/3} \frac{\Phi(\eta^{1/3}) d\eta}{\eta - x} \quad (22)$$

由(21), (22)得知方程(20)可化為

$$\Phi(x^{1/3}) + \frac{r^{**}}{\sqrt{3}\pi(2+r^{**})} \int_0^1 \left(\frac{\eta}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{\eta-x} - \frac{1}{\eta+x-2\eta x}\right) \\ \Phi(\eta^{1/3}) d\eta = F_1(x^{1/3}) \quad 0 < x < 1 \quad (23)$$

其中, $F_1(x^{1/3}) = \frac{2}{2+r^{**}} F(x^{1/3})$

可以証得, 當 $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ 時 $F_1(x^{1/3})$ 有界, 且在 $0 < x < 1$ 上滿足赫德爾條件,

故有

$$\Phi(x^{1/3}) = \frac{1}{1+\pi^2\lambda^2} \left[F_1(x^{1/3}) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{t(1-x)}{x(1-t)} \right]^{2\theta} \right. \\ \left. K(x,t) F_1(t^{1/3}) dt \right]^{[2]} \quad (24)$$

其中 $\lambda = -\frac{r^{**}}{\sqrt{3}\pi(2+r^{**})}$ $K(x,t) = \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2\eta t}\right)$

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \arctg \lambda \pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctg \lambda \pi < \frac{\pi}{2}\right)$$

或写为

$$v(x) = \frac{1}{1 + \pi^2 \lambda^2} \left[F_1(x) + 3\lambda \int_0^1 \left[\frac{t^2(1-x^3)}{x(1-t^3)} \right]^{2\theta} K(x^3, t^3) F_1(t) t^2 dt \right] \quad (25)$$

有了 $v(x)$ 的解后, 要求特里谷米问题的解并不困难, 这只需要在域 D_1 上解狄雷克雷问题, 而在域 D_2 上, 则在綫段 AB 上解哥西问题, 便可得到特里谷米问题的解

现在回到方程(18), 考虑一般问题, 可把方程(18)改写为

$$\begin{aligned} v(x) + r^* \int_0^1 \left[\frac{1}{|x^3 - \xi^3|^{1/3}} - \frac{1}{|x^3 + \xi^3 - 2r^3 \xi^3|^{1/3}} \right] v(\xi) \xi d\xi = F^*(x) \\ - r^* \int_0^1 g(x; \xi, 0) + \frac{1}{|x^3 + \xi^3 - 2r^3 \xi^3|^{1/3}} v(\xi) \xi d\xi \end{aligned} \quad (18')$$

由(18')和式(9)消去 $v(x)$, 即得等价于特里谷米问题的方程

$$\begin{aligned} \Phi(x^{1/3}) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{\eta}{x} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{\eta - x} - \frac{1}{\eta + x - 2\eta x} \right) \Phi(\eta^{1/3}) d\eta = F_1(x^{1/3}) \\ - \int_0^1 K_1(x^{1/3}, \eta^{1/3}) \Phi(\eta^{1/3}) d\eta \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $K_1(x^{1/3}, \eta^{1/3})$ 可用 $g(x^{1/3}, \eta^{1/3}, 0)$ 表之

設 σ 之两端与解析曲线 σ_0 的两段小弧 AA' 和 BB' 相切, 则函数 $K_1(x^{1/3}, \eta^{1/3})$ 本来在 $0 < x < 1$ 中解折, 现在在 $x=0$, $x=1$ 处也没有奇异性, 或者是很低阶的奇异性, 在这条件下, 要解式(26)只須把它的右端当为已知函数, 利用反演公式(24), 就可以把它们化为关于 $\Phi(t)$ 的弗里德和蒙型的第二类积分方程, 其可解性由特里谷米问题的解的唯一性得出。

第二部分：多域問題

在这一部分里, 我們將解决方程(4)和方程(5)的多域特里谷米问题, 方程(4)的多域特里谷米问题已經有人用复变函数方法解决了, 而我們將用积分方程的方法解决, 一般說来格林調和函数只有一个极点, 而我們所定义的格林調和函数却有二个极点, 且它在定义域中沒有极小值存在。

§4. 方程(4)的特里谷米问题: 以 D 表示混合域, 在 X 軸和 Y 軸上取点 $A(0,0)$, $B(1,0)$ 和 $C(0,1)$, 过这三点在方程(4)的双曲域部分作特征綫 AD , BD , AE 和 CE . 其中

$D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), E(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。过点 B, C 作一全在第一象限內的約当曲线弧 σ ，这一由 σ, CE, AE, AD 和 DB 所圍成的 XY 平面上的单联域称之为混合域 D_1 。

