常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性双曲方程組(Ⅱ)*

——特征方程具有三个不同实根的情况

吴兹潛 林 偉

(数学力学系)

摘 要

本文解决特征方程具有三个不同实根的常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性双曲方程組

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_1&1\\b_3&b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

$$b_3=b_1^2-b_1+\tfrac{1}{4}\neq 0,\quad b_1\neq 0$$

的Cauchy問題等七类定解問題的解的存在唯一性。

在华罗庚及作者的文章〔1〕(或〔2〕)指出：特征方程具有三个不同实根的，常系数二阶两个自变数两个未知函数的数性双曲方程組的标准型是

$$(\text{I})\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_1&1\\b_3&b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0,$$

$$b_3=b_1^2-b_1+\tfrac{1}{4}\neq 0,\quad b_1\neq 0.$$

通过适当的变换，可以求得方程組(Ⅰ)的等价方程組是

$$(\text{II})\qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{\lambda+1}{3(\lambda-\mu)}&1\\b&-\frac{\mu+1}{3(\lambda-\mu)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+$$

* 本文是华罗庚教授指导的，特此致謝。

本文于1965年5月21日收到。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda\mu = -\frac{1}{9}, \quad 4b = \lambda+\mu-\frac{4(\lambda+1)(\mu+1)}{9(\lambda-\mu)^2}+\frac{8}{9}.$$

不难验証方程組（Ⅰ）及方程組（Ⅱ）的一般解分别是：

$$(\mathrm{I}^*)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2b_1}f_1(x-y)-\dfrac{1-2b_1}{2b_1}\left(xf_1'(x-y)+f_2(x-y)\right)+f_3(y),\\ v = -\dfrac{b_3}{b_1}\left(xf_1'(x-y)+f_2(x-y)\right)+f_4(x). \end{cases}$$

及

$$(\mathrm{II}^*)\quad \begin{cases} u = f_1(x+y)+f_2(x-y)+3yf_3(x-3y)+f_4(x-3y),\\ v = -\frac{1}{2}\Big\{(1+2b_1+\lambda)f_1(x+y)-(1-2b_1+\lambda)f_2(x-y)-(1-6b_1+\\ \quad +9\lambda)yf_3(x-3y)-\frac{1}{3}(1-9\lambda)\displaystyle\int_0^{x-3y}f_3(t)dt-\frac{1}{3}(1-6b_1+\\ \quad +9\lambda)f_4(x-3y)\Big\} \qquad b_1=\dfrac{\lambda+1}{3(\lambda-\mu)}\quad \lambda\neq\mu \end{cases}$$

本文将解决 Cauchy 問題等七种定解問题。

§1 函数积分方程、函数矩陣积分方程

我們在文章〔3〕指出下面的定理成立。

定理 A. 若函数方程

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i f(\alpha_i x)+h(x), \qquad -\infty<x<+\infty$$

适合于 i）存在一实数 $\mu\geqslant 0$，使

$$\sum_{i=1}^{l}\left|a_i\alpha_i^{\mu}\right|<1, \qquad |\alpha_i|<1;$$

ii）$h(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 內連續，而且 $|h(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$；則函数方程有連續解存在，如果 $|f(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$，則这一連續解是唯一的。

定理 B. 函数矩陣方程

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} f(\alpha_i x)M_i+h(x), \qquad -\infty<x<+\infty.$$

适合于 i）存在一 $\mu\geqslant 0$，使

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$q=\lambda\left(\left|\alpha_1^{2\mu}\right|+\left|\alpha_2^{2\mu}\right|+\cdots+\left|\alpha_l^{2\mu}\right|\right)<1,$$

ii) $h(x)$連續，$-\infty<x<+\infty$，$|h(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$；則函数矩陣方程有連續解存在。如果 $|f(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$，則这解是唯一的。这儿$f=(f_1,f_2,\cdots,f_r)$，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_r)$，$M_i$是$r$行$r$列的实数方陣，$|\alpha_i|<1$，$\lambda$是对称方陣

$$Q=\begin{pmatrix} M_1M_1' & M_1M_2' & \cdots & M_1M_l' \\ M_2M_1' & M_2M_2' & \cdots & M_2M_l' \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ M_lM_1' & M_lM_2' & \cdots & M_lM_l' \end{pmatrix}$$

的特征值的模的最大值。

本文还要应用到下面的两个定理。

定理C. 若函数积分方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}a_if(\alpha_ix)+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}b_jf(\beta_jt)\frac{dt}{t}+h(x),\qquad -\infty<x<+\infty.$$

适合于 i) 存在一正实数$\mu\geqslant 2$，使

$$\sum_{i=1}^{s}\left|a_i\alpha_i^{\mu}\right|+\left(\sum_{j=1}^{T}\left|b_j\beta_j^{\mu}\right|\right)/\mu<1.\quad |\alpha_i|<1,\ |\beta_j|\leqslant 1.$$

ii) $h(x)$在$-\infty<x<+\infty$連續，而且$|h(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$，則函数积分方程有連續解存在。如果$|f(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$，則解是唯一的。

証. 定义

$$f_{-1}(x)=0,\qquad f_0(x)=h(x),$$

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{s}a_if_{n-1}(\alpha_ix)+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}b_jf_{n-1}(\beta_jt)\frac{dt}{t}+h(x).$$

