關於婁五納 (Löwner) 微分方程式的幾種單葉映射*

林　偉

（數 學 系）

由 Голузин 的論文[1]，我們知道下面定理：

定理 A：任與一沒有外點，包含點 $W=0$ 及不包含點 $W=\infty$ 的以有限條約當割綫為其邊界的單連通區域 B_0，可以對應地建立一複數函數 $k(t)$，它在 $0\leqslant t<+\infty$ 除了有限個第一類不連續點外是連續的，且模為 1，使得單葉映射圓 $|z|<1$ 為區域 B_0 的函數 $W=f(z)$，$f(0)=0$，$f'(0)>0$，可用下式表示：

$$f(z)=\lim_{t\to\infty}\beta e^{t}f(z.t),\qquad \beta=f'(0)$$

此處 $f(z.t)$ 是在 $0<t<+\infty$ 中微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-f\frac{1+kf}{1-kf}\tag{1}$$

滿足初始條件：$f\,|_{t=0}=z$ 的解

在定理 A 中，方程 (1) 藉助函數

$g(z_1.t)=g(z.0)$，$z_1=f(z.t)$，$g(0.t)=0$，$g'_z(0.t)=\beta e^{t}>0$ 聯系於方程

$$\frac{\partial g}{\partial t}=z\frac{\partial g}{\partial z}\frac{1+kz}{1-kz}\tag{2}$$

函數 $W=g(z.t)$ 單葉保角映射圓 $|z|<1$ 為區域 B_t，設 B_0 的邊界 L 表為 $W=W(t)$，$W(t)$ 是確定在 $0\leqslant t<+\infty$ 的分段連續函數，當 t 從 $0\to\infty$ 時，點 $W(t)$ 連續單調沿 L 收縮於點 $W=\infty$，則 B_t 為從整個平面除去割綫 L_t：$W=W(\tau)$ $(t\leqslant\tau<+\infty)$ 的區域，當 $t'<t''$ 時，區域 $B_{t'}$ 被包含在 $B_{t''}$ 中且不與 $B_{t''}$ 一致，顯然，割綫 L_t 上的點

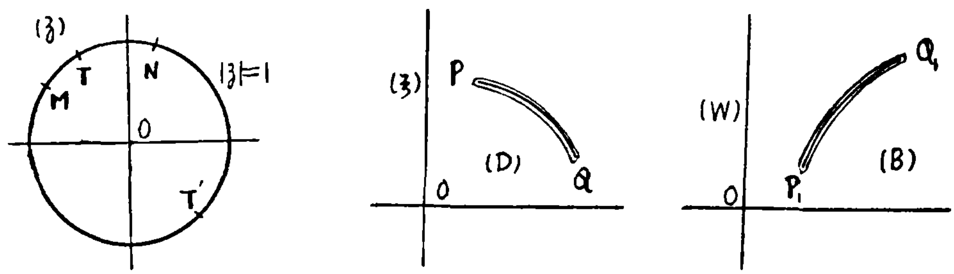
---

*本文是作者 1956 年在劉俊賢教授指導下所作畢業論文的一部份。（現在是本校數學系研究生）。

與 τ 單葉對應。方程（1）被稱爲 Löwner 方程，在單葉函數論的研究中起巨大作用，我們稱上述函數 $k(t)$ 爲 Löwner 方程的單葉保角映射的特性函數，本文擬研究特性函數 $k(t)=\pm e^{iv}$, $k(t)=e^{-it}$, $k(t)=e^{-i(\mu t+v)}$ 的情況，這裡 μ，ν 是任意實常數。

預備定理 設沒有外點的單連通區域D,B分別以有弧長的約當曲綫(PQ),(P_1Q_1)爲邊界（圖一（b）），若 D, B 分別由函數 $\xi=\varphi(z)$, $W=f(z)$ 與單位圓 $|z|<1$ 構成單葉保角映射，且在此映射下邊界上各點對應於圓周 $|z|=1$ 上同二點，則 $W=f(\varphi^{-1}(\xi))=\psi(\xi)$ 爲一綫性變換，卽存在一綫性變換將區域 D, B 相互映射。

証：邊界 (PQ), (P_1Q_1) 爲約當曲綫，故函數 $\xi=\varphi(z)$, $W=f(z)$ 也分別雙方單值連續映射圓周 $|z|=1$ 爲曲綫 (PQ), (P_1Q_1)，區域 D, B 沒有外點，按黎曼定理[4]的做法（先由二次根式 $\sqrt{\frac{\xi-P}{\xi-Q}}$ 和 $\sqrt{\frac{W-P_1}{W-Q_1}}$ 映射 D 和 B 爲有外點的區域）曲綫



