

一类非綫性微分方程組在临界情形中的稳定問題

許松庆 胡金昌

§ 1 考虑扰动方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t\gamma} \sum_{\sigma=1}^m p_{i\sigma}(t) x_{\sigma} + \psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t\gamma} \psi_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t) & (i=1, \dots, m), \\ \frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{t\gamma} \sum_{\sigma=1}^m q_{s\sigma}(t) x_{\sigma} + \sum_{\sigma=m+1}^n [p_{s\sigma} + \frac{1}{t\gamma} q_{s\sigma}(t)] x_{\sigma} + \psi_s^{(1)}(x_1, \dots, x_n) \\ + \frac{1}{t\gamma} \psi_s^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t), & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (1)$$

此地 γ 及 $p_{s\sigma}$ ($s, \sigma = m+1, \dots, n$) 为实常数, $\gamma > 0$, $p_{s\sigma}$ 使特征方程

$$\begin{vmatrix} p_{m+1, m+1} - k & \dots & p_{m+1, n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n, m+1} & \dots & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

之根 $k_{m+1}, \dots, k_n$ 的实数部分均为負, 即 $\text{Re}(k_s) = -\lambda_s$, $\lambda_s > 0$ ($s = m+1, \dots, n$), 而 $q_{s\sigma}(j, \sigma = 1, \dots, n)$ 为 t 之实函数, 当一切 $t \geq t_0 > 0$ 时連續有界; $\psi_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, n$) 为 $x_1, \dots, x_n$ 之正則函数, 其按 $x_1, \dots, x_n$ 的幂的展式不含低于2次之項并具实的常数; $\psi_j^{(2)}$ ($j = 1, \dots, n$) 为 $x_1, \dots, x_n$ 的正則函数, 其按 $x_1, \dots, x_n$ 的幂的展式为:

$$\psi_j^{(2)} = \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 2} R_j^{(m_1, \dots, m_n)}(t) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad (j=1, \dots, n)$$

展式中系数 $R_j^{(m_1, \dots, m_n)}$ 为 t 之連續函数, 当 $t \geq t_0 > 0$ 时有界, 并使对于一切 $t \geq t_0 > 0$, 函数 $\psi_j^{(2)}$ 为 $x_1, \dots, x_n$ 的一致正則⁽¹⁾函数。

为了叙述簡便, 今后将称具有 $\psi_j^{(2)}$ 相同性质的函数为滿足条件 (L)。

显然, 組 (1) 对应的常系数綫性方程組的特征方程在上述的假定下具有 m 重的零根 (但初級因子次数为 1) 而其余的一切根的实数部分均为負。

本文的目的在于研究 (1) 的未被扰动运动的稳定条件, $m=1$ 的情形在文⁽²⁾已探討过, 本文可看作文⁽²⁾的繼續。

§ 2 在过渡到直接研究所提出的問題之前先建立几个引理:

引理 1 設扰动运动方程組有如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = q_{i, m+1} x_{m+1} + \dots + q_{i, n} x_n + \psi_i(x_1, \dots, x_n, t) & (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_s}{dt} = r_{s, m+1} x_{m+1} + \dots + r_{s, n} x_n + \psi_s(x_1, \dots, x_n, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (3)$$

此地 $r_{sg} = p_{sg} + \frac{1}{t^\beta} q_{sg}$, $\beta > 0$, p_{sg} 为常数, 使 (2) 的一切根的实数部分均为负, 而 q_{is} , p_{sg} ($i=1, \dots, m$; $s, g=m+1, \dots, n$) 均为 t 之連續函数, 当 $t \geq t_0$ 时有界; 函数 ψ_j ($j=1, \dots, n$) 均满足条件 (L), 又如果下列条件成立

$$\psi_j(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

則組 (3) 有連續系列的駐定运动, 对应于解:

$$x_i = c_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$x_s = 0 \quad (s=m+1, \dots, n)$$

此地 c_i 为任意常数. 未被扰动运动亦属于該一系列, 而系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动, 包括未被扰动运动本身, 均将为稳定的, 此时, 如果扰动充分小, 任何扰动运动均将各自渐近地趋近該系列駐定运动中的一支。

証: 証法和文 [2] 的引理 1 的証法相似, 只須应用文 [3] 中 § 11 的定理。

引理 2 設有方程組:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} \psi_i(x_1, \dots, x_n, t), & \alpha > 1, (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_s}{dt} = k_s x_s + \phi_s(x_1, \dots, x_n, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (4)$$