特里谷米問題是要在域 D 上求方程(4)的一个解析解，使它滿足边界条件。

$$U|_{\sigma} = \varphi(s) \quad (27)$$

$$U|_{AD} = \varphi_1(x) \quad (28)$$

$$U|_{AE} = \varphi_2(y) \quad (29)$$

其中 $\varphi(s), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ 是已知函数。

所謂方程(4)在域 D 的解析解，即是它在 D 內是二次連續可微的，且其一阶偏導数在閉域 $\bar{D}$ 上連續，除了点 A, B 和 C 可能变为低于一級无穷大量外，不失一般性可設 $U(A), U(B)$ 和 $U(C)$ 均为零。

我們容易証得若解在特征綫 AD, AE 或 DB, EC 上取零值，則它在蛇型綫上的开区間 $(AB), (AC)$ 上不可能有正的极大值和負的极小值，亦即是說正的极大值和負的极小值要落在約当弧 σ 上，由此，不難得出方程(4)的特里谷米問題解是唯一的。

作一格林調和函数 $G(x, y; \xi, \eta)$ ，它在 $(x, 0), (0, y)$ $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 上具有极，

$$G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \log |x - \xi| |iy - \xi|$$

$$\text{其中 } g(x, y; \xi, \eta) = g_1(x; \xi, \eta) + g_2(y; \xi, \eta) \quad 22$$

且該函数在 σ 上为零，在 D_1 內調和，特別当 σ 为 $\sigma_0: |\xi| = 1$ 时，这一函数又可写为

$$G(x, y; \xi, \eta) = \log \left| \frac{x\xi - 1}{x - \xi} \right| + \log \left| \frac{y\xi - i}{iy - \xi} \right| \quad \xi = \xi + i\eta. \quad (30)$$

且

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -2, \quad \text{当 } y=0, \eta=0, \xi \neq x \quad 0 < x < 1 \quad (31)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -2, \quad \text{当 } x=0, \xi=0, \eta \neq y \quad 0 < y < 1 \quad (32)$$

在点 $(x, 0)$ 作一半圆 $\sigma_{\varepsilon x}: (\xi - x)^2 + \eta^2 = \varepsilon^2, \eta \geq 0$ ，在点 $(0, y)$ 作一半圆 $\sigma_{\varepsilon y}: \xi^2 + (\eta - y)^2 = \varepsilon^2, \xi \geq 0$ ，从域 D_1 上去掉这两个半圆，剩下部分应用格林公式：

$$\int (G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n}) ds = 0. \quad (33)$$

即得

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{\varepsilon x}} (G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n}) ds + \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) (G v_1(\xi) + 2u(\xi, 0)) d\xi \\ & - \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int (G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n}) ds + \left(\int_1^{y+\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^0 \right) (G v_2(y)) \end{aligned}$$

$$+ 2u(0, \eta)d\eta = 0$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} U_1(x) - v_1(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\log |x\xi - 1| - \log |\xi| - |\xi - x|) v_1(\xi) d\xi \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\log |y\eta - 1| - \log |\eta| - |\eta - y|) v_2(\eta) d\eta \\ = \varphi_1^*(x) - \varphi_2^*(y). \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\varphi_1^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_0} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \log \left| \frac{x\xi - 1}{x - \xi} \right| ds,$$

$$\varphi_2^*(y) = -\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_0} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \log \left| \frac{y\xi - 1}{y - \xi} \right| ds.$$

设 $U_1'(x)$, $v_1(x)$ $0 < x < 1$ 和 $U_2'(y)$, $v_2(y)$ $0 < y < 1$ 是满足赫德尔类中的函数, 且由关系式

$$U_1'(x) - v_1(x) = 2 \frac{d}{dx} \varphi_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad (35)$$

$$U_2'(y) - v_2(y) = 2 \frac{d}{dy} \varphi_2\left(\frac{y}{2}\right). \quad (36)$$

对式(34)分别对 x 和对 y 求偏导数, 由式(35)、(36)即得

$$v_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{xt-1} \right) v_1(t) dt = F_1(x), \quad (37)$$

$$v_2(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-y} + \frac{1}{yt-1} \right) v_2(t) dt = F_2(y), \quad (38)$$

其中

$$U_1'(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad v_1(x) = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad 0 < x < 1,$$

$$U_2'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=0}, \quad v_2(y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad 0 < y < 1$$

$$F_1(x) = \varphi_1^*(x) - 2 \frac{d}{dx} \varphi_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad F_2(y) = \varphi_2^*(y) - 2 \frac{d}{dy} \varphi_2\left(\frac{y}{2}\right).$$

我们易知 $\varphi_1^*(x)$ 在 $(0,1)$ 上解析, 但当 $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ 时, $\varphi_1^*(x)$ 和它的导数的性

質還須研究, 設

$$\varphi(B) = \varphi'(B) = \varphi(C) = \varphi'(C) = 0. \quad (39)$$

由于函数 φ 具有 n 阶連續導數, 故它可表为

$$\varphi = \sin \Theta \overline{\varphi}_1(\theta) \quad \eta = \sin \theta, \quad \xi = \cos \theta. \quad (40)$$

其中 $\overline{\varphi}_1$ 是連續函数, 得

$$\frac{\partial}{\partial n} \log \left| \frac{x\xi - 1}{x - \xi} \right| = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1) - 2x \cos \theta} \quad \text{在 } \sigma \text{ 上} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(x) &= \frac{(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^\pi \overline{\varphi}_1(\theta) \frac{\sin \theta d\theta}{(x+1)^2 - 2x(\cos \theta + 1)} \\ &= \frac{2(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^\pi \overline{\varphi}_1(\theta) \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{(x+1)^2 - 4x \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^1 \overline{\varphi}_1 \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2 - 4xt} dt. \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = t$.