(a) (b)

（圖 一）

(PQ), (P_1Q_1) 應畫二回，由假設，端點 P, Q 和 P_1, Q_1 對應於圓 $|z|=1$ 上同二點，令爲 M, N（圖一（a）），於是在映射 $\xi=\varphi(z)$, $W=f(z)$ 下在圓周 $|z|=1$ 上畫弧 $\widehat{MTN}$ 時，則在 ξ, W 平面上對應畫曲綫 (PQ), (P_1Q_1) 之一邊，畫弧 $\widehat{MT'N}$ 時，對應畫 (PQ), (P_1Q_1) 之另一邊，但邊界各點對應 $|z|=1$ 上同二點，故 $W=f(\varphi^{-1}(\xi))=\psi(\xi)$ 非但雙方單值映射 D 爲 B, 同時也雙方單值映射其邊界，卽函數 $W=\psi(\xi)$ 雙方單值保角映射 ξ 平面爲 W 平面，是爲一綫性變換。

註：容易証明，若特性函數 $k(t)$ 是正則的，則方程（2)的所有映射 $|z|<1$ 爲沒有外點的單連通區域（其割綫沿 t 連續單調收縮）的解，映射圓周 $|z|=1$ 爲解析約當綫弧，弧上每點都對應 $|z|=1$ 上同二點，按預備定理，則所有這些解可通過綫性變換互相獲得。

以 $[|z|<1, f(z)]$ 表 $f(z)$ 映射圓 $|z|<1$ 所成的區域，則我們有下列定理：

定理 1 在定理 A 中，若特性函數 $k(t)=P(t)e^{iv}$，ν 爲任一實常數，$P(t)$ 取 $+1$ 或 -1，其不連續點僅有限個，則對應區域 $B_0=\left[|z|<1, f(z)=\dfrac{\beta z}{e^{i2v}z^2-ce^{iv}z+1}\right]$（$\beta>0$，$c$ 爲 $|c|\leq 2$ 之一個實數）爲整個平面除去射綫割綫：$\left(e^{-iv}\dfrac{\beta}{2-c}, e^{-iv}\infty\right)$，$\left(e^{-iv}\dfrac{-\beta}{2+c}, -e^{-iv}\infty\right)$；反之也然。

註：此結果龔昇已於1953年從另一方面獲得。[8]

證：先察 $v=0$

(i) 必要性　若 $k(t)=P(t)$，則方程(2)對應之常微分方程爲

$$dt+\frac{(1-kz)\,dz}{z(1+kz)}=0$$

積之，得通積分

$$g_0(z,t)=\frac{e^t z}{(1+kz)^2}=C \tag{3}$$

初始條件：$z=0$，$g(z,t)=0$ 爲方程(2)的特征綫，故滿足條件 $g(0,t)=0$，$g_z'(0,t)>0$ 方程(2)之解爲 $W=g(z,t)=\Psi(g_0)$，Ψ 爲任一可微函數 $\Psi(0)=0$，$\Psi'(0)>0$。

由二次有理分式的幾何性質[2]，函數(3)單葉保角映射圓 $|z|<1$ 爲全 g_0 平面除去割綫 l_t：$g_0=\dfrac{ke^\tau}{4}(t\leq\tau<\infty)$，$l_t$ 爲實軸上綫段 $\left(\dfrac{ke^t}{4}, \infty\right)$，綫段上的點與 τ 單葉對應，當 t 從 $0\to\infty$ 時端點 $g_0=\dfrac{ke^t}{4}$ 從 $\dfrac{k}{4}\to\infty$。另一方面函數 $g(z,t)=\Psi(g_0)$ 單葉保角映射 $|z|<1$ 爲沒外點的單連通區域 B_t，其邊界 L_t 應爲 g_0 平面割綫 l_t 的映像，表爲 $W=\Psi\left(\dfrac{ke^\tau}{4}\right)$ 由定理 A 區域 B_t 的性質，L_t 上的點與 τ 單葉對應，因 l_t 也如此，所以按預備定理及其註，作爲方程(2)的解 $g(z,t)$ 與 $g_0(z,t)$ 的關係，函數 $W=\Psi(g_0)$ 必爲一綫性變換，注意及 $\Psi(0)=0$，$\Psi'(0)>0$ 則得