立得

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sum_{i=1}^{S}a_i\Big[f_n(\alpha_ix)-f_{n-1}(\alpha_ix)\Big]+$$

$$+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}b_j\Big[f_n(\beta_jt)-f_{n-1}(\beta_jt)\Big]\frac{dt}{t}.$$

行归納法得

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{S}\left|a_i\alpha_i^{\mu}\right|+\sum_{j=1}^{T}\frac{\left|b_j\beta_j^{\mu}\right|}{\mu}\right)^{n+1}|x|^{\mu}.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

当$n\to\infty$时，$f_{n+1}-f_n\to 0$，因此級数

$$(f_0-f_{-1})+(f_1-f_0)+\cdots$$

絕对一致收斂，故$f_n\to f$，当$n\to\infty$，而且这一解是唯一的，

定理D. 函数矩陣积分方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{S}f(\alpha_i x)A_i+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}f(\beta_j t)\frac{dt}{t}B_j+h(x),\ -\infty<x<+\infty.$$

适合于 i）存在实数$\mu\geqslant 2$，使

$$q=\lambda\left(\sum_{i=1}^{S}|\alpha_i^{2\mu}|+\sum_{j=1}^{T}|\beta_j^{2\mu}|\Big/\mu^2\right)<1.\qquad |\alpha_i|<1,\ |\beta_j|\leqslant 1.$$

ii）$h(x)$在$-\infty<x<+\infty$連續，而且$|h(x)|\leqslant M|x|^{\mu}$．則函数矩陣积分方程的連續解存在。如果$|f|\leqslant M|x|^{\mu}$，則解是唯一的，这儿$f=(f_1,f_2,\cdots f_r)$，$h=(h_1,h_2=\cdots,h_r)$，$A_i$及$B_i$是$r$行$r$列的实数方陣，$\lambda$是对称方陣$Q$的最大特征值的模。

証．定义

$$f_{-1}(x)=0,\qquad f_0(x)=h(x).$$

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{S}f_{n-1}(\alpha_i x)A_i+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}f_{n-1}(\beta_j t)\frac{dt}{t}B_j+h(x),$$

考虑$f_{n+1}(x)-f_n(x)$的模

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|^2=\Big(\sum_{i=1}^{S}(f_n(\alpha_i x)-f_{n-1}(\alpha_i x))A_i+$$

$$+\int_0^x\sum_{j=1}^{T}(f_n(\beta_j t)-f_{n-1}(\beta_j t))\frac{dt}{t}B_j\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{h=1}^{S}(f_n(\alpha_h x)-f_{n-1}(\alpha_h x))A_h+\int_0^x\sum_{l=1}^{T}(f_n(\beta_l t)-$$

$$-f_{n-1}(\beta_l t))\frac{dt}{t}B_l\Big)'=g_n\,Q\,g_n'$$

这儿，

$$g_n=\Big(f_n(\alpha_1 x)-f_{n-1}(\alpha_1 x),\ \cdots,\ f_n(\alpha_s x)-f_{n-1}(\alpha_s x),$$

$$\int_0^x\frac{f_n(\beta_1 t)-f_{n-1}(\beta_1 t)}{t}dt,\cdots,\ \int_0^x\frac{f_n(\beta_T t)-f_{n-1}(\beta_T t)}{t}dt\Big).$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$Q=\begin{pmatrix} A_1A_1' \cdots A_1A_S' & A_1B_1' \cdots A_1B_T' \\ A_2A_1' \cdots A_2A_S' & A_2B_1' \cdots A_2B_T' \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ A_SA_1' \cdots A_SA_S' & A_SB_1' \cdots A_SB_T' \\ B_1A_1' \cdots B_1A_S' & B_1B_1' \cdots B_1B_T' \\ B_2A_1' \cdots B_2A_S' & B_2B_1' \cdots B_2B_T' \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ B_TA_1' \cdots B_TA_S' & B_TB_1' \cdots B_TB_T' \end{pmatrix}$$

Q 是对称方陣。　命

$$g_n(x)=g_n^*(x)P.$$

且使

$$PQP'=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{r(S+T)} \end{pmatrix}.$$

行归納法立得

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|^2\leqslant \lambda g_n g_n' \leqslant M^2|x|^{2\mu}q^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，$f_{n+1}-f_n\to 0$，因此級数

$$(f_0-f_{-1})+(f_1-f_0)+\cdots$$

絕对一致收斂，故 $f_n\to f$，当 $n\to\infty$　而且这一解是唯一的。

§2　Cauchy 問 題

方程組(Ⅰ)的特征綫族是 $x=c_1$，$y=c_2$，$x-y=c_3$，而且 $x-y=c_3$ 是重特征綫族。

取 $y=cx$ 作支柱，$c\neq 0$，1，∞。Cauchy問題是求方程組(Ⅰ)的解适合于

$$\left.\begin{array}{ll} u|_{y=cx}=\varphi_1(x), & v|_{y=cx}=\varphi_2(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=cx}=h_1(x), & \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=cx}=h_2(x). \end{array}\quad -\infty<x<+\infty \right\}\quad (1)$$

这儿 φ_i 是三阶可微的函数，h_i 是二阶可微的函数。n 是支柱的法向，而且

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(-c\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