对于 $\varphi_1^*(x)$ 我們有

$$\begin{aligned} \varphi_1^{**}(x) &= \frac{4x}{\pi} \int_0^1 \overline{\varphi}_1 \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt}{(x+1)^2 - 4xt} \\ &\quad - \frac{2(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^1 \overline{\varphi}_1 \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} (2(x+1) - 4t) dt}{[(x+1)^2 - 4xt]^2} \end{aligned} \quad (43)$$

应用中值定理即得

$$\begin{aligned} \varphi_1^{**}(x) &= \frac{4x}{\pi(x+1)^2} \overline{\varphi}_1(t_1) \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4x}{(x+1)^2} t\right)^{-1} dt \\ &\quad - \frac{4(x-1)}{\pi} \overline{\varphi}_1(t_2) \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4xt}{(x+1)^2}\right)^{-2} dt \\ &\quad + \frac{8(x-1)}{\pi(x+1)} \overline{\varphi}_1(t_3) \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4xt}{(x+1)^2}\right)^{-2} dt. \end{aligned} \quad (44)$$

故知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\varphi_1^*(x)$ $\varphi_1^{**}(x)$ 有界, $x \rightarrow 1$ 时 $\varphi_1^*(x) \rightarrow 0$, $\varphi_1^{**}(x)$ 有界。

对于 $\varphi_2^*(y)$ 亦有同样的性質。

弄清端点性质后, 我们便可解积分方程(37)和(38)。

只要注意到

$$\frac{1}{t-z} + \frac{t}{zt-1} = \frac{1+t}{1+z} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-zt} \right)$$

则方程(37)和(38)可改写为

$$\Phi_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-zt} \right) \Phi_1(t) dt = f_1(x). \quad (45)$$

$$\Phi_2(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-y} - \frac{1}{1-yt} \right) \Phi_2(t) dt = f_2(y). \quad (46)$$

其中 $\Phi_i(z) = (1+z) \nu_i(z)$, $f_i(z) = (1+z) F_i(z)$, ($i=1, 2$).

由于积分方程(45)和(46)是属于同一类型的方程, 所以只要求出积分方程(45), 则方程(46)亦立即可求出。

对于方程(45)我们有解核

$$H(x, t, \lambda) = - \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\lambda K(x, t).$$

其中, $\lambda = -\frac{1}{\pi}$, $K(x, t) = \frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-zt}$

如果我们所求的不是奇异积分方程, 那末求得解核便立即完成方程(45)的反演, 且

$$\Phi_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\lambda K(x, t) f_1(t) dt. \quad (47)$$

但‘解案’(47)并非方程(45)的解, 因为奇异积分方程的积分次序不可对换, 但‘解案’(47)和真正适合方程(45)的解案有相似的形式, 故由式(47)可导出真正的解案, 事实上, 令

$$\Phi_1(x) = C \left[f_1(x) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\theta K(x, t) f_1(t) dt \right]. \quad (48)$$

其中 C 和 θ 是待定常数。

将式(48)代入方程(45), 并注意到

$$\int_0^1 \frac{dt}{t-x} \int_0^1 \frac{f_1(t, \xi)}{\xi-t} d\xi = -\pi^2 f_1(x, x) + \int_0^1 d\xi \int f_1(t, \xi) \frac{dt}{(t-x)(\xi-t)}.$$

即得

$$(1 + \pi^2 \lambda^2) f_1(x) - \lambda \int_0^1 \left\{ K(x, t) - \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\theta K(x, t) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2 t}{\xi(1-t)^2} \right]^\theta K(x, \xi) K(\xi, t) d\xi \} f_1(t) dt \\
& = \frac{1}{C} f_1(x)
\end{aligned} \quad (49)$$

令 $C = \frac{1}{1 + \pi^2 \lambda^2}$ 則上式可寫為

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ K(x, t) - \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\theta K(x, t) \right. \\
& \quad \left. + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2 t}{\xi(1-t)^2} \right]^\theta K(x, \xi) K(\xi, t) d\xi \right\} f_1(t) dt = 0.
\end{aligned} \quad (50)$$

若

$$\begin{aligned}
& K(x, t) - \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^\theta K(x, t) \\
& \quad + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2 t}{\xi(1-t)^2} \right]^\theta K(x, \xi) K(\xi, t) d\xi = 0.
\end{aligned} \quad (51)$$

