

关于临界情形某一类微分方程组的稳定性 I

胡金昌 許松庆

討論具有特征根为 m 重单零根的文件組:

$$\frac{dx}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} t^\alpha R_0 & t^\beta R_1 \\ t^\alpha R_2 & t^\beta (P+Q) \end{pmatrix}$$

这里各矩陣: $X_1 = (x_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$, $X_2 = (x_{ij})_{i=m+1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$, $R_0 = (r_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, m}$

$$R_1 = (r_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=m+1, \dots, n}, \quad R_2 = (r_{ij})_{i=m+1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}, \quad P+Q = (p_{ij} + q_{ij})_{i=m+1, \dots, n}^{j=m+1, \dots, n}$$

各 r_{ij} , q_{ij} 为 t 的連續实函数, $t \geq T > 0$; 又当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 各 $q_{ij} \rightarrow 0$, 各 r_{ij} 有界。

本文对于某几种类型的方程組写出其基解組在 $t = \infty$ 的邻域的构造, 由此推知其零解为稳定的条件。关于此类問題, 若容許各 r_{ij} , q_{ij} 用漸近展开式, 則在文〔3〕,〔4〕对于三阶方程組, 文〔5〕对于一个三阶方程已經有了解案, 其間 r_{ij} , q_{ij} 表以幕的漸近展开式或 Laurent 級数。若容許各 r_{ij} 当 $t \rightarrow +\infty$ 时有极限值的情形备见文〔5〕. 但本文不涉及展式, 故求作基解組这問題, 要附加条件。先設

$$(0) \quad \det(P - \lambda E) = 0$$

所有的根的实部为負数, 又 α, β 为实数。茲分論各情形如下:

情形一。設 $\alpha < -1 < \beta$ 。在此情形由文〔1〕已知有 $n \times m$ 矩陣解

$$\begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + t^{\alpha+1} U_1 \\ t^{\alpha-\beta} U_2 \end{pmatrix}$$

其間 $U_1 = (u_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, m}$, $U_2 = (u_{ij})_{i=m+1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$, 各 $u_{ij}(t)$ 当 $t \in (T, \infty)$ 时有界。

$$\text{用代換: } \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

則得如下計算

$$\begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{即 } X_1^0 \frac{dZ_1}{dt} = t^\beta R_1 Z_2 \\ t^{\alpha-\beta} U_2 \frac{dZ_1}{dt} + \frac{dZ_2}{dt} = t^\beta (P+Q) Z_2$$

由于 $t^{(\alpha+1)}U_1 \rightarrow 0$ 当 $t \rightarrow +\infty$, 故 $X_1^{(0)-1}$ 在 $t=\infty$ 的邻域可写成 $E+t^{(\alpha+1)}S \equiv W$ 之形, 其间 S 有界. 故上两式化为:

$$\begin{aligned}\frac{dZ_1}{dt} &= t^\beta W R_1 Z_1, \\ \frac{dZ_2}{dt} &= t^\beta (P+Q-t^{(\alpha-\beta)}U_2 W R_1)Z_2.\end{aligned}$$

用变换: $\tau=t^{\beta+1}$, 把上两式化为:

$$\begin{aligned}\frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{1}{\beta+1} W R_1 Z_1, \\ \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{1}{\beta+1} (P+Q-\tau^{\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}} U_2 W R_1) Z_2.\end{aligned}$$

其中的 Q, U_2, W, R_1 当然以 τ 表之. 因 $(\alpha-\beta)(\beta+1) < 0$, 而 Q, U_2, W, R_1 与前同样性态当 $\tau \rightarrow +\infty$, 故由文 [2], 上面方程的第二个的特征根仍保持有负实部性质, 且其基解组为 $n-m$ 阶方阵:

$$Z_2^0 = V_2(\tau)$$

这里 $V_2(\tau)$ 的递减率如 $O(e^{-\theta\tau})$ 之型, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V_2 \rightarrow 0$. 由此代入第一个方程所得的积分存在, 当 $\tau(\tau_0, \infty)$:

$$Z_1^0 = \frac{1}{\beta+1} \int_{\tau_0}^{\tau} W R_1 Z_2^0 d\tau = V_1(\tau) + C.$$

且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V_1 \rightarrow 0$.

因 $\det V_2 \neq 0$, 故原方程的基解组为:

$$X = \begin{pmatrix} E + t^{(\alpha+1)}U_1(t) & 0 \\ t^{(\alpha-\beta)}U_2(t) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V_1(t^{\beta+1}) + C \\ 0 & V_2(t^{\beta+1}) \end{pmatrix}.$$

結論 I. 原方程组的零解在此情形为稳定.

情形 II. 设 $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2+h} \leq \beta$, ($h \geq 0$). 在此情形, 设 R_0, R_1 , 更适合下两

条件:

(*) $R_0 = r(t)E$, $r(t)$ 为有界的 (数量) 函数.