由(Ⅰ*)及(1)有

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-c)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}xf_1'((1-c)x)-$$

$$-\frac{1-2b_1}{2b_1}f_2((1-c)x)+f_3(cx)=\varphi_1(x), \qquad (2)$$

$$-\frac{b_3}{b_1}xf_1'((1-c)x)-\frac{b_3}{b_1}f_2((1-c)x)+f_4(x)=\varphi_2(x), \qquad (3)$$

$$-(c+\frac{1}{2b_1})f_1'((1-c)x)+\frac{1-2b_1}{2b_1}(1+c)xf_1''((1-c)x)+$$

$$+\frac{1-2b_1}{2b_1}(1+c)f_2'((1-c)x)+f_3'(cx)=\sqrt{1+c^2}\,h_1(x), \qquad (4)$$

$$\frac{b_3c}{b_1}f_1'((1-c)x)+\frac{b_3}{b_1}(1+c)xf_1''((1-c)x)+$$

$$+\frac{b_3}{b_1}(1+c)f_2'((1-c)x)-cf_4'(x)=\sqrt{1+c^2}\,h_2(x)。 \qquad (5)$$

这儿 f_i 是任意函数。

对（2）求导数减去（4）乘 c 得

$$f_1'((1-c)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}[xf_1''((1-c)x)+f_2'((1-c)x)]=$$

$$=\frac{1}{1+c^2}(\varphi_1'(x)-c\sqrt{1+c^2}\,h_1(x)), \qquad (6)$$

对（3）求导数乘以 c 加上（5）得

$$xf_1''((1-c)x)+f_2'((1-c)x)=$$

$$=\frac{b_1}{b_3(1+c^2)}(c\varphi_2'(x)+\sqrt{1+c^2}\,h_2(x))。 \qquad (7)$$

由（6）及（7）得

$$f_1'(x)=\frac{1-2b_1}{2b_3(1+c^2)}\left(\sqrt{1+c^2}\,h_2\left(\frac{x}{1-c}\right)+c\varphi_2'\left(\frac{x}{1-c}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{1+c^2}\left(\varphi_1'\left(\frac{x}{1-c}\right)-c\sqrt{1+c^2}\,h_1\left(\frac{x}{1-c}\right)\right)。 \qquad (8)$$

即得

$$f_1(x)=\frac{1-c}{1+c^2}\varphi_1\left(\frac{x}{1-c}\right)+\frac{c(1-2b_1)(1-c)}{2b_3(1+c^2)}\varphi_2\left(\frac{x}{1-c}\right)-$$

$$-\frac{c(1-c)}{\sqrt{1+c^2}}\int_A^{\frac{x}{1-c}}h_1(t)dt+\frac{(1-2b_1)(1-c)}{2b_3\sqrt{1+c^2}}\int_A^{\frac{x}{1-c}}h_2(t)dt。 \qquad (9)$$

由（7）得

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$xf_1'(x)+f_2(x)=-\frac{c}{1-c}xf_1'(x)+\frac{1}{1-c}f_1(x)+$$

$$+\frac{b_1c(1-c)}{b_3(1+c^2)}\varphi_2\left(\frac{x}{1-c}\right)+\frac{b_1(1-c)}{b_3\sqrt{1+c^2}}\int_A^{\frac{x}{1-c}}h_2(t)dt\text{。}\qquad(10)$$

立得

$$xf_1'(x-y)+f_2(x-y)=\frac{1}{1-c}f_1(x-y)+\frac{y-cx}{1-c}f_1'(x-y)+$$

$$+\frac{cb_1(1-c)}{b_3(1+c^2)}\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-c}\right)+\frac{b_1(1-c)}{b_3\sqrt{1+c^2}}\int_A^{\frac{x-y}{1-c}}h_2(t)dt\text{。}\qquad(11)$$

把（2），（3），（8），（9），（10），（11）代入（Ⅰ*）得 Cauchy 問題的解是

$$u(x,y)=\varphi_1\left(\frac{y}{c}\right)+\frac{2b_1-c}{2b_1(1+c^2)}\left[\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-c}\right)-\varphi_1\left(\frac{y}{c}\right)\right]-$$

$$-\frac{c^2}{b_1(1+c^2)}\left[\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-c}\right)-\varphi_2\left(\frac{y}{c}\right)\right]-$$

$$-\frac{1-2b_1}{2b_1(1-c)}(y-cx)\left\{\frac{1-2b_1}{2b_3(1+c^2)}\left[\sqrt{1+c^2}\,h_2\left(\frac{x-y}{1-c}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c\varphi_2'\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]+\frac{1}{1+c^2}\left[\varphi_1'\left(\frac{x-y}{1-c}\right)-c\sqrt{1+c^2}\,h_1\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{(2b_1-c)c}{2b_1\sqrt{1+c_2}}\int_{\frac{y}{c}}^{\frac{x-y}{1-c}}h_1(t)dt-\frac{c}{b_1\sqrt{1+c^2}}\int_{\frac{y}{c}}^{\frac{x-y}{1-c}}h_2(t)dt,$$

$$v(x,y)=\frac{b_3}{b_1(1+c^2)}\left[\varphi_1(x)-\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]+\varphi_2(x)+\frac{c(1-2b_1c)}{2b_1(1+c^2)}\left[\varphi_2(x)-\right.$$

$$\left.-\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]-\frac{b_3}{b_1(1-c)}(y-cx)\left\{\frac{1-2b_1}{2b_3(1+c^2)}\left[\sqrt{1+c^2}\,h_2\left(\frac{x-y}{1-c}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c\varphi_2'\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]+\frac{1}{1+c^2}\left[\varphi_1'\left(\frac{x-y}{1-c}\right)-c\sqrt{1+c^2}\,h_1\left(\frac{x-y}{1-c}\right)\right]\right\}+$$

$$+\frac{b_3c}{b_1\sqrt{1+c^2}}\int_x^{\frac{x-y}{1-c}}h_1(t)dt-\frac{1-2b_1c}{2b_1\sqrt{1+c^2}}\int_x^{\frac{x-y}{1-c}}h_2(t)dt$$