則式(50)恒成立，由於

$$K(x, \xi) K(\xi, t) = K(x, t) \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{x}{1-x\xi} - \frac{1}{t-\xi} + \frac{t}{1-t\xi} \right). \quad (52)$$

則在式(51)中消去因子 $K(x, t)$ ，且以 $t^{-\theta}(1-t)^{-2\theta}$ 乘式(51)，即得

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(1-x)^2}{x} \right]^\theta - \left[\frac{(1-t)^2}{t} \right]^\theta \\
& = \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2}{\xi} \right]^\theta \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{x}{1-x\xi} \right) d\xi \\
& \quad - \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2}{\xi} \right]^\theta \left(\frac{1}{\xi-t} - \frac{t}{1-t\xi} \right) d\xi.
\end{aligned} \quad (53)$$

但式(53)的兩邊皆具有形式 $l(x) - P(t)$ ，因此式(48)適合方程(45)的條件是

$$\lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-\xi)^2}{\xi} \right]^\theta \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{x}{1-x\xi} \right) d\xi = \left[\frac{(1-x)^2}{x} \right]^\theta + \alpha \quad (54)$$

其中 α 是任意常數。

在式(30)中作积分变换

$$\xi = 1 - \frac{1}{t}$$

同时设 $\frac{x}{(1-x)^2} = X$, 这时式(54)可写为

$$\lambda X^\theta \int_1^\infty \frac{t + 2X}{[(t-1)^\theta]^\theta [t(t-1)-X]} dt = 1 + \alpha X^\theta, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2} \quad (5)$$

其中

$$\frac{t + 2X}{t[t(t-1)-X]} = -\frac{2}{t} + \frac{2t-1}{t(t-1)-X}$$

式(55)的左端可写为

$$\begin{aligned} \lambda X^\theta \int_1^\infty \frac{1}{[(t-1)^\theta]^\theta} \left(-\frac{2}{t} + \frac{2t-1}{t(t-1)-X} \right) dt \\ = \lambda X^\theta \left[-2 \int_0^1 (1-t)^{(1-\theta)-1} t^{2\theta-1} dt + X^{-\theta} \int_1^\infty \frac{t^\theta}{t-1} dt \right] \\ = -2 \lambda X^\theta B(2\theta, 1-\theta) - \lambda \pi \cot \pi \theta. \end{aligned}$$

至此, 式(55)可改写为

$$-2 \lambda X^\theta B(2\theta, 1-\theta) - \lambda \pi \cot \pi \theta = 1 + \alpha X^\theta$$

即得

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(-\lambda \pi) = \frac{1}{4}. \quad (56)$$

至此, 我們得方程(45)的反演公式为

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2} f_1(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} K(x, \xi) f_1(\xi) d\xi. \quad (57)$$

或者写为

$$\nu_1(x) = \frac{1}{2} F_1(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{xt-1} \right) F_1(t) dt. \quad (58)$$

同样, 我們可得

$$\nu_2(y) = \frac{1}{2} F_2(y) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^2 t}{y(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-y} + \frac{t}{yt-1} \right) F_2(t) dt. \quad (59)$$

由于 $\nu_1(x)$ 和 $\nu_2(y)$ 确定, 故 $\mathcal{U}_1(x)$ 和 $\mathcal{U}_2(y)$ 亦确定, 这样便可在椭圆域中解狄克雷问题, 而在双曲域中解哥西问题, 亦即在椭圆域上解定解问题

$$\begin{cases} \text{方程(1)} \\ u(x,0)=\tau_1(x) \\ u(0,y)=\tau_2(y) \\ u|_{\sigma}=\varphi(s) \end{cases}$$

在双曲域 D_2 和 D_4 上解以下哥西問題

$$\begin{cases} \text{方程(1)} \\ u(x,0)=\tau_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\nu_1(x) \end{cases} \quad \text{在 } D_4 \text{ 上.}$$

和

$$\begin{cases} \text{方程(1)} \\ u(0,y)=\tau_2(y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\nu_2(y) \end{cases} \quad \text{在 } D_2 \text{ 上.}$$

至有一般情形，我們有

$$\nu_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{xt-1} \right) \nu_1(t) dt = F_1(x) + \int_0^1 K_1^*(x,t) \nu_1(t) dt. \quad (60)$$

$$\nu_2(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-y} + \frac{t}{yt-1} \right) \nu_2(t) dt = F_2(y) + \int_0^1 K_2^*(y,t) \nu_2(t) dt. \quad (61)$$

其中

$$K_1^*(x,t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} [\log |xt-1| - g_1(x;t,0)],$$

$$K_2^*(y,t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} [\log |yt-1| - g_2(y;0,t)].$$

