# 从属於凸形函数和对稱星形函数的正則函数

林　偉

（數　學　系）

設函数$f(z)$與函数$F(z)$在圓$|z|<1$中正則，而$F(z)$单叶。假如圓$|z|<1$關於$W=f(z)$的映像完全落在圓$|z|<1$關於$W=F(z)$的映像中，且$f(o)=F(o)$，則称函数$f(z)$在圓$|z|<1$中单叶从屬于$F(z)$，称$F(z)$为$f(z)$的单叶優越函数，表为$f(z)\underset{s}{\prec}F(z)$。它等價于存在满足 Schwartz 引理條件的函数$\omega(z)$，卽存在在圓$|z|<1$中正則，以$z=0$为零點，其模小于1的函数$\omega(z)$使$f(z)=F(\omega(z))$。

設函数$f(z)\underset{s}{\prec}F(z)$，$f(z)\not\equiv F(z)$，$f(0)=F(o)=0$，$\arg f'(o)=\arg F'(o)$（若$f'(o)=0$，則这條件不要，）記$K$为使$|f(z)|\leqslant|F(z)|$成立的最大圓半徑，$K'$为使$|f'(z)|\leqslant|F'(z)|$成立的最大圓半徑。Голузин 对上述函数族証明了：[1] [2]

(i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}=0.353\cdots\cdots\leqslant K\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0.382\cdots\cdots$；$2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}=0\cdot 12\cdots\leqslant K'\leqslant 3-\sqrt{8}=0.17\cdots$。(ii) 當$f(z)$屬于单叶函数族时，$K=0.39\cdots$，为方程$\log\frac{1+K}{1-K}+2\operatorname{arctg}K=\frac{\pi}{2}$的根；$K'=3-\sqrt{8}=0.17\cdots$。(iii) 當$F(z)$屬于星形函数族时$K=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0.382\cdots$。本文首先利用 Rogosinski 的預备定理指出$F(z)$屬于凸形函数族，對称星形函数族时$K$的上下界，其次指出$F(z)$屬于凸形函数族时$K'$的上下界。

Rogosinski 預备定理：*設在圓$|z|<1$中的正則函数$\omega(z)$满足條件$\omega(o)$

---

* 作者因資料缺乏，找不到原著，其証明可參看 Г. М. Голузин 的専著：Геометрическая теория функций комплексного переменного (1952) p. 410—411（已由陳建功教授譯成中文）。

$=0$. $\omega'(0)=\alpha\geqslant 0$, $|\omega(z)|\leqslant 1$, 則在點 $z_0$, $|z_0|<1$, $\omega(z)$ 所取的函数值 $\omega(z_0)$ 必落在区域 $\Delta_{z_0}$ 中，$\Delta_{z_0}$ 是含在圓 $|z|\leqslant|z_0|$ 中而包圍圓 $|z|\leqslant|z_0|^2$ 之一区域，它得境界是圓 $|z|=|z_0|^2$ 的弧和通过 $z_0$ 而相切于圓 $|z|=|z_0|^2$ 的兩圓弧：$\omega=\dfrac{\alpha\pm i|z_0|}{1\pm i\alpha|z_0|}z_0$, $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$。

**定理 I** 設函数 $f(z)$ 和 $F(z)$ 在圓 $|z|<1$ 中正則，$F(z)$ 在圓 $|z|<1$ 中单叶，$f(0)=F(0)=0$, $\arg f'(0)=\arg F'(0)$（若 $f'(0)=0$, 則这條件不要），$f(z)\prec F(z)$, $f(z)\not\equiv F(z)$, $(|z|<1)$ 則：(i) 當 $F(z)$ 屬于凸形函数族时，$\dfrac{24}{50}\leqslant K\leqslant\dfrac{1}{2}$。(ii) 當 $F(z)$ 屬於对称星形函数族时

$$\frac{1}{2}\leqslant K\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots\cdots。$$

證：(i) $F(z)$ 屬于凸形函数族情况

首先証明當 $|z|\leqslant r_0=\dfrac{24}{25}=\dfrac{12}{25}$ 时。$|f(z)|\leqslant|F(z)|$ （1）

因为函数 $\dfrac{f(z)}{F(z)}$ 在圓 $|z|\leqslant r_0$ 上正則，按最大模原理，我們只須証明不等式（1）在 $|z|=r_0$ 上成立。設 $z_0$ 为 $|z|=r_0$ 上任一點，由于 $f(z_0)=F\left[F^{-1}\left(f(z_0)\right)\right]=F(z'_0)$，而 $z'=\omega(z)=F^{-1}\left(f(z)\right)$ 滿足 Rogosinski 預备定理的條件。