(**) $R_1 = t^{(h+1)\alpha}F$, F 为有界矩阵.

用代换: $X_1 = tY_1, X_2 = t^{-(h+1)\alpha}FY_2$

这里 $f(t) = \exp \int_{\tau}^t t^{\alpha} r(t) dt$, 则原方程组化为:

$$\begin{aligned}\frac{dY_1}{dt} &= t^\beta F Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= t^{(h+2)\alpha} R_2 Y_1 + t^\beta \left[P+Q+(h+1)\alpha t^{-(\beta-1)} E - t^{\alpha-\beta} r(t) E \right] Y_2\end{aligned}$$

所得结果适合文 [1] 条件, 故有解存在:

$$Y_1^0 = E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1, \quad Y_2^0 = t^{(h+2)\alpha-\beta} U_2$$

其中 U_1, U_2 为有界矩阵。故原方程有矩阵解:

$$X_1^0 = f \cdot (E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1), \quad X_2^0 = t^{\alpha-\beta} f \cdot U_2$$

仿照情形一的方法用代换: $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix},$

则依同法计算得

$$\frac{dZ_1}{dt} = t^{\beta} f_{-1} W_1 F Z_2, \quad \frac{dZ_2}{dt} = t^{\beta} (P + Q - t^{\alpha-\beta} U_2 W_1 F) Z_2$$

这里记号 $f_{-1} \equiv [f(t)]^{-1}, W_1 = (E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1)^{-1}$. 再用变换 $\tau = t^{\beta+1}$ 则得

$$\frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{1}{\beta+1} f_{-1} W_1 F Z_2$$

$$\frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{1}{\beta+1} (P + Q - \tau^{\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}} U_2 W_1 F) Z_2$$

其中 f_{-1}, W_1, F, U_2 当然以 τ 表之。上面第二个方程可由文[2]得知其右边的特征根仍保持有负实部, 且有 m 阶方阵解:

$$Z_2^0 = V_2(\tau).$$

此外 $V_2(\tau)$ 的递减率形如 $O(e^{-\rho\tau})$ 型, 因而当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $V_2 \rightarrow 0$.

其次, 第一个方程的右边未必有界, 但因估计

$$f_{-1} \equiv \exp \int_T^t \frac{1}{\tau^{\beta+1}} t^{\alpha} (-r(t)) dt \leq \exp \left(\frac{M}{\alpha+1} (\tau^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}} - T^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}) \right) =$$

$$= a \exp \left(b \tau^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}} \right) = a \exp(-\tau^{\rho})$$

而 $0 < \rho = b \tau^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}} \rightarrow 0$ 当 $t \rightarrow +\infty$

故 f_{-1} 的李雅普诺夫特征数为 0。由是得证如下的积分存在当 $\tau \in [\tau_0, \infty)$:

$$Z_1^0 = \frac{1}{\beta+1} \int_{\tau_0}^{\tau} f_{-1} W_1 F V_2 d\tau = V_1(\tau) + C$$

这里 $V_1(\tau)$ 为 $O(\tau^k e^{-\rho\tau})$ 之型。更当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V_1 \rightarrow 0$.

故得原方程的基解组为:

$$X = \exp \int_T^t t^{\alpha} r(t) dt \cdot \begin{pmatrix} E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1(t) & 0 \\ t^{\alpha-\beta} U_2(t) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V_1(t^{\beta+1}) + C \\ 0 & V_2(t^{\beta+1}) \end{pmatrix}$$

結論 2. 在所設条件 (*), (* *) 之下, 此情形为稳定的充分且必要条件为:

$$\sup_{t \geq T} \int_T^t t^{\alpha} r(t) dt < +\infty.$$

且 $\int_T^{\infty} t^{\alpha} r(t) dt = -\infty$ 此情形取得渐近稳定的充分且必要条件.

情形三. 仍設 $-\frac{1}{2} \leq \alpha < -\frac{1}{2+h} \leq \beta$, ($h \geq 0$).

(甲) 先討論 $m = \frac{1}{2}n$ 的情形. 則得两个 m 阶方陣方程:

$$\frac{dX_1}{dt} = t^{\alpha} R_0 X_1 + t^{\beta} R_1 X_2$$

$$\frac{dX_2}{dt} = t^{\alpha} R_2 X_1 + t^{\beta} (P+Q) X_2$$

更設 R_0, R_1 适合于三条件:

(*) R_0 为对角綫陣且有界, 以下簡写作 $R = (r_i)$.

(***) $R_1 = t^{(h+1)\alpha} F$, F 为有界方陣.