暫設 $\int_0^1 K_1(x,t) \nu_1(t) dt$ 为已知，利用反演公式(58)，即得

$$\nu_1(x) = F_1^*(x) - \int_0^1 K_1^*(x,\xi) \nu_1(\xi) d\xi. \quad (62)$$

其中

$$F_1^*(x) = \frac{1}{2} F_1(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{xt-1} \right) F_1(t) dt.$$

$$K_1^{**}(x,\xi) = \frac{1}{2} K_1^*(x,\xi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2 t}{x(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{xt-1} \right) K_1^*(t,\xi) dt.$$

同样，我們有

$$\nu_2(y) = F_2^*(y) - \int_0^1 K_2^*(y, \xi) \nu_2(\xi) d\xi. \quad (63)$$

其中

$$F_2^*(y) = \frac{1}{2} F_2(y) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^2 t}{y(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-y} + \frac{t}{yt-1} \right) F_2(t) dt.$$

$$K_2^{**}(y, \xi) = \frac{1}{2} K_2^*(y, \xi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^2 t}{y(1-t)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-y} + \frac{t}{yt-1} \right) K_2^*(t, \xi) dt.$$

这样方程(60)和(61)便化为等价的第二类弗里德和蒙积分方程(62)和(63), 它的可解性由方程(4)的特里谷米問題解的唯一性导出.

§.5. 方程(5)的特里谷米問題: 方程(5)的特里谷米問題的定义域是这样的, 即在 x 和 y 軸上取三点 $A(0,0)$, $B(1,0)$ 和 $C(0,1)$, 过这三点在方程(5)的双曲域部分特征綫 L_1 和 L_2 与 L_3 和 L_4 交于点 D 和 E , 其中

$$L_1 : x^{\frac{3}{2}} - (-y)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

$$L_2 : \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + (-y)^{\frac{3}{2}}) = 1.$$

$$L_3 : (-x)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 0.$$

$$L_4 : \frac{2}{3}((-x)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) = 1.$$

过点 B 和 C , 并以它們为端点作一全在第 1 象限內的約当曲綫弧 σ , 这一由 σ , L_1 , L_2 和 L_3 , L_4 所圍成的 xy 平面上的单联域称为混合域 D , 且以 D_1 和 D_2 , D_4 分别表示域 D 中的椭圆域和双曲域部分.

特里谷米問題是要求一在閉域 $\bar{D}$ 上的函数 $u(x, y)$ 使它在域 D 內除坐标点外, 处处适合方程(5), 且其一阶偏导数在閉域 $\bar{D}$ 上除 A , B 和 C 等点可能变为低于一阶无穷大量外, 其余的点則連續, 函数 $u(x, y)$ 在边界上还滿足如下条件:

$$u(x, y) \Big|_{\sigma} = \varphi(s). \quad (64)$$

$$u(x, y) \Big|_{L_1} = \varphi_1(x). \quad (65)$$

$$u(x, y) \Big|_{L_3} = \varphi_2(y). \quad (66)$$

其中, 函数 $\varphi(s)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ 都是連續可微函数, 且 $\varphi_1(A) = \varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 0$.

在 § 2 中, 我們已經證明了方程 (5) 的特里谷米問題的解是唯一的。直接驗證得知函数

$$\left| \zeta - x^3 \right|^{-\frac{1}{3}} - \left| \zeta + y^3 \right|^{-\frac{1}{3}} \quad \zeta = \xi^3 - \eta^3 + 2i\xi^{\frac{3}{2}}\eta^{\frac{3}{2}} \quad \zeta \neq x^3, \zeta \neq y^3.$$

在域 $x \geq 0, y \geq 0; \xi \geq 0, \eta \geq 0$ 上是方程 (5) 的基本解。記函数 $G(x, y; \xi, \eta)$ 为

$$G(x, y; \xi, \eta) = \left| \zeta - x^3 \right|^{-\frac{1}{3}} - \left| \zeta + y^3 \right|^{-\frac{1}{3}} + g_1(x; \xi, \eta) - g_2(y; \xi, \eta).$$

其中 g_1 和 g_2 是方程 (5) 在域 D_1 中的解析解, 且滿足

$$\begin{cases} g_1(x; \xi, \eta) - g_2(y; \xi, \eta) = - \left| \zeta - x^3 \right|^{-\frac{1}{3}} + \left| \zeta + y^3 \right|^{-\frac{1}{3}} & \zeta \in \sigma \\ \left. \frac{\partial (g_1 - g_2)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 & \left. \frac{\partial (g_1 - g_2)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \quad (67)$$

在域 D_1 中用一小解析曲綫 $|\zeta - x^3| = \varepsilon$ 和 $|\zeta + y^3| = \varepsilon$ 来割除点 $(x, 0), (0, y)$,

而对剩下部分应用格林公式

$$\int \eta \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} - G \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\eta - \int \xi \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) d\xi = 0 \quad (68)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对于所确定的定义域, 式 (68) 可写为