此地 $\operatorname{Re} k_s = -\lambda_s$, $\lambda_s > 0$ ($s=m+1, \dots, n$)

如果下列条件成立:

- 1° ψ_i ($j=1, \dots, n$) 定义并連續于区域: $|x_j| \leq A, t \geq t_0 > 1$ ($A > 0$; $j=1, \dots, n$)
- 2° 在这区域中 $|\psi_j| \leq M$, $M > 0$ ($j=1, \dots, n$), 且 $M \leq \lambda A$, $\lambda = \min(\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$
- 3° $|\psi_j(x_1', \dots, x_n', t) - \psi_j(x_1'', \dots, x_n'', t)| \leq L\{|x_1' - x_1''| + \dots + |x_n' - x_n''|\}$
此地 $|x_j'| \leq A$, $|x_j''| \leq A$ ($j=1, \dots, n$), L 为正常数

$$4^\circ \quad L n N < 1, \text{ 而 } N = \max\left\{\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\lambda}\right\}, \quad (s=m+1, \dots, n)$$

則 (4) 有如下形式的解:

$$\begin{cases} x_i = c_i + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \psi_i(c_1, \dots, c_m, t), & (i=1, \dots, m) \\ x_s = \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (5)$$

此地 $c_1, \dots, c_m$ 为任意常数, 函数 $\psi_j(c_1, \dots, c_m, t)$ ($j=1, \dots, n$) 在区域

$$|c_i| < C \leq A, \quad 1 < t_0 \leq t \quad (i=1, \dots, m)$$

內为有界, 且当 $t \rightarrow t_0$ 时有 $\varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \rightarrow 0$ ($s=m+1, \dots, n$)

証: 証法和 2 文 [2] 的引理 2 的証明相似, 这里不再作說明。

引理 2 設有方程組:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha} [q_{i,m+1} x_{m+1} + \dots + q_{i,n} x_n + \psi_i(x_1, \dots, x_n, t)], & (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s,m+1} x_{m+1} + \dots + p_{s,n} x_n + \frac{1}{t^\beta} (q_{s,m+1} x_{m+1} + \dots + q_{s,n} x_n) + \psi_s(x_1, \dots, x_n, t), \end{aligned} \quad (6)$$

($s = m+1, \dots, n$), 此地 $p_{s\sigma}$ 为常数, 使 (2) 的根的实数部分均为负, 即 $\operatorname{Re}(\lambda_s) = -\lambda_s, \lambda_s > 0$ ($s = m+1, \dots, n$); $q_{j\sigma}$ ($j = 1, \dots, n; \sigma = m+1, \dots, n$) 为 t 的连续函数, 当 $t \geq t_0$ 时有界; φ_j ($j = 1, \dots, n$) 为满足条件 (L) 的函数。

如果 $\alpha > 1, \beta > 0$, 则组 (6) 亦有如下形式的解:

$$x_i = c_i + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_i(c_1, \dots, c_m, t) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

$$x_s = \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \quad (s = m+1, \dots, n)$$

此地 $c_1, \dots, c_m$ 为任意常数, 函数 $\varphi_j(c_1, \dots, c_m, t)$ ($j = 1, \dots, n$) 在区域

$$|c_i| \leq C \leq \Lambda, \quad 1 < t_0 \leq t \quad (i = 1, \dots, m)$$

内为有界, 且当 $t \rightarrow t_0$ 时有 $\varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \rightarrow 0$ ($s = m+1, \dots, n$)

此外, $\varphi_j(c_1, \dots, c_m, t)$ ($j = 1, \dots, n$) 对于一切 $t \geq t_0$ 为 $c_1, \dots, c_m$ 的一致正则函数, 且可写成:

$$\varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) = \sum_{k_1 + \dots + k_m \geq 2} p_j^{(k_1 \dots k_m)}(t) c_1^{k_1} \dots c_m^{k_m} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

其中 $p_j^{(k_1 \dots k_m)}(t)$ 当一切 $t \geq t_0$ 为 t 之有界连续函数。

証: 仿照文 [2] 引理 3 的证明, 并采用该引理的附注的论证方法, 便可得到本引理的证明。

引理 4 如果在 (6) 中 $\alpha > 1, \beta > 0$, 则 (6) 的未被扰动运动为稳定。此外, 有一连续系列的有界运动 (7) 存在, 未被扰动运动亦属于这一系列。而该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦均为稳定, 且在充分小的扰动下, 任何被扰动运动都将各自渐近地趋于该系列有界运动中的一支。