$$\Psi(g_0)=\frac{\beta g_0}{1-rg_0},\qquad \beta=\Psi'(0)>0$$

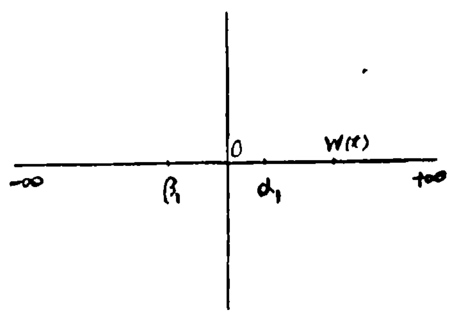
故方程(2)滿足定理 A 的要求的解必爲

$$g(z,t)=\frac{\beta g_0}{1-rg_0}=\frac{\beta e^t z}{z^2-(re^t\mp 2)z+1}$$

$\therefore\ f(z)=\lim\limits_{t\to\infty}\beta e^t f(z,t)=g(z,0)=\dfrac{\beta z}{z^2-cz+1}$，$c=r\mp 2$，函數 $W=f(z)$ 爲一二次有理分式，其同值點互換投射關係爲 $-\beta z'z+\beta=0$ 以 $z=\pm 1$ 爲重點，令 $W=f(z)$ 的極點爲 λ，μ，則 $\lambda+\mu=c$，按同值點的性質，$(\lambda,\mu,+1,-1)=-1$，又 λ，μ 其中必有一在 $|z|=1$ 上（$|z|=1$ 的像爲割綫 L_0，它通過無窮遠點），於是，λ，μ 同在圓周 $|z|=1$ 上，並對稱於實軸，故 $c=\lambda+\mu$ 爲實數，且 $|c|\leqslant 2$。

(ii) 充分性　若 $B_0=\left[|z|<1,\ f(z)=\dfrac{\beta z}{z^2-cz+1}\right]$，$\beta>0$，$c$ 爲 $|c|\leqslant 2$ 之一實數，則按二次有理分式的幾何性質，B_0 爲全平面除去實軸上綫段 $(-\infty,\beta_1]$。$[\alpha_1,+\infty)$，$\alpha_1=\dfrac{\beta}{2-c}$，$\beta_1=\dfrac{-\beta}{2+c}$，把 $\overline{\alpha_1,+\infty}$，$\overline{\beta_1,-\infty}$ 看爲組成割綫 L_0 之二約當割綫，則按 Гоиузин 的做法，區域 B_t 沿 t 的變化可有二情況（圖二）：

(a) t 遞增，割綫 $W=W(t)$ 從 $\alpha_1\to+\infty$ 後由 $\beta_1\to-\infty$。此時函數 $g(z,t)=\dfrac{\beta e^t z}{(z+1)^2-(2+c)e^t z}$ 單葉保角映射 $|z|<1$ 爲區域 B_t，當 t 從 $0\to t_1=\ln\dfrac{4}{2+c}$ 時，割綫 $W(t)=\dfrac{\beta e^t}{4-(2+c)e^t}$ 從 α_1 沿正實軸收



（圖　二）

縮於 $W=\infty$；同樣函數 $g(z,t)=\dfrac{\beta e^t z}{(z-1)^2}$ 單葉保角映射 $|z|<1$ 爲區域 B_t，當 t 從 $t_1\to\infty$ 時對應割綫 $W(t)=\dfrac{-\beta e^t}{4}$ 從 $W=\beta_1$ 沿負實軸收縮於點 $W=-\infty$，故具有方向點要素 $g(0,t)=0$，$g_z'(0,t)>0$ 單葉映射圓 $|z|<1$ 爲 B_t 的函數爲

$$g(z,t)=\begin{cases}\dfrac{\beta e^t z}{(z+1)^2-(2+c)e^t z} & 0\leqslant t<t_1\\[2ex] \dfrac{\beta e^t z}{(z-1)^2} & t_1\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

直接計算 $\dfrac{\partial g}{\partial t}$，$\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 則它滿足方程(2)，此時特性函數

$$k(t)=\begin{cases}+1 & 0\leqslant t<t_1\\ -1 & t_1\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