$\therefore$ $z_0'\in\Delta_{z_0}$，故我們只須証明

$$|F(z)|\leqslant|F(z_0)|,\qquad z\in\Delta_{z_0} \tag{2}$$

为此，我們定义 $\rho$，$0<\rho<1$ 滿足方程

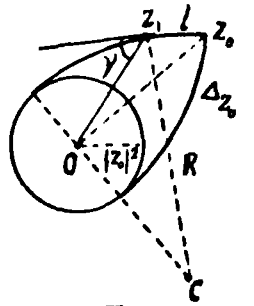
$$\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{r_0}{1+r_0};\qquad \therefore\rho=\frac{12}{49}=0.2449\cdots>r^2_0=0.2304 \tag{3}$$

由于 $F(z)$ 为凸形函数，故當 $|z|<1$ 时，$|F(z)|\leqslant\dfrac{|z|}{1-|z|}|F'(0)|$,

$|F(z_0)|\geqslant\dfrac{r_0}{1+r_0}|F'(0)|$，由(3)得

$$當\ |z|\leqslant\rho\ 时\qquad \frac{|F(z)|}{|F(z_0)|}\leqslant\frac{\dfrac{\rho}{1-\rho}}{\dfrac{r_0}{1+r_0}}=1 \tag{4}$$

設不等式（2）在 $\Delta_{z_0}$ 中不能到處成立，則 $|F(z)|$ 在 $\Delta_{z_0}$ 的邊界上某點 $z_1 \neq z_0$ 達最大值时，顯然要 $|F(z_1)|>|F(z_0)|$ 由式（4）可知 $|z_1|>\rho$，$z_1$ 应在通过 $z_0$ 境界圓弧上，記此弧为 $l$（圖一），則在映射 $W=F(z)$ 下弧綫 $l$ 的像在點 $W_1=F(z_1)$ 的切綫與通过點 $W_1=F(z_1)$ 的射徑所成之角 $\omega$ 必須等于 $\frac{\pi}{2}$。这是不可能的。事实上，設 $l$ 在點 $z=z_1$ 的切



（图一）

綫（在原點側的方向）與通过點 $z=z_1$ 的射徑交成 $\nu$ 角（圖一），設圓弧 $l$ 所在圓的半徑为 $R$，則由直角三角形 $\Delta Oz_0C$ 得

$$R^2=|z_0|^2+(R-|z_0|^2)^2,\qquad R=\frac{1+|z_0|^2}{2}$$

由三角形 $\Delta Oz_1C$ 得

$$(R-|z_0|^2)^2=R^2+|z_1|^2-2R|z_1|\sin\nu,\quad \therefore\ \nu=\arcsin\frac{|z_1|^2+|z_0|^2}{|z_1|(1+|z_0|^2)}$$

由保角映射導数幅角的幾何意义，可得

$$\omega=\pm\nu+\arg\left(\frac{z_1F'(z_1)}{F(z_1)}\right)=\pm\arcsin\frac{|z_1|^2+|z_0|^2}{|z_1|(1+|z_0|^2)}+\arg\left(\frac{z_1F'(z_1)}{F(z_1)}\right)$$

因 $F(z)$ 屬於凸形函数族，可証 $R\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)\geqslant\frac{1}{2}$ [3]，故 $\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec\frac{1}{1-z}$，

按 Lindelöf 原理 $\frac{zF'(z)}{F(z)}$ 關於圓 $|z|\leqslant r$ 的映像落在圓 $\left|\frac{w-1}{w-0}\right|\leqslant r$ 中，

故 $\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\leqslant\arcsin|z|$。

$$\therefore\qquad |\omega|\leqslant\arcsin\frac{|z_1|^2+|z_0|^2}{|z_1|(1+|z_0|^2)}+\arcsin|z_1|$$

$$=\arcsin\frac{r_1^2+r_0^2}{r_1(1+r_0^2)}+\arcsin r_1=\varphi(r_1)$$

$$\because\qquad \varphi'(r_1)=\frac{r_1^2-r_0^2+r_1\sqrt{r_1^2-r_0^4}}{r_1\sqrt{(1-r_1^2)(r_1^2-r_0^4)}}$$