証: 引入新未知函数 $y_1, \dots, y_n$, 作变换

$$x_i = y_i + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_i(y_1, \dots, y_m, t) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (9)$$

$$x_s = y_s + \varphi_s(y_1, \dots, y_m, t) \quad (s = m+1, \dots, n)$$

注意到把 $y_1, \dots, y_m$ 看作常数时, $y_i + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_i(y_1, \dots, y_m, t), y_s + \varphi_s(y_1, \dots, y_m, t)$, 为 (6) 的一组解, ($i = 1, \dots, m; s = m+1, \dots, n$), 故便得关系式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_i(y_1, \dots, y_m, t) \equiv \frac{1}{t^{\alpha}} [q_{i, m+1} \varphi_{m+1} + \dots + q_{im} \varphi_n +$$

$$+ \varphi_i(y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \dots, y_m + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_s(y_1, \dots, y_m, t) \equiv r_{s, m+1} \varphi_{m+1} + \dots + r_{sn} \varphi_n$$

$$+ \varphi_s(y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \dots, y_m + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n),$$

$$(i = 1, \dots, m; s = m+1, \dots, n)$$

其中 $r_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\beta} q_{s\sigma}(t)$ ($S, \sigma = m+1, \dots, n$)

由是(6)經過變換(9)后, 得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \left(\delta_i^j + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right) \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} \left(\sum_{\lambda=m+1}^n q_{j\lambda} y_\lambda + \tilde{\varphi}_j \right), & (j=1, \dots, m) \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n r_{s\sigma} y_\sigma + \tilde{\varphi}_s - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt}, & (S=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (10)$$

此地 $\delta_i^j = 0$ 当 $i \neq j$, $\delta_i^i = 1$, $r_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\beta} q_{s\sigma}(t)$,

$$\tilde{\varphi}_k = \varphi_k(y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \dots, y_m + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_m, y_{m+1} \varphi_{m+1}, \dots, y_n + \varphi_n)$$

$$\varphi_k(y_1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_1, \dots, y_m + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n), \quad (k=1, \dots, n)$$

由(10)解得:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{t^{\alpha D}} \sum_{j=1}^m (q_{j, m+1} y_{m+1} + \dots + q_{j, m+1} y_n + \tilde{\varphi}_j) A_{ji}, \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \\ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2} & \dots & 1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \quad A_{ji} \text{ 表 } D \text{ 中 } (j, i) \text{ 元之代数余}$$

因式, 注意到引理3, 知 $\varphi_i(y_1, \dots, y_m, t)$ ($j=1, \dots, m$) 对于一切 $t \geq t_0$ 为 $y_1, \dots, y_m$ 之一致正则函数, 且按 $y_1, \dots, y_m$ 之幂的展式不含低于2次之项, 故 $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}$ ($i, j=1, \dots, m$) 对于一切 $t \geq t_0$ 为 $y_1, \dots, y_m$ 的一致正则函数, 且按 $y_1, \dots, y_m$ 之幂的展式不含低于1次之项, 可见

$$A_{ji} = (y_1, \dots, y_m)_i \text{ 当 } j \neq i, \quad A_{ii} = 1 + (y_1, \dots, y_m)_i \quad (i, j=1, \dots, m)$$

$D = 1 + (y_1, \dots, y_m)_1$, 此处记号 $(y_1, \dots, y_m)_k$ 表示对 $y_1, \dots, y_m$ 最少为 k 次, 由于

$t = \infty$ 时 $D = 1$, 故当 t_0 足够大而 $t \geq t_0$ 时, $\frac{A_{ji}}{D}$ 及 $\frac{A_{ii}}{D}$ 均为 $y_1, \dots, y_m$ 之正则函数, 且

$$\frac{A_{ji}}{D} = (y_1, \dots, y_m)_i, \quad \frac{A_{ii}}{D} = 1 + (y_1, \dots, y_m)_i$$

因此得到:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^m \left(q_{j, m+1} y_{m+1} + \dots + q_{j, n} y_n + \tilde{\varphi}_j \right) \left(\delta_i^j + \frac{A_{ji}}{D} \right) \quad (i=1, \dots, m)$$