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) \xi G(x, 0; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi + \int_{\sigma} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} \right. \\ & \quad \left. + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon x}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon x} \\ & \quad - \left(\int_1^{y+\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^0 \right) \eta G(0, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta \\ & \quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon y}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon y} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\text{其中 } v_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad v_2 = \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon x}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon x} = \frac{1}{r^*} U(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_{\varepsilon}} u \left(\eta \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \xi \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) d\sigma_{\varepsilon} = \frac{1}{r^*} \tau_2(y)$$

其中

$\frac{1}{r^*}$ 是一固定常数

即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} [F_1(x) - F_1(x) + \int_0^1 \xi G(x, 0; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi + \frac{1}{r^*} F_1(y) - F_2(y) + \\ + \int_0^1 \eta G(0, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta] = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{\sigma} u \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial \xi} (|\xi - x^3|^{-1/3} + g_1(x; \xi, \eta)) \frac{\partial \xi}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} (|\xi - x|^{-1/3} + g_1(x; \xi, \eta)) \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\} d\sigma \\ F_2(y) &= \int_{\sigma} u \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial \xi} (|\xi - y^3|^{-1/3} + g_2(y; \xi, \eta)) \frac{\partial \xi}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} (|\xi + y^3|^{-1/3} + g_2(y; \xi, \eta)) \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\} d\sigma \end{aligned}$$

当 x 属于区间 (AB) 和 y 属于区间 (AC) 时, 式(70)显然可写为

$$\frac{1}{r^*} F_1(x) + \int_0^1 \xi G(x, 0; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi = F_1(x) - F_2(0) \quad (71)$$

$$\frac{1}{r^*} F_2(y) + \int_0^1 \eta G(0, y; 0, \eta) v_2(\eta) d\eta = F_2(y) - F_1(0) \quad (72)$$

其中 $F_2(0) = -F_1(0)$

特别当 σ 是解析曲线 $\sigma_0: |\xi| = 1$ 时, 函数

$$G(x, y; \xi, \eta) = |\xi - x^3|^{-1/3} - |\xi + y^3|^{-1/3} - |1 - x^3 \xi|^{-1/3} + |1 + y^3 \xi|^{-1/3}$$

$$G(x, 0; \xi, 0) = |\xi^3 - x^3|^{-1/3} - |1 - x^3 \xi|^{-1/3} + (1 - \xi)$$

$$G(0, y; 0, \eta) = |\eta^3 - y^3|^{-1/3} - |1 - y^3 \eta|^{-1/3} + (1 - \eta)$$

$v_i(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 有小于1級的无穷大量, 故有

$$\int_0^1 \xi(1-\xi) v_1(\xi) d\xi = a$$

$$\int_0^1 \eta(1-\eta) v_2(\eta) d\eta = b$$

其中 a 和 b 是固定常数

不失一般性, 可設常数 $a-F_1(0)$, $b-F_2(0)$ 为零, 这样式(71)和(72)可改写为

$$\frac{1}{r^*} \tau_1(x) + \int_0^1 \xi \left\{ |\xi^3 - x^3|^{-1/3} - |1 - x^3 \xi^3|^{-1/3} \right\} v_1(\xi) d\xi = F_1(x) \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \tau_2(y) + \int_0^1 \eta \left\{ |1 - y^3 - \eta^3|^{-1/3} - |1 - y^3 \eta^3|^{-1/3} \right\} v_2(\eta) d\eta \\ = F_2(y) \end{aligned} \quad (74)$$

在方程(5)的情况下式(9)可表为

$$\tau_1(x) = \psi_1(x) + 3r \int_0^x \frac{v_1(\xi) \xi d\xi}{|x^3 - \xi^3|^{1/3}} \quad (75)$$

$$\tau_2(y) = \psi_2(y) + 3r \int_0^y \frac{v_2(\eta) \eta d\eta}{|y^3 - \eta^3|^{1/3}} \quad (76)$$

其中

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2} B^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \int_0^1 \varphi_1(4^{-1/3} \xi x)(1-\xi)^{-1/6} d\xi + 4^{-1/3} B^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$x \int_0^1 \varphi_1'(4^{-1/3} \xi x)(1-\xi)^{-1/6} \xi d\xi$$

$$\psi_2(y) = \frac{1}{2} B^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \int_0^1 \varphi_2(4^{1/3} \eta y)(1-\eta)^{-1/6} d\eta + 4^{-1/3} B^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$y \int_0^1 \varphi_2'(4^{1/3} \eta y)(1-\eta)^{-1/6} \eta d\eta$$

$$r = r_1^{-1} r_2 B^{-1}\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad r_1 = \Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \quad r_2 = 4^{-1/3} \Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{5}{3}\right),$$

$$r_3 = 4^{-1/3} r_2$$

將式(75)和(76)代入(73)和(74)得

$$\int_0^x \frac{\nu_1(\xi)\xi d\xi}{|x^3-\xi^3|^{1/3}} + r^{**} \int_0^1 \xi \left(\frac{1}{|\xi^3-x^3|^{1/3}} - \frac{1}{|1-x^3\xi^3|^{1/3}} \right) \nu_1(\xi) d\xi = F_{11}(x) \quad (77)$$

$$\int_0^y \frac{\nu_2(\eta)\eta d\eta}{|y^3-\eta^3|^{1/3}} + r^{**} \int_0^1 \eta \left(\frac{1}{|\eta^3-y^3|^{1/3}} - \frac{1}{|1-y^3\eta^3|^{1/3}} \right) \nu_2(\eta) d\eta = F_{22}(y) \quad (78)$$