故當 $\rho<r_1\leqslant r_0$ 时，$\varphi(r_1)$ 在 $r_1=\frac{r_0}{\sqrt{2-r_0^2}}$ 達極小值。

$$\therefore \quad |\omega| \leqslant \max_{\rho<r_1\leqslant r_0} \varphi(r_1)=\varphi(\rho)=\arc\sin \frac{\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{25}\right)^2}{\frac{12}{49}\left[1+\left(\frac{12}{25}\right)^2\right]}+\arc\sin\frac{12}{49}$$

$$<\arc\sin(0.96367)+\arc\sin(0.2449)$$

$$<74.6^\circ+14.2^\circ=88.8^\circ<\frac{\pi}{2}$$

这與$\omega=\frac{\pi}{2}$矛盾，因之便証明了式(2)。因此當$|z|\leqslant r_0$時，$|f(z)|\leqslant|F(z)|$。

設$F(z)=\frac{z}{1-z}$，$f(z)=F(z^2)$. 它們滿足定理中條件，且$\left|\frac{f(z)}{F(z)}\right|=\left|\frac{z}{1+z}\right|$，

令$z=-r$代入得：

$$\text{當}\quad \left|\frac{f(z)}{F(z)}\right|=\frac{r}{1-r}\leqslant 1 \quad \text{时，}\quad r\leqslant\frac{1}{2}$$

故不等式(1)在比$|z|\leqslant\frac{1}{2}$更大的圓未必成立。$\therefore \quad \frac{24}{50}\leqslant K\leqslant\frac{1}{2}$。

(ii) $F(z)$屬於对称星形函数族情况

首先我們証明$|z|\leqslant r_0=\frac{1}{2}$时，$|f(z)|\leqslant|F(z)|$。仿上述(i)的討論，只需証明$z\in\triangle_{z_0}$时（$z_0$为圓周$|z|=r_0$上任一點），$|F(z)|\leqslant|F(z_0)|$。

我們定义$\rho$, $0<\rho<1$, $\frac{\rho}{1-\rho^2}=\frac{r_0}{1+r_0^2}$, $\therefore \quad \rho=0.3508>r_0^2=\frac{1}{4}$

因为$F(z)$为对称星形函数，我們有$|F(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|^2}|F'(0)|$，$|F(z)|\geqslant\frac{|z|}{1+|z|^2}|F'(0)|$。

$$\therefore \quad \text{當}\ |z|\leqslant\rho\ \text{时，}\quad \frac{|F(z)|}{|F(z_0)|}\leqslant\frac{\frac{\rho}{1-\rho^2}}{\frac{r_0}{1+r_0^2}}=1$$

因此要証$z\in\triangle_{z_0}$时，$|F(z)|\leqslant|F(z_0)|$成立，仿上述，只須証$\rho<|z_1|\leqslant r_0$时，$|\omega|<\frac{\pi}{2}$。因为$F(z)$屬于对称星形函数族，$\therefore \quad \frac{zF'(z)}{F(z)}\underset{s}{\prec}\frac{1+z^2}{1-z^2}$，

按 Lindelöf 原理，$\frac{zF'(z)}{F(z)}$ 關于 $|z|\leqslant r$ 的像落在圓 $\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\leqslant r^2$ 中，

故 $\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\leqslant \arcsin\frac{2|z|^2}{1+|z|^4}$ 。

$$\therefore\quad |\omega|\leqslant\arcsin\frac{|z_1|^2+|z_0|^2}{|z_1|(1+|z_0|^2)}+\arcsin\frac{2|z_1|^2}{1+|z_1|^4}$$

$$\leqslant \arcsin\frac{\rho^2+r_0^2}{\rho(1+r_0^2)}+\arcsin\frac{2r_0^2}{1+r_0^4}$$

$$\leqslant \arcsin(0.85288)+\arcsin(0.47058)$$

$$< 58.6^\circ+28.1^\circ=86.7^\circ<\frac{\pi}{2}$$

这样便証明了當 $|z|\leqslant r_0$ 时，$|f(z)|\leqslant|F(z)|$ 。

設 $F(z)=\frac{z}{1-z^2}$，　$f(z)=F(z^2)$，它們滿足定理條件，

且 $\left|\frac{f(z)}{F(z)}\right|=\left|\frac{z}{1+z^2}\right|$，令 $z=ir$ 代入得:

當 $\frac{|f(z)|}{|F(z)|}=\frac{r}{1-r^2}\leqslant 1$ 时，$r\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

故 $|f(z)|\leqslant|F(z)|$ 在比圓 $|z|\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 更大的圓不能常成立。

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\leqslant K\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}\quad 。$$

定理証畢。

**定理 II**　設函数 $f(z)$，$F(z)$ 在圓 $|z|<1$ 中正則，而 $F(z)$ 为单叶凸函数，$f(0)=F(0)=0$，$\arg f'(0)=\arg F'(0)$（若 $f'(0)=0$，此條件可不要），若在圓 $|z|<1$ 中 $f(z)\underset{s}{\prec}F(z)$，且 $f(z)\not\equiv F(z)$，則 $3-\sqrt{8}=0.17\cdots\leqslant K'\leqslant 2-\sqrt{3}=0.26\cdots$。*