此处 $\delta_i^j + B_{ji} = \frac{A_{ji}}{D}$, 因而 $B_{ji} = (Y_1, \dots, Y_m) 1$ 故上式亦可写成:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} \left[q_{i,m+1} y_{m+1} + \dots + q_{in} y_n + \psi_i(y_1, \dots, y_n, t) \right] (i=1, \dots, m)$$

其中 $\psi_i(y_1, \dots, y_n, t) = \tilde{\psi}_i + \sum_{j=1}^m \left(q_{j,m+1} y_{m+1} + \dots + q_{jn} y_n + \tilde{\psi}_j \right) B_{ji}$
 $(i=1, \dots, m)$ $\sum_{j=1}^m$ 表示取和时除去 $j=i$ 的一项

由于已知 $\tilde{\psi}_i (i=1, \dots, m)$ 满足条件(L), 且当 $y_{m+1} = \dots = y_n = 0$ 时 $\tilde{\psi}_i = 0$, 所以 $\psi_i(y_1, \dots, y_n, t)$ 同样满足条件(L), 有且

$$\psi_i(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

又从(10)之第二式得

$$\frac{dy_s}{dt} = r_{s,m+1} y_{m+1} + \dots + r_{sn} y_n + \psi_s(y_1, \dots, y_n, t), (s=m+1, \dots, n)$$

此地 $r_{s\sigma} = p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\beta} q_{s\sigma}(t)$

$$\psi_s = \tilde{\psi}_s - \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_i} \cdot \frac{1}{t^\alpha} \left[q_{i,m+1} y_{m+1} + \dots + q_{in} y_n + \psi_i \right] (s=m+1, \dots, n)$$

故 ψ_s 和 ψ_i 一样, 满足条件(L), 且有

$$\psi_s(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 (s=m+1, \dots, n)$$

这样一来, 我们得到变换后的方程组为

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{t^\alpha} \left[q_{i,m+1} y_{m+1} + \dots + q_{in} y_n + \psi_i(y_1, \dots, y_n, t) \right] (i=1, \dots, m) \\ \frac{dy_s}{dt} = \left(p_{s,m+1} + \frac{1}{t^\beta} q_{s,m+1} \right) y_{m+1} + \dots + \left(p_{sn} + \frac{1}{t^\beta} q_{sn} \right) y_n \\ \quad + \psi_s(y_1, \dots, y_n, t), (s=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

其中 ψ_k 满足条件(L), 且

$$\psi_k(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0, t) \equiv 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

故(11)满足引理1的一切性质, 因而组(11)有一连续系列的驻定运动, 对应于解:

$$\begin{aligned} y_i &= c_i & (i=1, \dots, m) \\ y_s &= 0 & (s=m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

其中 c_i 为任意常数, 未被扰动运动亦属于该系列, 而系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动, 包括未被扰动运动本身, 均将为稳定的, 此时如果扰动充分小, 任何扰动运动均将各自渐近地趋于该系列驻定运动中的一支。

因此组(6)的未被扰动为稳定, 且有一连续系列的有界运动(7), 故本引理成立。

§3. 现在我们回到 §1 所提出的问题, 并分别讨论 $\gamma > 1$ 及 $0 < \gamma \leq 1$ 的情形。

1) $\gamma > 1$ 的情形。

定理 1, 在(1)中如 $\gamma > 1$ 且有:

(1)

$$\psi_k(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (*)$$

则(1)的未被扰动运动为稳定。此外, 有一連續系列的有界运动(当 $t \geq T > t_0$)

$$(12) \begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^m \left(\delta_i^{(j)} + t^{-(\gamma-1)} u_{ij} \right) \left(c_j + t^{-(\gamma-1)} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right), & (i=1, \dots, m) \\ x_s = t^{-r} \sum_{j=1}^m u_{sj} \left(c_j + t^{-(\gamma-1)} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right) + \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

此地 $\delta_i^{(j)} = 0$ 当 $i \neq j$, $\delta_i^{(i)} = 1$, $(i, j=1, \dots, m)$

u_{ij}, u_{sj} ($j=1, \dots, m$) 均为 t 之有界函数, 当 $t \geq t_0$ 。

$c_1, \dots, c_m$ 为任意常数;

$\varphi_k(c_1, \dots, c_m, t)$ ($k=1, \dots, n$) 在区域 $|c_i| < C \leq A$, $t \geq t_0 > 1$ 中有界(如引理 3 中所指出)。