其中, $F_{11}(x) = -\frac{1}{3r}(r^{**}F_1(x) - \psi_1(x))$, $F_{22}(y) = -\frac{1}{3r}(r^{**}F_2(y) - \psi_2(y))$, $r^{**} = r^*/3r$

应用阿培尔积分反演公式, 式(77), (78)可写为

$$\Phi_1(x^{1/3}) + \frac{\sqrt{3}r^{**}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 \Phi_1(\xi^{1/3}) d\xi \left(\int_0^x \frac{dt}{|t-\xi|^{1/3}(x-t)^{2/3}} - \int_0^x \frac{dt}{|1-\xi t|^{1/3}(x-t)^{2/3}} \right) = F_A(x^{1/3}) \quad (79)$$

$$\Phi_2(y^{1/3}) + \frac{\sqrt{3}r^{**}}{2\pi} \frac{d}{dy} \int_0^1 \Phi_2(\eta^{1/3}) d\eta \left(\int_0^y \frac{dt}{|t-\eta|^{1/3}(y-t)^{2/3}} - \int_0^y \frac{dt}{|1-\eta t|^{1/3}(y-t)^{2/3}} \right) = F_B(y^{1/3}) \quad (80)$$

其中 $\Phi_1(x^{1/3}) = \nu_1(x^{1/3})x^{1/3}$; $\Phi_2(y^{1/3}) = \nu_2(y^{1/3})y^{1/3}$,

$$F_A(x^{1/3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F_{11}(t^{1/3})dt}{(x-t)^{2/3}}; \quad F_B(y^{1/3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{F_{22}(t^{1/3})dt}{(y-t)^{2/3}}$$

由式(22)有

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 I_1(x_1\xi) \Phi(\xi^{1/3}) d\xi = \int_0^1 \left(\frac{\xi}{x} \right)^{2/3} \frac{\Phi_1(\xi^{1/3})}{\xi-x} d\xi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \Phi(x^{1/3}) \quad (81)$$

另方面考虑积分

$$I_2(x_1\xi) = \int_0^x \frac{dt}{|1-\xi t|^{1/3}(x-t)^{2/3}}$$

若注意到

$$I_2(x, \xi) = |\xi|^{1/3} I_1(x, \frac{1}{\xi})$$

則得

$$\frac{\partial I_2}{\partial x} = \left(\frac{\xi}{x}\right)^{2/3} \frac{1}{1-x\xi}$$

最後我們有

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 I_2(x, \xi) \Phi_1(\xi^{1/3}) d\xi = \int_0^1 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{2/3} \frac{\Phi_1(\xi^{1/3})}{1-x\xi} d\xi \quad (82)$$

將式(81)和(82)代入(79)得

$$\Phi_1(x^{1/3}) + \frac{1}{\pi r_0} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{1-x\xi}\right) \Phi_1(\xi^{1/3}) d\xi = \frac{2}{2+r^{**}} F_A(x^{1/3}) \quad (83)$$

其中 $\frac{1}{r_0} = \frac{\sqrt{3}r^{**}}{2+r^{**}}.$

同樣可以求得

$$\begin{aligned} \Phi_2(y^{1/3}) + \frac{1}{\pi r_0} \int_0^1 \left(\frac{\eta}{y}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{\eta-y} - \frac{1}{1-y\eta}\right) \Phi_2(\eta^{1/3}) d\eta \\ = \frac{2}{2+r^{**}} F_B(y^{1/3}) \end{aligned} \quad (84)$$

不难証明当 $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ 和 $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$, $F_A(x^{1/3})$ 和 $F_B(y^{1/3})$ 有界, 且在 $0 < t < 1$ 中滿足赫德爾条件。

要求得方程(83)和(84)的积分反演公式只須重复求方程(45)的反演公式的方法, 便可求得

$$\Phi_1(x^{1/3}) = \frac{1}{1+\pi^2\lambda^2} \left[f_1(x) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2\xi}{x(1-\xi)^2} \right]^\theta K_1(x, \xi) f_1(\xi) d\xi \right] \quad (85)$$

其中 $\lambda = -1/\pi r_0$ $f_1(t) = \frac{2}{2+r^{**}} F_A(t^{1/3})$, $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{artg}(-\lambda\pi)$

$$0 < \operatorname{artg}(-\lambda\pi) < \frac{\pi}{2}.$$

$$K_1(x, \xi) = \left(\frac{\xi}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{1-x\xi}\right).$$