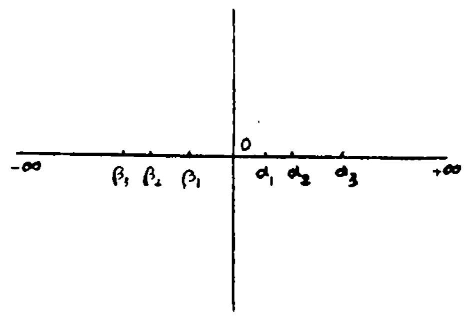
爲一具有一個第一類不連續點的實函數。

(b) t 遞增，割綫 $W=W(t)$ 從 $\beta_1\to-\infty$ 後由 $\alpha_1\to+\infty$。此時對應函數爲

$$g(z.t)=\begin{cases}\dfrac{\beta e^t z}{(z-1)^2+(2-c)e^t z} & 0\leqslant t<t_1=\ln\dfrac{4}{2-c}\\[2ex] \dfrac{\beta e^t z}{(z+1)^2} & t_1\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

它同樣滿足方程 (2)，不過特性函數 $k(t)=-1$ $(0\leqslant t<t_1)$, $k(t)=+1$ $(t_1\leqslant t<+\infty)$。

在一般情況，割綫 L 的組成爲下面類型：若割綫的方程爲 $W=W(t)$，則當 t 從 $0\to t_1$ 時。$W(t)$ 從 $\alpha_1\to\alpha_2$(或 $\beta_1\to\beta_2$)，t 從 $t_1\to t_2$ 時，$W(t)$ 從 $\beta_1\to\beta_2$（或 $\alpha_1\to\alpha_2$)，t 從 $t_2\to t_3$ 時，$W(t)$ 從 $\alpha_2\to\alpha_3$(或 $\beta_2\to\beta_3$)，……等。其中正數 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots\cdots<\alpha_n$ 和負數 $\beta_1>\beta_2>\cdots\cdots>\beta_m$ 除 α_1,β_1 外爲任意預先選定的，此時割綫作 $n+m-1$ 次左右跳動（圖三）。仿前面同樣可證實我們的定理，此時特性函數仍取 $+1$ 或 -1，有有限個不連續點，對應於 $t_1, t_2\cdots\cdots t_{n+m-1}$。



（圖　三）

這樣一來，我們便証明了定理在 $v=0$ 的情況。注意及函數 $W=e^{-iv}f(e^{iv}z)$ 和 $W=f(z)$ 的區域可經旋轉一定角 v 而重合，則在任一 v 定理也成立，定理證畢。*

例如

若 $k(t)=\begin{cases} i & 0\leqslant t<t_1\\ -i & t_1\leqslant t<t_2\\ i & t_2\leqslant t<+\infty\end{cases}$　則對應 $g(z.t)=\begin{cases}\dfrac{\beta e^t z}{-z^2-2i\left(\dfrac{m}{2}e^t-1\right)z+1}\\[2ex] \dfrac{\beta e^t z}{-z^2+2i(2e^{-t_2}e^t-1)z+1}\\[2ex] \dfrac{\beta e^t z}{(1+iz)^2}\end{cases}$

---

*我們可給必要性另一証明，若 $g(z.t)=\beta e^t\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)z^n$, $F(\zeta.t)=\dfrac{\beta e^t}{g\left(\dfrac{1}{\zeta}.t\right)}+a_2(t)=\zeta+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{b_n(t)}{\zeta^n}$ 則當 $k(t)=\pm1$ 時，$b_2(t)=a_2^2(t)-a_3(t)=1$，$\therefore g(z.t)=\dfrac{\beta e^t z}{z^2-a_2(t)z+1}$，$a_2(0)=-2\int_0^{\infty}e^{-\tau}k(\tau)d\tau$，爲實數，且 $|a_2(0)|\leqslant 2$。

其中 $m=4\,(e^{-t_1}-e^{-t_2})$, $0<m<4$, $\therefore f(z)=g(z,0)=\dfrac{\beta z}{e^{i\pi}\,z^2-ce^{i\frac{\pi}{2}}z+1}$,

$c=2\left(\dfrac{m}{2}-1\right)$，爲實數且 $|c|\leqslant 2$。

定理 II 在定理 A 中，若特性函數 $k(t)=e^{-it}$, 則 $B_0=\left\{|z|<1,\ f(z)=\dfrac{\beta z}{(1-iz)^{1+i}}=\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n\right\}$ $(\beta>0,\ |c_n|<n)$ 爲全平面除去螺旋割綫 L:

$r=\beta\,e^{-\frac{\pi}{2}}e^{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\leqslant\varphi<+\infty$。反之也然。