且对于一切 $t \geq t_0$ 为 $c_1, \dots, c_m$ 之一致正则函数

$$\varphi_k = \sum_{k_1 + \dots + k_m \geq 2} P_k(k_1, \dots, k_m) c_1^{k_1} \dots c_m^{k_m}$$

而 $P_k(k_1, \dots, k_m)(t)$ 当 $t \geq t_0$ 为 t 之有界函数, ($k=1, \dots, n$), 此外, 当 $t \rightarrow t_0$ 时

$$\varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \rightarrow 0 \quad (s=m+1, \dots, n)。$$

且未被扰动运动亦属于该系列有界运动, 而这系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦均为稳定。

証 根据巴索夫的論文[4], 知道(1)的对应綫性方程組:

$$(1') \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t\gamma} \sum_{\sigma=1}^m q_{i\sigma}(t) x_{\sigma}, & (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{t\gamma} \sum_{\sigma=1}^m q_{s\sigma}(t) x_{\sigma} + \sum_{\sigma=m+1}^n \left(P_{s\sigma} + \frac{1}{t\gamma} q_{s\sigma}(t) \right) x_{\sigma}, & (s=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

有 m 个解如下列形式:

$$(13) \begin{cases} x_i^{(j)} = \delta_i^{(j)} + t^{-(\gamma-1)} u_{ij}, & (i, j=1, \dots, m) \\ x_s^{(j)} = t^{-r} u_{sj}, & (s=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

其中 u_{ij}, u_{sj} 为 t 之有界函数, $t \geq t_0$, $\delta_i^{(j)} = 0$ 当 $i \neq j$, $\delta_i^{(i)} = 1$,

现在引入新变数 $y_1, \dots, y_n$ 作变换:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^m x_i^{(j)} y_j & (i=1, \dots, m) \\ x_s = \sum_{j=1}^m x_s^{(j)} y_j + t^{-r} y_s & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (14)$$

注意到 (13) 为 (1') 的 m 个解, 则 (1) 的最初 m 个方程变为:

$$\sum_{j=1}^m x_i^{(j)} \frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{t^{2r}} \sum_{\sigma=m+1}^n q_{i\sigma} y_\sigma + \psi_i^{(1)} + \frac{1}{t^r} \phi_i^{(2)}, \quad (i=1, \dots, m)$$

此处 $\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}$ 中须以 $y_1, \dots, y_n$ 代换 $x_1, \dots, x_n$.

解出 $\frac{dy_j}{dt}$, 得:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{t^{2r}} \sum_{\sigma=m+1}^n q_{j\sigma} y_\sigma + \phi_j^{(1)} + \frac{1}{t^r} \phi_j^{(2)} \right) A_{ji} \quad (i=1, \dots, m)$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m^{(1)} & \dots & x_m^{(m)} \end{vmatrix}, \quad A_{ij} \text{ 为 } D \text{ 之 } (i, j) \text{ 元的代数余因式.}$$

由于当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x_i^{(j)} \rightarrow 0$ ($i \neq j$), $x_i^{(i)} \rightarrow 1$, 故若取 $T > 0$ 足够大, 则对于一切 $t \geq T \geq t_0$ 时, A_{ij} 及 $\frac{1}{D}$ 均为有界, 因而有

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{t^{2r}} \sum_{\sigma=m+1}^n \bar{q}_{j\sigma} y_\sigma + \frac{1}{t^r} \psi_j(y_1, \dots, y_n, t), \quad (j=1, \dots, m)$$

其中 $\bar{q}_{j\sigma} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^m q_{i\sigma} A_{ji}$, 为 t 之有界函数, 当 $t \geq T \geq t_0$

$$\psi_j(y_1, \dots, y_n, t) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^m t^r \phi_i^{(1)} A_{ji} + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^m \phi_i^{(2)} A_{ji} \quad (j=1, \dots, m)$$

计及条件 (*), $\phi_i^{(1)}(y_1, \dots, y_n, 0 \dots 0) \equiv 0$, 推知 $\phi_i^{(1)}(i=1, \dots, m)$ 按 $x_1, \dots, x_n$

的幂的展开中每项均含有因子 $x_s \equiv \sum_{j=1}^m x_s^{(j)} y_j + t^{-r} y_s \equiv t^{-r} \left(\sum_{j=1}^m u_{sj} y_j + y_s \right)$, ($s=m+1, \dots, n$) 故 $t^r \phi_i^{(1)}$ 按 $y_1, \dots, y_n$ 的幂的展开的系数均仍为有界, 因而 $\psi_j(y_1, \dots, y_n, t)$ 对于一切 $t \geq T \geq t_0$ 仍为 $y_1, \dots, y_n$ 的一致正则函数 ($j=1, \dots, m$), 满足条件 (L)。