§3　第一問題

第一問題是在x，y平面上求方程（Ⅰ）的解适合于

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left.\begin{array}{ll} u|_{y=\alpha x}=\varphi_1, & u|_{y=\beta x}=\varphi_2, \\ v|_{y=\alpha x}=\psi_1, & v|_{y=\beta x}=\psi_2. \end{array} \quad -\infty<x,\ y<+\infty. \right\} \tag{1}$$

这儿α,β是互异的实数，φ_i,ψ_i是三阶可微的函数，而且$\varphi_1(0)=\varphi_2(0),\psi_1(0)=\psi_2(0)$，$\varphi_1'(0)=\varphi_2'(0)$，$\psi_1'(0)=\psi_2'(0)$。

第一問題共有7个定解問題，α,β可取$0,1,\infty$；或不取$0,1,\infty$等值(*)。我們只做$\alpha=0,\beta=1$的情况。有些情况要假設$|\varphi_i|,|\psi_i|,|f_i|\leqslant M|x|^\mu$，$\mu\geqslant3$才唯一存在。

由(1)及(Ⅰ*)有

$$\frac{1}{2b_1}f_1(x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'(x)+f_2(x))+f_3(0)=\varphi_1(x), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1(0)-\frac{1-2b_1}{2b_1}\left[xf_1'(0)+f_2(0)\right]+f_3(x)=\varphi_2(x), \tag{3}$$

$$-\frac{b_3}{b_1}(xf_1'(x)+f_2(x))+f_4(x)=\psi_1(x), \tag{4}$$

$$-\frac{b_3}{b_1}(xf_1'(0)+f_2(0))+f_4(x)=\psi_2(x), \tag{5}$$

命

$$f_1(0)=f_2(0)=0,\ f_3(0)=\varphi_1(0),\ f_4(0)=\psi_1(0),\ f_1'(0)=\varphi_1'(0)$$

由(2)，(3)，(4)，(5)可以求得

$$f_1(x)=2b_1\varphi_1(x)-\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi_1(x)+\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi_2(x)+$$
$$+(1-2b_1)\varphi_1'(0)x-2b_1\varphi_2(0),$$

$$f_3(x)=\varphi_2(x)+\frac{1-2b_1}{2b_1}\varphi_1'(0)x,$$

$$f_4(x)=\psi_2(x)+\frac{b_3}{b_1}\varphi_1'(0)x,$$

$$xf_1'(x-y)+f_2(x-y)=y\left[2b_1\varphi_1'(x-y)-\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi_1'(x-y)+\right.$$
$$\left.+\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi'_2(x-y)+(1-2b_1)\varphi_1'(0)\right]-\frac{b_1}{b_3}\psi_1(x-y)+$$
$$+\frac{b_1}{b_3}\psi_2(x-y)+\varphi_1'(0)(x-y)$$

将f_i的表达式代入(Ⅰ*)得

(*)例如$\alpha=\infty$，約定$y=\alpha x$变成$x=0$，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$u=\varphi_1(x-y)+\varphi_2(y)-\frac{1-2b_1}{2}y\left[2\varphi_1{}'(x-y)-\frac{1-2b_1}{b_3}\psi_1{}'(x-y)+\right.$$
$$\left.+\frac{1-2b_1}{b_3}\psi_2{}'(x-y)-2\varphi_1{}'(0)\right]-\varphi_1(0).$$

$$v=\psi_1(x-y)+\psi_2(x)-\psi_2(x-y)-\frac{b_3}{b_1}y\left[2b_1\varphi_1{}'(x-y)-\right.$$
$$-\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi_1{}'(x-y)+\frac{b_1(1-2b_1)}{b_3}\psi_2{}'(x-y)+$$
$$\left.+(1-2b_1)\varphi_1{}'(0)\right]+\frac{b_3}{b_1}\varphi_1{}'(0)y.$$

§4　第二問題

第二問題是在x，y平面上求方程組（I）的解适合于

$$\left.\begin{array}{lll} u|_{y=\alpha x}=\varphi_1, & u|_{y=\beta x}=\varphi_2, & \\ v|_{y=\alpha x}=\psi', & v|_{y=\gamma x}=\psi_2, & -\infty<x,y<+\infty. \end{array}\right\} \quad (1)$$

这儿α，β，γ是互异的实数，φ_i，ψ_i是三阶可微的函数。

α，β，γ可取0，1，∞等值或不取0，1，∞等值。共有43个定解問題。我們只做α，β，$\gamma\neq 0$，1，∞的情形

設$|\varphi_i|$，$|\psi_i|\leqslant|M|x|^{\mu}$，$\mu\geqslant 3$.同时設$|f_i|\leqslant|x|^{\mu}$，$\mu\geqslant 3$.

