第31卷 第1期
1992年

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.31 No.1
1992

·研究简报·

满足置换恒等式的拟正则半群的半格分解

龙冬阳

(数学系)

摘　要　讨论满足置换恒等式的半群的半格分解问题，证明了每一满足置换恒等式的半群可唯一分解为Archimedean 半群的半格；每一满足置换恒等式的拟正则半群可分解为矩形带群的幂零扩张的半格.

关键词　置换恒等式，半格，矩形带群

在半群代数理论研究中，半群的分解理论占有很重要的地位，诸如Grolsot分解理论；完全正则半群关于完全单半群的半格分解；交换半群关于Archimedean半群的半格分解[1,2]等结果。本文讨论满足置换恒等式的半群的分解。推广了Tamura和Kimura关于交换半群的Archimedean半群的半格分解定理，证明了满足置换恒等式的半群可唯一分解为Archimedean半群的半格，同时还讨论了满足置换恒等式的拟正则半群的若干特例的半格分解性质。

有关定义、术语和符号，可参见文献[1～3]。

设S是一个半群。如果$(\forall a,b\in S)(\exists m\in \mathrm{N})a^m\in SbS$,则称$S$为Archimedean半群；如果$S\simeq B\times G$，其中$G$是一个群，$B$是一个矩形带(右零半群，左零半群)，则称$S$为矩形带群(左群，右群)。设$A\subseteq S$是非空子集。如果$(\forall a,b\in A)ab=ba$，则称$A$满足交换性；如果$(\forall a,b,c\in A)abc=acb$，则称$A$满足左正规性；如果$(\forall a,b,c\in A)abc=bac$，则称$A$满足右正规性；如果$(\forall a,b,c,d\in A)abcd=acbd$，则称$A$满足正规性的；如果$(\exists n\in \mathrm{N}(n\geqslant 2))$$(\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in A)$

$$x_1x_2x_3\cdots x_n=x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_n} \tag{1}$$

其中$(p_1\,p_2\,p_3\cdots p_n)$是$(1\ 2\ 3\cdots n)$的一个非平凡置换，则称$A$满足置换恒等式的。特别地，当$A$是一个带时，如果$A$满足交换(左正规，右正规，正规)性，就称$A$为交换带或半格(左正规带，右正规带，正规带)。

先讨论一般地满足置换恒等式(1)的半群的分解。

设$(\forall a,b\in S)\ b\in S^1aS^1$，则称$a$整除$b$，记为$a|b$。设$S$满足置换恒等式(1)。定义$S$上关系$\eta$如下：

$$a\eta b\Leftrightarrow(\exists m\in \mathrm{N})\ a|b^m,\ b|a^m.$$

本文1989年10月20日收到

可以证明η是S上的最小半格同余。先看一个引理

引理1　设半群S满足置换恒等式(1)。则

i) $(\forall a,b\in S)a|b\Rightarrow(\forall i\in \mathrm{N})(\exists m\in \mathrm{N})a^i|b^m$;

ii) $(\forall a,b,c\in S)a|b^m,b|c^l\Rightarrow(\exists h\in \mathrm{N})\ a|c^h$,

iii) $(\forall a,b,c\in S)a|b^m\Rightarrow(\exists h\in \mathrm{N})\ ac|(bc)^h,\ ca|(cb)^h$.

定理1　设半群S满足置换恒等式(1)，则η是S上的最小半格同余。

证明　据η的定义与引理1易验证η是等价关系。再由引理1可验证$(\forall a,b,c\in S)a\eta b\Rightarrow ac\eta bc,ca\eta cb$，即$\eta$是同余。而显然$(\forall a\in S)a\eta a^2$。这说明$\eta$是半格同余。设$\rho$是$S$上的一个半格同余，$a\eta b$。于是$(\exists m\in \mathrm{N})(\exists u,v,x,y\in S^1)a^m=ubv,\ b^m=xay$。由$a\rho a^2\rho a^m$，$b\rho b^2\rho b^m$，$ab\rho ba$易推得$a\rho b$，即$\eta\subseteq\rho$，$\eta$为最小半格同余。

定理2　设半群S满足置换恒等式(1)。则S可唯一分解为Archimedean半群$S_\alpha(\alpha\in Y)$的半格，且$Y\simeq S/\eta$。

证明　由定理1知S有半格分解$S=U\{T_\alpha;\alpha\in S/\eta\}$。可以验证$T_\alpha$是Archimedean半群。因此$S$可分解为Archimedean半群的半格，证唯一性。设$S=U\{S_\alpha;\ \alpha\in Y\}$是Archimedean半群$S_\alpha$的半格，可验证：$S_\alpha(\alpha\in Y)$必是一个$\eta$同余类，而且每一个$\eta$同余类必是某一个$S_\alpha$。详细证明过程从略，

下面讨论满足置换恒等式的拟正则半群的半格分解。

设S是拟正则半群，对于$a\in S$，令$i_a=\min\{m\in \mathrm{N};a^m$为正则元$\}$，于是，定义$S$上的一种Green关系$\mathscr{L}^*,\mathscr{R}^*,\mathscr{H}^*,\mathscr{D}^*,\mathscr{J}^*$如下[3]：

$$a\mathscr{L}^*b\Leftrightarrow Sa^{i_a}=Sb^{i_b},\qquad a\mathscr{R}^*b\Leftrightarrow a^{i_a}S=b^{i_b}S,$$

$$\mathscr{H}^*=\mathscr{L}^*\cap\mathscr{R}^*,\quad \mathscr{D}^*=\mathscr{L}^*\vee\mathscr{R}^*,\qquad a\mathscr{J}^*b\Leftrightarrow Sa^{i_a}S=Sb^{i_b}S$$