其次, 我们有

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n p_{s\sigma} y_\sigma + \frac{1}{t} \sum_{\sigma=m+1}^n \bar{q}_{s\sigma} y_\sigma + \psi_s(y_1, \dots, y_n, t), \quad (s=m+1, \dots, n)$$

其中 $\bar{q}_{\sigma} = \frac{1}{t^{r-1}} q_{\sigma} - \frac{1}{t^{2r-1}} \sum_{j=1}^m u_{sj} \bar{q}_{js}$ ($s \neq \sigma$) 为有界函数, 当 $t \geq T \geq t_0$;

$\bar{q}_{\sigma} = \frac{1}{t^{r-1}} q_{\sigma} - \frac{1}{t^{2r-1}} \sum_{j=1}^m u_{sj} \bar{q}_{js} + r$; 亦为有界函数, 当 $t \geq T \geq t_0$;

$\Psi_s(y_1, \dots, y_n, t) = t^r \phi_s^{(1)} + \phi_s^{(2)} - \frac{1}{t^r} \sum_{j=1}^m u_{sj} \bar{\Psi}_j$; ($s = m+1, \dots, n$)

而 $\phi_s^{(1)}, \phi_s^{(2)}$ 中的 $x_1, \dots, x_n$ 均按变换 (14) 为 $y_1, \dots, y_n$ 所代换。

同上面的理由一样, 由于条件 (*), $\phi_s^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \equiv 0$, 推知 $\Psi_s(y_1, \dots, y_n, t)$ ($s = m+1, \dots, n$) 也满足条件 (L)。

于是变换后的方程组为

$$\begin{cases} \frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{t^r} \left[\sum_{\sigma=m+1}^n \frac{\bar{q}_{j\sigma}}{t^r} y_{\sigma} + \Psi_j(y_1, \dots, y_n, t) \right] & (j=1, \dots, m) \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n (p_{s\sigma} + \frac{1}{t} \bar{q}_{s\sigma}) y_{\sigma} + \Psi_s(y_1, \dots, y_n, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (15)$$

这方程组满足引理 4 的一切条件 (此处 $\gamma = \alpha > 1$, $\beta = 1$), 因此关于量 $y_1, \dots, y_n$, 未被扰动运动为稳定且有一连续系列的有界运动存在:

$$\begin{cases} y_i = c_i + \frac{1}{t^{r-1}} \varphi_i(c_1, \dots, c_m, t), & (i=1, \dots, m) \\ y_s = \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

其中 φ_i, φ_s 的性质在引理 4 中已经规定。

所以对于方程组 (1) 未被扰动运动为稳定, 且有一连续系列的有界运动 (12)。

定理证毕。

2) $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$, ($h \geq 0$) 的情形。

定理 2 设在 (1) 中 $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$ ($h \geq 0$)。如果

1° 当 $i \neq \sigma$ 时, $q_{i\sigma} = 0$ ($i, \sigma = 1, \dots, m$)

2° $q_{i\sigma} = t^{-h\gamma} q'_{i\sigma}$ ($\sigma = m+1, \dots, n$), $q'_{i\sigma}$ 当 $t \geq t_0$ 为有界

3° $\int_{t_0}^t t^{-\gamma} (v(t) - q_{ii}(t)) dt$ 有界, ($i=1, \dots, m$)

其中 $v(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{q_{ii}(t)\}$, $t \geq t_0$ 。

4° $\phi_j^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \equiv 0$, ($j=1, \dots, m$)

5° $\sup_{t \geq t_0} t^{(1+h)\gamma} e^{f_i(t)} < +\infty$ ($i=1, \dots, m$)

$$\text{其中 } f_i(t) = \int_0^t t^{-r} q_{ii}(t) dt$$

则方程组 (1) 的未被扰动运动为渐近稳定, 且 (1) 有一连续系列的有界运动:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^m e^{f_i(t)} \left(\delta_{ij}^j + t^{1-(h+2)\gamma} u_{ij} \right) \left(c_j + t^{-(2+h)\gamma} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right) \\ \quad (i=1, \dots, m) \\ x_s = e^{f(t)} t^{-\gamma} \left[\sum_{j=1}^m u_{sj} (c_j + t^{-(2+h)\gamma} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t)) + \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \right] \\ \quad (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (16)$$

此地 $\delta_{ij}^j = 0$ 当 $i \neq j$, $\delta_{ii}^i = 1$ ($i, j=1, \dots, m$),

u_{ij}, u_{sj} ($j=1, \dots, m$) 均为 t 之有界函数, 当 $t \geq t_0$.