式(85)亦可寫为:

$$\begin{aligned} x\nu_1(x) = \frac{1}{1+\pi^2\lambda^2} \left[f_1(x^3) \right. \\ \left. + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-x^3)\xi^3}{x^3(1-\xi^3)} \right]^\theta K_1(x^3, \xi^3) f_1(\xi^3) \xi^2 d\xi \right] \end{aligned} \quad (86)$$

对于 $\nu(x)$ 亦有式

$$\begin{aligned} y \nu(x) = & \frac{1}{1 + \pi^2 \lambda^2} \left[f_2(y^3) \right. \\ & \left. + \lambda \int_0^1 \left[\frac{(1-y^3)\eta^3}{x^3(1-\eta^3)} \right]^\theta K_2(y^3, \eta^3) f_2(\eta^3) \eta^2 d\eta \right]. \end{aligned} \quad (87)$$

$$\text{其中 } f_2(t^3) = \frac{2}{2+r^{**}} F_2(t), \quad K_2(y^3, \eta^3) = \left(\frac{\eta}{y} \right)^2 \left(\frac{1}{\eta^3 - y^3} - \frac{1}{1 - y^3 \eta^3} \right)$$

若通过 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的恰当曲线弧 σ 不是 σ_0 时, 我们可将方程 (73), (74) 重写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \nu_1(x) + \int_0^1 \xi \left\{ \left| \xi^3 - x^3 \right|^{-\frac{1}{3}} - \left| 1 - x^3 \xi^3 \right|^{-\frac{1}{3}} \right\} \nu_1(\xi) d\xi \\ = F_1(x) - \int_0^1 \xi \left[g_1(x; \xi, 0) + \frac{1}{1 - x^3 \xi^3} \right] \nu_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \nu_2(y) + \int_0^1 \eta \left\{ \left| \eta^3 - y^3 \right|^{-\frac{1}{3}} - \left| 1 - y^3 \eta^3 \right|^{-\frac{1}{3}} \right\} \nu_2(\eta) d\eta \\ = F_2(y) - \int_0^1 \eta \left[g_2(y; \eta, 0) + \frac{1}{1 - y^3 \eta^3} \right] \nu_2(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (89)$$

由(75)和(76)消去 $\nu_1(x)$ 和 $\nu_2(y)$, 即得等价于特里谷米问题的方程

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^{1/3}) + \frac{1}{\pi r_0} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{x} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{1 - x\xi} \right) \Phi_1(\xi^{1/3}) d\xi = f_1(x) \\ - \int_0^1 K_1^*(x, \xi) \Phi_1(\xi^{1/3}) d\xi \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(y^{1/3}) + \frac{1}{\pi r_0} \int_0^1 \left(\frac{\eta}{y} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{\eta - y} - \frac{1}{1 - y\eta} \right) \Phi_2(\eta^{1/3}) d\eta = f_2(y) \\ - \int_0^1 K_2^*(y, \eta) \Phi_2(\eta^{1/3}) d\eta \end{aligned}$$

其中 $K_1^*(x, \xi)$ 和 $K_2^*(y, \eta)$ 可分别用 $g_1(x; \xi, 0)$ 和 $g_2(y; \eta, 0)$ 表之

若弧 σ 的两端和 σ_0 的两端的两段小弧相接, 则函数 k_1^* 和 k_2^* 本来在 $0 < x < 1$ 和

$0 < y < 1$ 中解析, 現在在 $x=0$ 和 $x=1$ 与 $y=0, y=1$ 处可能有很低阶的奇异性, 甚至是解析, 这时可將方程(90)和(91)的右端当为已知函数, 利用积分反演公式(85)就可以把它們化为关于 $\Phi_i(t)$ ($i=1, 2$) 的弗里德和蒙的第二类积分方程, 由于特里谷米問題的解唯一, 故这一积分方程是可解的, 这样我們便解出了 $\nu_1(x)$ 和 $\nu_2(y)$ 来, 随着 $\tau_1(x)$ 和 $\tau_2(y)$ 亦可确定了, 至此, 我們便能在橢圓域中解狄雷克雷問題, 而在双曲域上解哥西問題, 故特里谷米問題的解是存在的。

参 考 文 献:

- [1] A. B. 比察捷: « 混合型微分方程 » 科学出版社。
- [2] F. 特里谷米: « 論二阶混合型綫性偏微分方程 », 科学出版社。
- [3] A. B. 比察捷: « 綫性偏微分方程的某些綫性定解問題 », « 数学进展 » 1958年4卷3期。
- [4] 丁夏畦: « 混合型微分方程 », « 数学学报 » 1955年5卷2期。
- [5] N. I. Muskhelishvili: Singular Integral Equations

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED TYPE

Wu T_{sh}-chine

ABSTRACT

In this paper we resolve the Tricomi problem of the equations

$$\operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

by the method of integral equation.