则$\mathscr{L}^*$，$\mathscr{R}^*$，$\mathscr{H}^*$，$\mathscr{D}^*$，$\mathscr{J}^*$是S上的等价关系。分别用$E(S)$与$Reg(S)$表示半群S的幂等元集与正则元集。

定理3　设拟正则半群S满足置换恒等式(1)，则

i) S是GV-半群；

ii) $Reg(S)$是S的子半群，且$Reg(S)$是满足正规性的。

证明　i) 利用置换恒等式(1)，可直接验证每一个正则元a都是完全正则的。因此S是GV-半群。

ii) 利用置换恒等式(1)可验证$E(S)$是一个带。设$a,b\in Reg(S)$，$a^*\in\vee(a)$，$b^*\in\vee(b)$。则易知b^*a^*是ab的逆元。故$ab\in Reg(S)$，即$Reg(S)$是子半群。再由[4]中定理3知$Reg(S)$满足正规性。详细证明过程从略。

定理4　设拟正则半群S满足置换恒等式(1)。则S可唯一分解为完全Archimedean半群的半格，且$\eta=\mathscr{J}^*$。

证明　据定理2，只需证明每一个η同余类都是完全Archimedean半群即可。据定理3知，S是完全拟正则的，因此设S_α是一个η同余类，易验证S_α是完全Archimedean半群。于是可设$S=U\{T_\alpha;\ \alpha\in S/\mathscr{J}^*\}$是完全Archimedean半群$T_\alpha$的半格分解，据定理1，$\eta\subseteq\mathscr{J}^*$，反之，$a\mathscr{J}^*b$，则直接可验证$a\eta b$，所以$\mathscr{J}^*\subseteq\eta$，$\eta=\mathscr{J}^*$。

据定理3和下面的引理2易得定理5和定理6

引理 2[3] 设S是GV-半群。则

i) $(\forall e, f\in E(S))(\exists m\in \mathrm{N})(ef)^m=(ef)^{m+1}\Rightarrow S$是矩形带群的幂零扩张的半格;

ii) $(\forall e, f\in E(S)(\exists m\in \mathrm{N})(ef)^m=(efe)^m\Rightarrow S$是左群的幂零扩张的半格;

iii) $(\forall e, f\in E(S))(\exists m\in \mathrm{N})(ef)^m=(fef)^m\Rightarrow S$是右群的幂零扩张的半格。

定理 5 设拟正则半群S满足置换恒等式(1)。则S是矩形带群的幂零扩张 的半格。

定理 6 设拟正则半群S满足置换恒等式(1)。则

i)若$x_1=x_{p_1}$, $x_n\neq x_{p_n}$, 则S是左群的幂零扩张的半格;

ii)若$x_1\neq x_{p_1}$, $x_n=x_{p_n}$, 则S是右群的幂零扩张的半格。

据[4]中定理 6,则有推论

推论 1 设拟正则半群S满足置换恒等式(1)。则

i) 若$x_1\neq x_{p_1}$, $x_n\neq x_{p_n}$, 则$Reg(S)$满足交换性;

ii) 若$x_1=x_{p_1}$, $x_n\neq x_{p_n}$, 则$Reg(S)$满足左正规性;

iii) 若$x_1\neq x_{p_1}$, $x_n=x_{p_n}$, 则$Reg(S)$满足右正规性;

ix) 若$x_1=x_{p_1}$, $x_n=x_{p_n}$, 则$Reg(S)$满足正规性。

最后给出拟正则半群S满足置换恒等式(1)后其Green关系的某些特性。证明从略。

定理 7 设拟正则半群S满足置换恒等式(1)。则

i) 若$x_1\neq x_{p_1}$, $x_n=x_{p_n}$, 则每一个$\mathscr{L}^*$类中有且仅有一个幂等元;

ii) 若$x_1=x_{p_1}$, $x_n\neq x_{p_n}$, 则每一个$\mathscr{R}^*$类中有且仅有一个幂等元;

iii) 若$x_1\neq x_{p_1}$, $x_n\neq x_{p_n}$, 则每一个$\mathscr{L}^*$类中与每一个$\mathscr{R}^*$ 类中有且仅有一个幂等元。

参 考 文 献

1 Clifford A H,Preston G B. The Algebraic Theory of Semigroups,Math. Surveys of the American Math, Soc 7,1961,1967

2 Howie J M.An Introduction to Semigroup Theory,Academic Press,1976

3 Bogdarovic S.Semigroups with a System of Subsemigroups,Novi Sad,1985

4 Yamada M. Note on the Structure of Regular Semigroups,Proc. Japan Acad.1966, 43: 136~140

5 Yamada M.Regular Semigroups Whose Idempotents Satisfy Permutation Identities,Pacific J of Math,1967, 21(2):317~392

On Semilattice Decompositions of Eventually Regular Semigroups with Permutation Identities

*Long Dongyang**

Abstract We prove that every semigroup with permutation identities is uniquely expressible as a semilattice of Archimedean semigroups,and that every eventually regular semigroup with permutation identities is a semilattice of nil-extension of rectangular groups.

Keywords permutation identities, semilattice, rectangular groups

* Department of Mathematics