$c_1, \dots, c_m$ 为任意常数, $f(t) = \int_{t_0}^t t^{-\gamma} v(t) dt$

$\varphi_k(c_1, \dots, c_m, t)$, ($k=1, \dots, n$) 的性质如定理 1 所规定。

未被扰动亦属于该系列有界运动, 而该系列中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦均为稳定。

证 考虑此时 (1) 对应的线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t^\gamma} \sum_{\sigma=1}^n q_{i\sigma} x_\sigma = \frac{1}{t^\gamma} q_{ii} x_i + \frac{1}{t^{(1+k)\gamma}} \sum_{\sigma=m+1}^n q'_{i\sigma} x_\sigma \quad (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{t^\gamma} \sum_{\sigma=1}^n q_{s\sigma} x_\sigma + \sum_{\sigma=m+1}^n (p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}) x_\sigma \quad (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (1'')$$

根据文 [5] 的情形 III (这里 $\alpha = -\gamma$, $\beta = 0$), 知 (1'') 有 m 组解:

$$\begin{cases} z_i^{(j)} = e^{f_i(t)} \left(\delta_{ij}^j + t^{1-(h+2)\gamma} u_{ij} \right) \quad (i, j=1, \dots, m) \\ x_s^{(j)} = e^{f(t)} t^{-\gamma} u_{sj} \quad (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$f_i(t) = \int_{t_0}^t \frac{q_{ii}}{t^\gamma} dt \quad (i=1, \dots, m), f(t) = \int_{t_0}^t \frac{\nu(t)}{t^\gamma} dt \text{ 而 } \nu(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{q_{ii}(t)\},$$

($t \geq t_0$); u_{ij}, u_{sj} 为 t 之有界函数, 当 $t \geq t_0$

现在引入新变数 $y_1, \dots, y_n$, 作变换

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^m x_i^{(j)} y_j = \sum_{j=1}^m e^{f_i(t)} \left(\delta_{ij}^j + t^{1-(h+2)\gamma} u_{ij} \right) y_j, \quad (i=1, \dots, m) \\ x_s = \sum_{j=1}^m x_s^{(j)} y_j + e^{f(t)} t^{-\gamma} y_s = e^{f(t)} t^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^m u_{sj} y_j + y_s \right), \\ \quad (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (18)$$

代入 (1), 计及 (17) 为 (1'') 的解, 得

$$\sum_{j=1}^m x_i^{(j)} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n t^{-(2+h)\gamma} e^{f(t)} q'_{i\sigma} y_{\sigma} + \frac{\tilde{\psi}(1)}{t} + \frac{1}{t^2} \tilde{\psi}(2).$$

$$(i=1, \dots, m)$$

其中 $\tilde{\psi}_i(1), \tilde{\psi}_i(2)$ 为 $\psi_i(1), \psi_i(2)$ 经过变换 (18) 后的结果。

由是解得:

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\sigma=m+1}^n t^{-(2+h)\gamma} e^{f(t)} q'_{i\sigma} y_{\sigma} + \frac{\tilde{\psi}(1)}{t} + \frac{1}{t^2} \tilde{\psi}(2) \right) A_{ij}$$

$$(j=1, \dots, m)$$

此地

$$D = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_m^{(1)} & \dots & x_m^{(m)} \end{vmatrix} = e^{\sum_{i=1}^m f_i(t)} \begin{vmatrix} t^{1-(h+2)\gamma_{u11}} & \dots & t^{1-(h+2)\gamma_{u1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ t^{1-(h+2)\gamma_{um1}} & \dots & t^{1-(h+2)\gamma_{um m}} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\sum_{i=1}^m f_i(t)} D_i(t)$$

A_{ij} 为 D 中 (i, j) 之代数余因式。

由于 $t \rightarrow +\infty$ 时 $D_i(t) \rightarrow 1$, 故当 t_0 足够大而使 $t \geq t_0$ 时, $D_i(t) \neq 0$, 因此有

$$\frac{A_{ij}}{D} = e^{-f_i(t)} B_{ij}(t), \quad B_{ij}(t) \text{ 当 } t \geq t_0 \text{ 时有界}, \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