證：(I)必要性 若 $k(t)=e^{-it}$, 則方程（2）對應之常微分方程爲

$$\frac{d\,t}{1-e^{-it}z}+\frac{d\,z}{z(1+e^{-it}z)}=0 \text{ 作變換 } z=e^{Z} \text{ 便得}$$

$$\frac{d\,Z}{d\,t}+\frac{1+e^{Z-it}}{1-e^{Z-it}}=0 \text{ 令 } u=Z-it \text{ 得}$$

$$-\frac{d\,(e^{u}+i)}{(e^{u}+i)}+\frac{d\,u}{1+i}+d\,t=0$$

積之，並以 $u=ln z-it$ 代入便得通積分

$$g_0(z,\,t)=\frac{ze^{t}}{(1-ie^{-it}z)^{1+i}}=C \qquad (4)$$

它以點 $z_0=e^{it}$, $-ie^{it}$ 爲支點，$|z_0|=1$, z 畫圓 $|z|=\rho<1$ 時，g_0 平面對應畫一閉曲綫，設 $z_1=\rho e^{i\theta_1}, z_2=\rho e^{i\theta_2}$ 爲圓 $|z|=\rho$ 上任二點，其幅角可寫爲 $\theta_1=\theta-\theta_0, \theta_2=-\theta-\theta_0$, $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}-t$, 若不然設 $\theta_1+\theta_2=2\alpha_0$, 作坐標變換 $\theta'=\theta-(\theta_0+\alpha_0)$ 便可達到，設 $g_0(z_1,t)=g_0(z_2,t)$ 則

$$\left(\frac{1-\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}}\right)=\left(\frac{\rho e^{i(\theta-\theta_0)}}{\rho e^{i(-\theta-\theta_0)}}\right)^{\frac{1}{1+i}}=\left(e^{i2\theta}\right)^{\frac{1-i}{2}}=e^{\theta+i\theta}$$

$$1=\left|\frac{1-\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}}\right|=e^{\theta}$$

$$\therefore\ \theta=0,\ \theta_1=\theta_2=-\theta_0 \qquad \therefore\ z_1=z_2$$

因之函數(4)在圓周 $|z|=\rho$ 上單葉，按雙方單值原則[4]函數（4）單葉保角映射圓 $|z|\leqslant\rho$ 爲 W 平面某閉區域，令 $\rho\to 1$，便得 $g_0(z,t)$ 在 $|z|<1$ 的單葉性。$|z|=1$ 時函數

$$g_0(z.t)=re^{i\varphi}=\frac{e^te^{i\theta}}{(1+e^{i(-\frac{\pi}{2}+\theta-t)})^{1+i}}$$

$$=e^te^{i\theta}\Big/\operatorname{epx}(1+i)\left(ln2\left|\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+\theta-t}{2}\right|+i\frac{-\frac{\pi}{2}+\theta-t}{2}\right)$$

$$\therefore\begin{cases}r=e^{-\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\theta+t}{2}}\Big/2\left|\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta-t}{2}\right)\right|\\ \varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta+t}{2}-ln\,2\left|\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta-t}{2}\right)\right|\end{cases}$$

易証 φ 在 $\theta=t-\frac{\pi}{2}$，$\theta=t+\frac{3}{2}\pi$ 取最大值 $\varphi=+\infty$，在 $\theta=t$ 取最小值 $\varphi=t+\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}$，故 z 畫 $|z|=1$ 時，g_0 對應畫螺旋綫 l_t: $r=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{\varphi}$，$t+\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\leqslant\varphi<+\infty$. $t\leqslant\theta\leqslant t+\frac{3}{2}\pi$ 對應 l_t 之一邊，$t-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant t$ 對應 l_t 之另一邊。

仿定理 I 的證明，方程 (2)滿足定理 A 的解必爲

$$g(z.t)=\psi(g_0)=\frac{\beta g_0}{1-\gamma g_0}$$

其極點 $\frac{1}{\gamma}$ 在 l_0 上。由 $k(t)=e^{-it}$ 在 $(0.\infty)$ 上連續，g_0 平面的割綫僅爲 l_0 一支，注意及 W 平面區域 B_t 的單連通性和其割綫 L_t 沿 t 的連續收縮性，割綫 L_t 與 l_t 的無窮遠端點應相對應，所以函數 $W=\psi(g_0)$ 的極點 $\frac{1}{\gamma}=\infty$，$\gamma=0$，故

$$g(z.t)=\beta\,g_0=\frac{\beta e^tz}{(1-ie^{-it}z)^{1+i}}$$

$$W=f(z)=g(z.0)=\frac{\beta z}{(1-iz)^{1+i}}=\beta\sum_{n=t}^{\infty}C_nz^n$$

它映射 $|z|<1$ 爲全 W 平面除去螺旋割綫 L: $r=\beta e^{-\frac{\pi}{2}}e^{\varphi}$，$\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\leqslant\varphi<+\infty$