---

*作者于校稿时，发現夏道行同志对一般情況已求得 $K'$ 的准确值 $K'=2-\sqrt{8}$ 。

〔参考科學記录 1(5)1957，301—304〕

証：首先我們証明當 $|z|\leqslant r_0=3-\sqrt{8}$ 时，$|f'(z)|\leqslant|F'(z)|$ 　　(5)

作函数 $G(\zeta)=\dfrac{F\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)-F(z)}{F'(z)(1-|z|^2)}=\zeta+\cdots\cdots$

於是，$G(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 中单叶正則，且仍为凸形函数，[3]

$$\therefore\quad |G'(\zeta)|\leqslant\frac{1}{(1-|\zeta|)^2}=\frac{1}{1-|\zeta|^2}\cdot\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

令 $\zeta=\dfrac{x-z}{1-\bar{z}x}$，卽 $x=\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}$，得

$$\frac{|F'(x)|}{|F'(z)|}\leqslant\frac{1-|z|^2}{1-|x|^2}\left(\frac{1+\left|\dfrac{x-z}{1-\bar{z}x}\right|}{1-\left|\dfrac{x-z}{1-\bar{z}x}\right|}\right)\qquad(6)$$

因 $f(z)\prec F(z)$，　$\therefore f(z)=F\Big(\omega(z)\Big)$，$f'(z)=F'\Big(\omega(z)\Big)\omega'(z)$，$\omega(z)=\alpha z+\cdots\cdots$ 为滿足 schwartz 引理條件的函数，且 $\alpha=\omega'(0)\geqslant 0$，对 $\omega(z)$ 我 們有如下估計 [1]：

$$\left|\frac{\omega(z)-z}{1-\bar{z}\omega(z)}\right|\leqslant\frac{r(1-\alpha)}{1+r^2-r(1+\alpha)},$$

$$|\omega'(z)|\leqslant\frac{\alpha(1+r^2)+2r}{1+r^2+2\alpha r}\cdot\frac{1-|\omega(z)|^2}{1-r^2}\qquad(7)$$

在式(6)中令 $x=\omega(z)$，由式(7)第一不等式得

$$\frac{\left|F'\Big(\omega(z)\Big)\right|}{\Big|F'(z)\Big|}\leqslant\frac{1-r^2}{1-|\omega(z)|^2}\cdot\frac{1+\dfrac{r(1-\alpha)}{1+r^2-r(1+\alpha)}}{1-\dfrac{r(1-\alpha)}{1+r^2-r(1+\alpha)}}$$

$$=\frac{1+r^2-2\alpha r}{1+r^2-2r}\cdot\frac{1-r^2}{1-|\omega(z)|^2}\qquad(8)$$

令 $a=\dfrac{1+r^2}{2r}$，由式(7)第二不等式和式(8)便得

$$\frac{|f'(z)|}{|F'(z)|}=\left|\frac{F'\Big(\omega(z)\Big)\omega'(z)}{F'(z)}\right|\leqslant\left(\frac{a-\alpha}{a-1}\right)\left(\frac{\alpha a+1}{a+\alpha}\right)\qquad(9)$$

式(9)右端对$\alpha$的導数为 $\dfrac{a^3-2a^2\alpha-(\alpha^2+2)a}{(a+\alpha)^2(a-1)}$，因 $a\geqslant1$，故它與 $p(\alpha)=a^2-2a\alpha-(\alpha^2+2)$ 符號相同，因 $p'(\alpha)=-2a-2\alpha<0$，$\therefore p(\alpha)\geqslant p(1)=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$，因此當 $a\geqslant3$ 时 即 $r\leqslant3-\sqrt{8}$ 时，$p(\alpha)\geqslant0$，即式(9)右端对$\alpha$的導数为非負，因之为$\alpha$的增加函数，故在式(9)中令$\alpha=1$便得 $\left|\dfrac{f'(z)}{F'(z)}\right|\leqslant1$。所以當 $|z|\leqslant r_0=3-\sqrt{8}$ 时，$|f'(z)|\leqslant|F'(z)|$。