(****) $\int_T^t t^{\alpha} (-r_i(t) - r_i(t)) dt$ 有界, $t \in [T, \infty)$, ($i = 1, \dots, m$),

这里 $s(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{ r_i(t) \}$, $t \in [T, \infty)$.

在这些条件之下, 則基解組如下进行求之,

$$\text{作代換: } X_1 = G Y_1, \quad X_2 = t^{-(h+1)\alpha} Y_2$$

其間 方陣 $G(t) = \exp \int_T^t t^{\alpha} R(t) dt$; 数函数 $g(t) = \exp \int_T^t t^{\alpha} s(t) dt$.

則原方程組化为

$$\frac{dY_1}{dt} = t^{\beta} g G^{-1} F Y_2$$

$$\frac{dY_2}{dt} = t^{(h+2)\alpha} R_2 g^{-1} G Y_1 + t^{\beta} [P+Q + (h+1)\alpha t^{-\beta-1} E - t^{\alpha-\beta} S R] Y_2$$

由条件 (****) 故 $g^{-1}G, gG^{-1}$ 有界, 故同上理这方程組有解:

$$Y_1^0 = E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1, \quad Y_2^0 = t^{(h+2)\alpha+\beta} U_2$$

因而原方程組有 $n \times m$ 矩陣解:

$$(A) \quad X_1^0 = G(E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1), \quad X_2^0 = t^{\alpha-\beta} g U_2$$

以后便順利地仿照前法用代換 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^0 & 0 \\ X_2^0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ 把原方程組化成

$$\frac{dZ_1}{dt} = t^{\beta} X_1^{0-1} G^{-1} F Z_2$$

(B)

$$\frac{dZ_2}{dt} = t^{\beta} (P+Q - t^{\alpha-\beta} U_2 X_1^{0-1} g G^{-1} F) Z_2$$

由于 gG^{-1} 有界, 故这方程組与情形二相仿。因而有解

$$Z_2^0 = V_2(t^{\beta+1}), \quad Z_1^0 = V_1(t^{\beta+1}) + C$$

且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V_2 \rightarrow 0$, $V_1 \rightarrow 0$ 。故原方程的基解組为:

$$(C) \quad X = \begin{pmatrix} \exp \int_T^t t^\alpha R dt \left(E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1(t) \right) & 0 \\ \exp \int_T^t t^\alpha s dt \cdot t^{\alpha-\beta} U_2(t) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V_1(t^{\beta+1}) + C \\ 0 & V_2(t^{\beta+1}) \end{pmatrix}$$

結論3. 在 $(*)$, $(**)$, $(***)$ 各条件下, 若 $\int_T^t t^\alpha R dt$ 有界, 則得其

零解稳定。若此积分无界而有 $\int_T^\infty t^\alpha R dt = -\infty$, 則零解为漸近稳定。

逆命题亦成立。

(乙) 若 $m < \frac{1}{2}n$, 則暫添补 $n-2m$ 个方程:

$$\frac{dx_i}{dt} = t^\alpha s(t)x_i, \quad (i = -1, -2, \dots, 2m-n)$$

則得 $2(n-m)$ 阶新方程組:

$$\frac{d\tilde{X}_1}{dt} = t^\alpha \tilde{R}_0 \tilde{X}_1 + t^\beta \tilde{R}_1 X_2, \quad \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = t^\alpha \tilde{R}_2 \tilde{X}_1 + t^\beta (P+Q)X_2,$$

$$\text{这里 } \tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{-1} \\ X_{-2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_0 = \begin{pmatrix} sE & 0 \\ 0 & R_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_2 = (0 \ R_2).$$

故由(甲)得解: $\tilde{X}_1^{(0)} = \tilde{G}(E + t^{(h+2)\alpha+1} \tilde{U}_1)$, $\tilde{X}_2 = t^{\alpha-\beta} g \tilde{U}_2$ 。

$$\text{这里 } \tilde{G} = \begin{pmatrix} gE & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & U_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}_2 = \begin{pmatrix} * & U_2 \end{pmatrix}.$$

注意到这新方程組的特殊构造, 即 $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{2m-n}$ 各自独立, 且与原方程組无关。既然說已知有 $n-m$ 个特解

$$\left(x_{-1}^{(j)}, x_{-2}^{(j)}, \dots, x_{2m-n}^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)} \right), \quad j = 2m-n, \dots, -2, -1, 1, \dots, m,$$

的每一个都适合新方程組, 故可說有 m 个綫性无关特解

$$\left(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)} \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

适合原方程組, 即

$$X_1^0 = G(E + t^{(h+2)\alpha+1} U_1), \quad X_2^0 = t^{\alpha-\beta} g U_2.$$

这与(甲)的(A)式完全相同, 以下便得同一結果。在推演过程中的(B)式里, Z_2 为 $n-m \times n$ 矩陣, F 为 $m \times n-m$ 矩陣, U_2 为 $n-m \times m$ 矩陣, 其余为 m 阶方陣, 此与以前計算无影响。