由(1)及（I*）得

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1{}'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x))+$$
$$+f_3(\alpha x)=\varphi_1(x), \quad (2)$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\beta)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1{}'((1-\beta)x)+f_2((1-\beta)x)+$$
$$+f_3(\beta x)=\varphi_2(x), \quad (3)$$

$$-\frac{b_3}{b^1}(xf_1{}'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x))+f_4(x)=\psi_1(x), \quad (4)$$

$$-\frac{b^3}{b_1}(xf_1{}'((1-\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x))+f_4(x)=\psi_2(x), \quad (5)$$

由(2)及(4)有

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)+f_3(\alpha x)-\frac{1-2b_1}{2b_3}f_4(x)=\varphi_1(x)-\frac{1-2b_1}{2b_3}\psi_1(x).$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

上式对x求导数，再乘以x得

$$\frac{1}{2b_1}xf_1'(x)+\frac{\alpha}{1-\alpha}xf_3'\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}xf_4'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)=$$
$$=\frac{x}{1-\alpha}\varphi_1'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}x\psi_1'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right) \quad (6)$$

由(4)及(5)有

$$-\frac{b_3(\alpha-\gamma)}{b_1(1-\alpha)(1-\gamma)}xf_1'(x)+f_4\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-f_4\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)=$$
$$=\psi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\psi_2\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)。 \quad (7)$$

由(2)及(3)有

$$-\frac{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}{2b_1(1-\alpha)(1-\beta)}xf_1'(x)+f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-f_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}x\right)=$$
$$=\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)。 \quad (8)$$

由(7)，(8)得

$$\frac{2(\alpha-\beta)(1-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(1-\beta)}\left(f_4\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-f_4\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)\right)-$$
$$-(1-2b_1)\left(f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-f_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}x\right)\right)=$$
$$=\frac{2(\alpha-\beta)(1-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(1-\beta)}\left(\psi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\psi_2\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)\right)-$$
$$-(1-2b_1)\left(\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)\right)。 \quad (9)$$

由(6)及(8)有

$$\frac{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}xf_3'\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}xf_4'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right)+$$
$$+f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-f_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}x\right)=\frac{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left(\frac{x}{1-\alpha}\varphi_1'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}x\psi_1'\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right)+\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)。$$

以x除上式，再对x积分之得

$$\frac{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left(f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-\frac{1-2b_1}{2b_3}f_4\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right)+\int_0^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}}\frac{f_3(t)}{t}dt-$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$-\int_0^{\frac{\beta x}{1-\beta}}\frac{f_3(t)}{t}dt=\frac{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-2b_1}{2b_3}\psi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right)+\int_0^x\frac{1}{t}\left(\varphi_1\left(\frac{t}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{t}{1-\beta}\right)\right)dt. \qquad (10)$$

如果在开始时，对α,β及γ加限制，例如$0<\gamma\leqslant\frac{1}{2}$，$\alpha=\frac{a}{\gamma}$，$\beta=\frac{\gamma}{b}$，$a>b>1$，则$\frac{1}{1-\gamma}>\left|\frac{\alpha}{1-\alpha}\right|>\frac{\beta}{1-\beta}>\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|$。在(9)中将$\frac{x}{1-\gamma}$改写为$x$，则(9)及(10)可写成函数矩陣积分方程的形式。如果μ选取得够大时，可使这函数矩陣积分方程有唯一解存在。由定理D有

$$f_3(x)=\omega_3(x),\quad f_4(x)=\omega_4(x)。$$

同时可以求得

$$f_1(x)=2b_1\left[-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)+\frac{1-2b_1}{2b_3}\omega_4\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)+\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1-2b_1}{2b_3}\psi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)\right]$$

$$xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x)=-\frac{b_1}{b_3}(\psi_1(x)-\omega_4(x))$$

将f_i表示式代入(Ⅰ*)得

$$u=-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\omega_3(y)-\frac{1-2b_1}{1-\alpha}(y-\alpha x)\left\{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\omega_3'\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}\omega_4'\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\frac{1}{1-\alpha}\varphi_1'\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}\psi_1'\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)\right\}+$$

$$+\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)$$

$$v=\omega_4(x)-\omega_4\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)-\frac{2b_3}{1-\alpha}(y-\alpha x)\left\{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\omega_3'\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\right.$$

$$+\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}\omega'_4\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\frac{1}{1-\alpha}\varphi_1'\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)-$$

$$\left.-\frac{1-2b_1}{2b_3(1-\alpha)}\psi_1'\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)\right\}+\psi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)$$

§5 第三問題

第三問題是在xy平面上求方程(Ⅰ)的解u及v适合于

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} u|_{y=\alpha x}=\varphi_1, & u|_{y=\beta x}=\varphi_2, \\ v|_{y=\gamma x}=\psi_1, & v|_{y=\delta x}=\psi_2, \end{cases} \quad -\infty<x,y<+\infty \tag{1}$$

这儿$\alpha,\beta,\gamma,\delta$是互异的实数，$\varphi_i$，$\psi_i$是三阶可微的函綫。

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$可取0，1，∞等值或不取0，1，∞等值，共有26种定解問題，我們只做$\alpha=0,\beta,\gamma,\delta\neq0$，1，∞的情况。