由牛頓二項式定理展開式係數 $C_n=(i)^{n-1}\dfrac{(1+i)(2+i)\cdots(n-1+i)}{(n-1)}$

$$\therefore\quad |C_n|<n,\ (n\geqslant 2)$$

(II) 充份性 若 $B_0=\left[\,|z|<1, f(z)=\dfrac{\beta z}{(1-iz)^{1+i}}\right]$，$\beta>0$，它爲全平面除去螺旋割綫 $L: r=\beta e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\varphi}$，$\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\leqslant\varphi<+\infty$，$B_t$ 沿 t 的變化僅有一情况：若割綫 $L_t: W=W(t)$，則當 t 從 $0\to\infty$ 時，點 $W=W(t)$ 沿 L 從 $W_0=\beta e^{-\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\right)}\to W=\infty$，顯然函數 $W=g(z,t)=\dfrac{\beta e^{t}z}{(1-ie^{-it}z)^{1+i}}$ 映射 $|z|<1$ 爲區域 B_t，且具有方向點要素 $g(0,t)=0$，$g_z'(0,t)>0$，它是唯一確定的直接計算 $\dfrac{\partial g}{\partial z}$，$\dfrac{\partial g}{\partial t}$ 則 $W=g(z,t)$ 滿足方程 (2)，此時特性函數 $k(t)=e^{-it}$。定理證畢。

注意，定理中特性函數 $k(t)=e^{-it}$ 所對應函數 $f(z)=\dfrac{\beta z}{(1-iz)^{1+i}}$ 正爲 M.Špacek 在研究星形函數理論中所攷察的函數的一種 [5]，事實上，$|z|=1$ 時，$\left|arg\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|=\dfrac{\pi}{2}$，而區域 $B_0=[\,|z|<1, f(z)\,]$ 的幾何性質正與他所指出的相同。

仿本定理同樣可得下列 $k(t)$ 與 B_0 之對應關係：

(a) 若 $k(t)=e^{-i(t+v)}$，v 爲任一實常數，則 $B_0=\left[\,|z|<1, \dfrac{\beta z}{(1-ie^{-iv}z)^{1+i}}\right]$ $\beta>0$，爲全平面除去螺旋割綫 $L': r=\beta e^{-\frac{\pi}{2}-v} e^{\varphi}$，$\left(\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\right)+v\leqslant\varphi<+\infty$，它由定理 II 中的割綫 L 繞原點沿正向作 v 角旋轉而獲得。

(b) 若 $k(t)=e^{it}$，則 $B_0=\left[\,|z|<1, \dfrac{\beta z}{(1+iz)^{1-i}}\right]$ $\beta>0$，爲全平面除去螺旋綫 $L'': r=\beta e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\varphi}$，$\frac{\pi}{4}-ln\sqrt{2}\leqslant-\varphi<+\infty$，它與定理 II 中的 L 對稱於實軸。

在一般情况，我們得

定理 III 在定理 A 中，若特性函數 $k(t)=e^{-i(\mu t+v)}$，μ，v 爲任意實常數，則 $B_0=\left[\,|z|<1 \dfrac{\beta z}{\left(1+\frac{1-i\mu}{1+i\mu}e^{-iv}z\right)^{\frac{2}{1-i\mu}}}\right]$，爲全平面除去交角爲 $arc\,tg\,\mu$ 的對數螺旋割綫；反之也然。

參 考 文 獻

(1) Г. М. Голузин, 單葉函數論中的一些問題，數學譯叢 (1956)

(2) 劉俊賢和范達，二次有理分式函數的單葉性，中山大學學報 (2) 1956

(3) 龔昇，關於戈魯辛—婁五納微分方程，數學學報 (3) 1953。

(4) И. И. Привалов, 複變函數引論

(5) MoNtel, P., Lecons sur les fonctions univalentes ou Multivalentes, (1933) P.15

本文於 1957 年 1 月 24 日收到。