为証明 $K'\leqslant2-\sqrt{3}$，我們定义函数 $\xi=\omega(z)=\psi^{-1}\Big[(1-\eta)\psi(z)\Big]$，其中 $0<\eta<1$，$\psi(z)=\dfrac{ze^{i\theta}}{(1+ze^{i\theta})^2}$，($\theta$为任一实数)，即函数 $\xi=\omega(z)$满足下面方程：

$$\frac{\xi e^{i\theta}}{(1+\xi e^{i\theta})^2}=(1-\eta)\frac{ze^{i\theta}}{(1+ze^{i\theta})^2}$$

它单叶映射圓$|z|<1$为除去方向为$\xi=e^{-i\theta}$的一段射徑的圓$|\xi|<1$，且$\omega(0)=0$，$\omega'(0)>0$，$|\omega(z)|\leqslant1$，設 $F(z)=\dfrac{z}{1-ze^{i\theta}}$，$f(z)=F\Big(\omega(z)\Big)$，顯然它們滿足定理條件，當 $\eta>0$ 夠小时，$\omega(z)$有展开式：

$$\omega(z)=z-\eta z\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}+0(\eta^2)$$

因之

$$f(z)=F(z)-\eta zF'(z)\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}+0(\eta^2)$$

$$\therefore\quad f'(z)=F'(z)-\eta\Big[zF'(z)\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\Big]'_z+0(\eta^2)$$

$$=F'(z)\Big[1-\eta\frac{1}{F'(z)}\Big(z\frac{1+ze^{i\theta}}{(1-ze^{i\theta})^3}\Big)'_z+0(\eta^2)\Big]$$

$$=F'(z)\Big[1-\eta(1-ze^{i\theta})^2\frac{1+4ze^{i\theta}+(ze^{i\theta})^2}{(1-ze^{i\theta})^4}+0(\eta^2)\Big]$$

$$=F'(z)\Big[1-\eta\frac{1+4ze^{i\theta}+(ze^{i\theta})^2}{(1-ze^{i\theta})^2}+0(\eta^2)\Big]$$

$$\therefore\quad\frac{|f'(z)|}{|F'(z)|}=\left|1-\eta\frac{1+4ze^{i\theta}+(ze^{i\theta})^2}{(1+ze^{i\theta})^2}+0(\eta^2)\right|$$

对于任一$z_0=re^{i\theta_0}$，$0<r<1$，我們選取$\theta=-\theta_0+\pi$，則

$$\frac{|f'(z_0)|}{|F'(z_0)|}=1-\eta\frac{1-4r+r^2}{(1+r)^2}+0(\eta^2)$$

所以當$\eta>0$夠小，$1-4r+r^2<0$ 卽$r>2-\sqrt{3}$时，$\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right|>1$,因此对圓外$|z|>2-\sqrt{3}$区域任何點，$|f'(z)|\leqslant|F'(z)|$不常成立，$\therefore K'\leqslant2-\sqrt{3}$。

綜合上述，得$3-\sqrt{8}\leqslant K'\leqslant2-\sqrt{3}$，定理証畢。

## 參 考 文 献

〔1〕Г.М.Гогузин. Мажорачия Подчиненных аналитических функций I, Матем. сб. 29 ( 1951 ) 207—224.

〔2〕Г.М.Гогузин. О Мажорачии Подчиненных аналитическихфункций II. Матем. сб. 29 ( 1951 ) 593—603.

〔3〕E.Strohhäcker. Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Zeitschr. 37 ( 1933 ) 356—380.

1957年9月25日收到

# О РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЯХ, ПОДЧИНЕННЫХ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ И СИММЕТРИЧНОЙ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ ФУИКЦИИ

Лин Увэй

## КОНСПЕКТ

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$. а функция $F(z)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$. Если функция $f(z)$ подчинена в $|z|<1$ функции $F(z)$, (т.е. образ круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$ целиком лежит в образе круга $|z|=1$ при отображении $w=F(z)$ и $f(o)=F(o)$ ), и если $f(o)=F(o)=0$, $\arg f'(o)=\arg F'(o)$ (если $f'(o)=0$, то это условие отпадает), и $f(z)\not\equiv F(z)$, то мы обозначим через $K$ (или $K'$) радиус наибольшего круга, в котором для любой функции $f(z)$ и $F(z)$, удовлетворённой указанному условию, имеет место неравенство $|f(z)|\leqslant|F(z)|$ (или $|f'(z)|\leqslant|F'(z)|$). В настоящей заметке показываются следующие результаты:

1. Когда функция $F(z)$—выпуклая, то $\frac{24}{50}\leqslant K\leqslant\frac{1}{2}$, $3-\sqrt{8}\leqslant K'\leqslant2-\sqrt{3}$.

2. Когда функция $F(z)$—симметричная звездообразная то $\frac{1}{2}\leqslant K\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.