由(Ⅰ*)及(1)有

$$\frac{1}{2b_1}f_1(x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'(x)+f_2(x))=\varphi_1(x), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\beta)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\beta)x)+f_2((1-\beta)x))+$$
$$+f_3(\beta x)=\varphi_2(x), \tag{3}$$

$$-\frac{b_3}{b_1}(xf_1'((1-\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x))+f_4(x)=\psi_1, \tag{4}$$

$$-\frac{b_3}{b_1}(xf_1'((1-\delta)x)+f_2((1-\delta)x))+f_4(x)=\psi_2. \tag{5}$$

这儿，設$|\varphi_i|$，$|\psi_i|\leqslant M|x|^{\mu}$，$\mu\geqslant3$. $|f_i|\leqslant M|x|^{\mu}$，$\mu\geqslant3$.

由(2)，(4)，(5)有

$$-\frac{b_3}{b_1}\gamma xf_1'((1-\gamma)x)+\frac{b_3}{b_1}\delta xf_1'((1-\delta)x)-$$
$$-\frac{b_3}{b_1(1-2b_1)}f_1((1-\gamma)x)+\frac{b_3}{b_1(1-2b_1)}f_1((1-\delta)x)=\psi_1(x)-\psi_2(x)+$$
$$+\frac{2b_3}{1-2b_1}(\varphi_1((1-\gamma)x)-\varphi_1((1-\delta)x))$$

上式除以x再积分之得

$$-\frac{b_3\gamma}{b_1(1-\gamma)}f_1((-\gamma)x)+\frac{b_3\delta}{b_1(1-\delta)}f_1((1-\delta)x)-$$
$$-\frac{b_3}{b_1(1-2b_1)}\int_0^{(1-\gamma)x}\frac{f_1(t)}{t}dt+\frac{b_3}{b_1(1-2b_1)}\int_0^{(1-\delta)x}\frac{f_1(t)}{t}dt=$$
$$=\int_0^x\frac{1}{t}\left(\psi_1(t)-\psi_2(t)+\frac{2b_3}{1-2b_1}(\varphi_1((1-\gamma)t)-\varphi_1((1-\delta)t))\right)dt \tag{6}$$

如果在开始时設$|1-\gamma|>|1-\delta|$，而且当μ取得足够大时，可以使(6)适合定理C的条件，于是有

$$f_1(x)=\omega_1(x)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

同时可以求得

$$xf_1'(x)+f_2(x)=-\frac{2b_1}{1-2b_1}\left(\varphi_1(x)-\frac{1}{2b_1}\omega_1(x)\right),$$

$$f_4(x)=\psi_1(x)+\frac{b_3}{b_1}\left(-\frac{2b_1}{1-2b_1}(\varphi_1((1-\gamma)x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2b_1}\omega_1((1-\gamma)x)+\gamma x\omega_1'((1-\gamma)x)\right)$$

$$f_3(x)=\varphi_2\left(\frac{x}{\beta}\right)-\frac{1}{2b_1}\omega_1\left(\frac{1-\beta}{\beta}x\right)-\frac{1-2b_1}{2b_1}\left\{-\frac{2b_1}{1-2b_1}\left(\varphi_1\left(\frac{1-\beta}{\beta}x\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2b_1}\omega_1\left(\frac{1-\beta}{\beta}x\right)\right)+x\omega_1'\left(\frac{1-\beta}{\beta}x\right)\right\}$$

将f_i表示式代入（Ⅰ*）得

$$u=\frac{1-2b_1}{2b_1}y\left(\omega_1'\left(\frac{1-\beta}{\beta}y\right)-\omega_1'(x-y)\right)+\varphi_1(x-y)-$$

$$-\varphi_1\left(\frac{1-\beta}{\beta}y\right)+\varphi_2\left(\frac{y}{\beta}\right),$$

$$v=\frac{b_3}{b_1(1-2b_1)}\left(\omega_1((1-\gamma)x)-\omega_1(x-y)\right)+\frac{b_3}{b_1}(\gamma x\omega_1'((1-\gamma)x)-y\omega_1'(x-y))+$$

$$+\frac{2b_3}{1-2b_1}\left(\varphi_1(x-y)-\varphi_2((1-\gamma)x)\right)+\psi_1(x)$$

§6　第 四 問 題

第四問題是在 $x\,y$平面上求方程組（Ⅰ）的解适合于

$$\begin{cases} u|_{y=\alpha x}=\varphi_1, & u|_{y=\beta x}=\varphi_2, \\ u|_{y=\gamma x}=\varphi_3, & v|_{y=\alpha x}=\psi_1 \end{cases}\qquad -\infty<x,y<+\infty \qquad (1)$$

这儿α，β，γ是互异的实数。φ_i，ψ_1是三阶可微的函数。

α，β，γ可取 0，1，∞或不取 0，1，∞。(1)中可以u和v的位置互調。第四問題共有35种情况。

我們考慮 $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$，1，∞的情况。設$|\varphi_i|$　$|\psi_1|$，$|f_i|\leqslant M|x|^{\mu}$　$\mu>3$。由（1）及（Ⅰ*）有