更且在新添补的 $n-2m$ 个方程, 每个的解为

$$x_i = c_i g(t), \quad i = -1, -2, \dots, n-2m,$$

与原方程组的解同样渐近性态, 故在 (41) 之结论 3 里两种情形皆可施用。

(丙) 若 $m > \frac{1}{2}n$, 添补 $2m-n$ 个方程

$$\frac{dx_i}{dt} = -i^\beta x_i, \quad (i = n+1, \dots, 2m)$$

则得 $2m$ 阶新方程组:

$$\frac{dX_1}{dt} = t^\alpha R_0 X_1 + t^\beta \overline{R_1} \overline{X_2}, \quad \frac{d\overline{X_2}}{dt} = t^\alpha \overline{R_2} X_1 + t^\beta (\overline{P} + \overline{Q}) \overline{X_2}$$

$$\text{这里 } \overline{X_2} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \vdots \\ X_{2m} \end{pmatrix}, \quad \overline{R_1} = (R_1 0), \quad \overline{R_2} = \begin{pmatrix} R_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \overline{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故由 (甲) 得解: $X_1^0 = G(E + t^{(\alpha+2)})^\alpha U_1$, $\overline{X_2}^0 = t^{\alpha-\beta} \overline{g} \overline{U_2}$

这里 $\overline{U_2} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{2m} \end{pmatrix}$ 。与 (乙) 同样, 由于此新方程组的特殊构造, 既然已知有 m 个解

$x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, x_{n+1}^{(j)}, \dots, x_{2m}^{(j)}, j = 1, \dots, m$, 的每一个适合新方程组, 故有 m

个线性无关解 $(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) j = 1, \dots, m$, 适合原方程组, 亦即回复到 (甲) (A) 的形式, 故所得解案亦相同。

[附记] 若只用条件 (*), (**), 则得零解为稳定的充分条件为:

$$\int_T^\infty t^{\alpha} r_j(t) dt \text{ 有界 } (j = 1, \dots, m).$$

其证明方法用代换: $X_1 = GY$, $X_2 = t^{-(\alpha+1)} Y_2$ 仿照上法做, 所得的基解组则不含 $g(t)$ 。

综合以上结果得

定理 1. 在题设方程组及所设条件 (O) 之下, 若 $\alpha < -1 < \beta$, 则其零解为稳定。

定。若 $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2+h} \leq \beta$, ($h \geq 0$), 在附加 (*), (**), (***)

条件之下, 此方程组的基解组为 (C) 式, 其零解为稳定的充分且必要条件为:

$$\sup_{t \geq T} \int_T^t t^{\alpha} r_j(t) dt < +\infty, \quad j = 1, \dots, m;$$

且其零解为渐近稳定的充分且必要条件为

$$\int_T^\infty t^{\alpha} r_j(t) dt = -\infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

参 考 文 献

1. Басов В. И.: Построение решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ 18, в.3, 1954.
2. Perron O.: Ueber Stabilität und asymptotische Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen Math. Z. Bd. 29, 1929.
3. Донская Л. И.: О структуре решений системы трех линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки $t = \infty$, ДАН 80, No 3, 1951.
4. Донская Л. И.: О структуре решений системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений с особой точкой. Вест. ЛГУ No5, 1953.
5. Love C.: On the asymptotic solutions of linear differential equation. Amer. J. of Math. 36, No2, 1914.
6. Басов В. И.: Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений. ДАН 106 No 6, 1956.

ON A CRITICAL CASE OF STABILITY

OF A CERTAIN TYPE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, I

Hu Jinchang and Shu Shung-ching

Abstract

Consider the matrix equation:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} t^h R_0 & t^{\beta} R_1 \\ t^h R_2 & t^{\beta} (P + Q) \end{pmatrix}$$

where the block matrices R_0, R_1, R_2 and Q are continuous and bounded on $t \geq T > 0$; and, in particular, $Q \rightarrow 0$ when $t \rightarrow \infty$. Let the real parts of the characteristic roots of the constant matrix P be negative. No supposition is imposed on the coefficients to have any asymptotic expansion. In this paper, we proved

Theorem 1. If $\alpha < -1 < \beta$, then the trivial solution of the system is stable.

1. $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2+h} \leq \beta$, ($h \geq 0$), and under the conditions (*), (**), (***),

the fundamental matrix of solutions in the vicinity of $t = \infty$ behaves as the asymptotic expansion (C). Thence, the trivial solution is stable when and only when

$$\sup_{t \geq T} \int_T^t t^{\alpha} r_i(t) dt < +\infty, \quad i=1, \dots, m; \text{ and asymptotically stable}$$

when and only when the integral envisaged equals $-\infty$, for $t \uparrow \infty$.