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x)+$$

$$+f_3(\alpha x)=\varphi_1(x), \qquad (2)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\beta)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\beta)x)+f_2((1-\beta)x)+$$
$$+f_3(\beta x)=\varphi_2(x), \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\gamma)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x))+$$
$$+f_3(\gamma x)=\varphi_3(x), \qquad (4)$$

$$-\frac{b_3}{b_1}(xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x)+f_4(x)=\psi_1(x) \qquad (5)$$

由(2)，(3)，(4)消去f_1，f_2'，f_2得

$$\frac{\beta-\gamma}{1-\gamma}f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-\frac{(\alpha-\gamma)(1-\beta)}{(1-\gamma)(1-\alpha)}f_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}x\right)+\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}f_3\left(\frac{\alpha}{1-\gamma}x\right)=$$
$$=\frac{\beta-\gamma}{1-\gamma}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)\right)-\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}\left(\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)-\varphi_3\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)\right). \qquad (6)$$

如果在开始时选取的μ够大，使(6)适合定理(A)之条件，则

$$f_3(x)=\omega_3(x).$$

同时还可以求得

$$f_1(x)=\frac{2b_1(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}\int_0^x\frac{1}{t}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}t\right)-\varphi_1\left(\frac{t}{1-\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\varphi_2\left(\frac{t}{1-\beta}\right)\right)dt$$

由于f_1及f_3的表示式，容易求得解是

$$u=\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\,\frac{\alpha x-y}{x-y}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}(x-y)\right)-\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-\beta}\right)\right)+\omega_3(y)-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\varphi_1\left(\frac{h-x}{1-\alpha}\right)$$

$$v=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2(\alpha-\beta)}\int_{x-y}^{(1-\alpha)x}\frac{1}{t}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}t\right)-\varphi_1\left(\frac{t}{1-\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\varphi_2\left(\frac{t}{1-\beta}\right)\right)dt+\frac{2b_3}{1-2b_1}\left(\omega_3(\alpha x)-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)-\varphi_1(x)\right)+$$
$$+\frac{2b_3(1-\beta)}{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}\frac{\alpha x-y}{x-y}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}(x-y)\right)-\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-\beta}\right)\right)+\psi_1(x)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

§7　第五問題

第五問題是在 x，y 平面上求方程組(Ⅰ)的解适合于

$$\begin{cases} u\big|_{y=\alpha x}=\varphi_1, & u\big|_{y=\beta x}=\varphi_2, \\ u\big|_{y=\gamma x}=\varphi_3, & v\big|_{y=\delta x}=\psi_1, \end{cases} \quad -\infty<x,\ y<+\infty. \tag{1}$$

这儿 α，β，γ，δ 是互异的实数，φ_i，ψ_1 是三阶可微的函数。

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 可取 0，1，∞或不取 0，1，∞等値，共有38个定解問題，我們只做 $\delta=1$，$\alpha,\beta,\gamma\neq 0,1,\infty$ 的情况，設

$$|\varphi_i|,\ |\psi_1|,\ |f_i|\leqslant M|x|^{\mu},\quad \mu>3.$$

由(Ⅰ*)及(1)有

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\alpha)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\alpha)x)+f_2((1-\alpha)x))+$$
$$+f_3(\alpha x)=\varphi_1(x), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\beta)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\beta)x)+f_2((1-\beta)x))+$$
$$+f_3(\beta x)=\varphi_2(x), \tag{3}$$

$$\frac{1}{2b_1}f_1((1-\gamma)x)-\frac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'((1-\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x)+$$
$$+f_3(\gamma x)=\varphi_3(x), \tag{4}$$

$$f_4(x)=\psi_1(x) \tag{5}$$

由(2)，(3)，(4)可以求得

$$\frac{\beta-\gamma}{1-\gamma}f_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right)-\frac{(\alpha-\gamma)(1-\beta)}{(1-\gamma)(1-\alpha)}f_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}x\right)+$$
$$+\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}f_3\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}x\right)=\frac{\beta-\gamma}{1-\gamma}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)-\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)\right)-$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}\left(\varphi_2\left(\frac{x}{1-\beta}\right)-\varphi_3\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)\right) \tag{6}$$

如果我們选取的 μ 是够大时，(6)可以适合定理 A 之条件，得

$$f_3(x)=\omega_3(x)。$$

同时有

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$f_1(x)=\frac{2b_1(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}\int_0^x\frac{1}{t}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}t\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_1\left(\frac{t}{1-\alpha}\right)+\varphi_2\left(\frac{t}{1-\beta}\right)\right)dt\ 。$$

由此易得解是

$$u=\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\ \frac{\alpha x-y}{x-y}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}(x-y)\right)-\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-\beta}\right)\right)+\omega_3(y)-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)+\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right),$$

$$v=\frac{2b_3}{1-2b_1}\left(\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)-\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}\int_0^{x-y}\frac{1}{t}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}t\right)-\varphi_1\left(\frac{t}{1-\alpha}\right)+\varphi_2\left(\frac{t}{1-\beta}\right)\right)dt-\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)\right)+$$

$$+\frac{2b_3(1-\beta)}{(1-2b_1)(\alpha-\beta)}\times\frac{\alpha x-y}{x-y}\left(\omega_3\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y)\right)-\omega_3\left(\frac{\beta}{1-\beta}(x-y)\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_1\left(\frac{x-y}{1-\alpha}\right)+\varphi_2\left(\frac{x-y}{1-\beta}\right)\right)+\psi_1(x).$$

§8 第六問題

第六問題是在x，y平面上求方程組(Ⅱ)的解适合于

$$\begin{cases}u|_{y=\alpha x}=\varphi_1(x), & u|_{y=\beta x}=\varphi_2(x),\\ u|_{y=\gamma x}=\varphi_3(x), & u|_{y=\delta x}=\varphi_4(x),\end{cases}\quad -\infty<x<+\infty, \tag{1}$$

这儿α，β，γ，δ是互异的实数，

α，β，γ，δ可取或不取-1，1，$\frac{1}{3}$等值。(1)可改为給定v的值，(1)总有6种取法，我們只做$\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{3}$的情形，設

$$|\varphi_i|\leqslant M|x|^{\mu},\qquad |f_i|\leqslant M|x|^{\mu},\ \mu>3\ 。$$

由(1)及(Ⅱ*)得

$$f_1(2x)+3xf_3(-2x)+f_4(-2x)=\varphi_1(x) \tag{2}$$

$$f_1\left(\frac{4}{3}x\right)+f_2\left(\frac{2}{3}x\right)=\varphi_2(x) \tag{3}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f_1((1+\gamma)x)+f_2((1-\gamma)x)+3\gamma x f_3((1-3\gamma)x)+f_4((1-3\gamma)x)=\varphi_3(x), \tag{4}$$

$$f_1((1+\delta)x)+f_2((1-\delta)x)+3\delta x f_3((1-3\delta)x)+f_4((1-3\delta)x)=\varphi_4(x), \tag{5}$$

由(2)、(4)、及(2)、(5)消去f_3得

$$\frac{2\gamma}{1-3\gamma}f_1(-x)+f_1\left(\frac{1+\gamma}{1-3\gamma}x\right)+f_2\left(\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}x\right)+\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}f_4(x)= =\varphi_3\left(\frac{x}{1-3\gamma}\right)+\frac{2\gamma}{1-3\gamma}\varphi_1\left(-\frac{x}{2}\right), \tag{6}$$

$$\frac{2\delta}{1-3\delta}f_1(-x)+f_1\left(\frac{1+\delta}{1-3\delta}x\right)+f_2\left(\frac{1-\delta}{1-3\delta}x\right)+\frac{1-\delta}{1-3\delta}f_4(x)= =\varphi_4\left(\frac{x}{1-3\delta}\right)+\frac{2\delta}{1-3\delta}\varphi_1\left(-\frac{x}{2}\right) \tag{7}$$

由(6)，(7)消去f_4得

$$\frac{2(\gamma-\delta)}{(1-3\gamma)(1-3\delta)}f_1(-x)+\frac{1-\delta}{1-3\delta}f_1\left(\frac{1+\gamma}{1-3\gamma}x\right)-\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}f_1\left(\frac{1+\delta}{1-3\delta}x\right)+ +\frac{1-\delta}{1-3\delta}f_2\left(\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}x\right)-\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}f_2\left(\frac{1-\delta}{1-3\delta}x\right)=\frac{1-\delta}{1-3\delta}\varphi_3\left(\frac{x}{1-3\gamma}\right)- -\frac{1-\gamma}{1-3\gamma}\varphi_4\left(\frac{x}{1-3\delta}\right)+\frac{2(\gamma-\delta)}{(1-3\gamma)(1-3\delta)}\varphi_1\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{8}$$

如果在一开始时，对γ、δ加上限制，例如命$\gamma=0$，$\delta>1$，則(8)及(3)可以写成函数矩陣方程的形式.如果我們选取的μ够大时，使得这一函数矩陣方程适合定理B之条件，立得

$$f_1(x)=\omega_1(x),$$
$$f_2(x)=\omega_2(x),$$

同时还可以求得f_3及f_4的表示式.将f_j的表示式代入(Ⅱ*)立得問題的解。

附記1.問題1至問題5有些定解問題是要用(Ⅱ)来求解。

附記2. Cauchy 問題不一定給定$u_n|_{y=cx}$及$v_n|_{y=cx}$的值.可改成沿方向l及g的方向导数在$y=cx$的給定值。

参 考 文 献

〔1〕 华罗庚、吴兹潛、林　伟：二阶两个自变数两个未知函数的常系数綫性偏微分方程組的标准型，科学通报，1964，No.12.pp.1100—1103。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

〔2〕 华罗庚、吳兹潛、林 伟：On the Classification of the System of Differential Equations of the Secona Order. Scisntia Sinca. Vol. XIV, No. 3, 1965. pp. 461—465.

〔3〕 吳兹潛、林 伟：常系数二阶两个自变数两个未知函数的綫性双曲方程組(Ⅰ). 中山大学学报(自然科学)。1964.No.3.pp.290—309.

Системы лиенйных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами(Ⅱ)

У Цзы—цянь Линь Вэй

Резюме

В настоящей Статье мы рассмотрим уравнений с частными производными

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\b_3 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial_2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0,$$

здесь $b_3=b_1^2-b_1+\frac{1}{4}\neq 0$, $b_1\neq 0$, и b_1—вещественное. Это—канонический вид систем линейных уравнений второго порядка гиперболического типа с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которых имеет три различного вещественного корня. Мы поставляем семь родов краевых задачей и доказываем существование и единственность ихрешений.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net