我們可以写成:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^m \left[t^{-(2+h)\gamma} \sum_{\sigma=m+1}^n e^{f(t)-f_i(t)} q'_{i\sigma} y_{\sigma} - f_i(t) \left(\frac{\tilde{\psi}(1)}{t} + \frac{1}{t^2} \tilde{\psi}(2) \right) \right] B_{ij}, \quad (j=1, \dots, m)$$

$$\text{或} \quad \frac{dy_j}{dt} = t^{-(2+h)\gamma} \left[\bar{q}_{j, m+1} y_{m+1} + \dots + \bar{q}_{jn} y_n + \tilde{\psi}_j(y_1, \dots, y_n, t) \right],$$

$$(j=1, \dots, m) \quad (19)$$

$$\text{此地} \quad \bar{q}_{j\sigma} = \sum_{i=1}^m e^{f(t)-f_i(t)} q'_{i\sigma} B_{ij}, \quad (j=1, \dots, m; \sigma=m+1, \dots, n)$$

$$\tilde{\psi}_j(y_1, \dots, y_n, t) = t^{(2+h)\gamma} \sum_{i=1}^m e^{-f_i(t)} \tilde{\psi}_i(1) B_{ij} + t^{(1+h)\gamma} \sum_{i=1}^m e^{f_i(t)} \tilde{\psi}_i(2) B_{ij},$$

$$(j=1, \dots, m) \quad (20)$$

根据条件 3°, 知 $f(t) - f_i(t)$ 为有界, 推知 $\bar{q}_{j\sigma}$ 为有界。

又根据条件4°, $\Psi_i(t)(x_1, \dots, x_m, 0 \dots 0) \equiv 0$ 推知 $\Psi_i(t)$ 的展式之项最少有因子为 $x_1 x_s$ 或 $x_\sigma x_s$ ($j=1, \dots, m, s, \sigma=m+1, \dots, n$) 即 $\tilde{\Psi}_i(t)$ 展式之项最少有因子为 $e^{f_i(t)+f_j(t)} t^{-\gamma}$ 或 $e^{2f_i(t)} t^{-2\gamma}$, 因此 $t^{(1+h)} \gamma e^{-f_i(t)} \tilde{\Psi}_i(t) B_{ij}$ 的展式的系数只有如下的形式:

I $t^{(1+h)} \gamma e^{f_j(t)} e^{-f_i(t)-f_i(t)} P(t)$, $P(t)$ 为有界函数

II $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)} e^{-f_i(t)-f_i(t)} Q(t)$, $Q(t)$ 为有界函数

由于条件3° $f(t) - f_i(t)$ 为有界, 由于条件5°, $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)}$ 为有界, 因而 $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)} = t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)}$, $e^{f_i(t)-f_i(t)}$ 亦为有界, 所以 I, II 二种系数均为有界, 因而推知 $t^{(1+h)} \gamma e^{-f_i(t)} \tilde{\Psi}_i(t) B_{ij}$ 为有界, 且满足条件(L)

其次, 考虑(20)的第二个和: $t^{(1+h)} \gamma \sum_{i=1}^m e^{-f_i(t)} \tilde{\Psi}_i^{(2)} B_{ij}$, 注意到 $\tilde{\Psi}_i^{(2)}$ 的性质, 它的展式的项最少有如下形式的因子之一: $x_j x_k$ ($j, k=1, \dots, m$), 或 $x_j x_s$ ($j=1, \dots, m; s=m+1, \dots, n$) 或 $x_s x_\sigma$ ($s, \sigma=m+1, \dots, n$), 因此 $\tilde{\Psi}_i^{(2)}$ 按 $y_1, \dots, y_n$ 之幂的展式之项最少有下列形式的因子之一: $e^{f_j(t)+f_k(t)}$ 或 $t^{-\gamma} e^{f_i(t)+f_j(t)}$ 或 $t^{-2\gamma} e^{2f_i(t)}$, 由是推知 $t^{(1+h)} \gamma e^{-f_i(t)} \tilde{\Psi}_i^{(2)} B_{ij}$ 的展式的系数只有如下的形式:

I $t^{(1+h)} \gamma e^{f_j(t)} e^{f_k(t)-f_i(t)} P(t)$ $P(t)$ 为有界函数

II $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)} e^{-f_i(t)-f_i(t)} Q(t)$ $Q(t)$ 为有界函数

III $t^{(-1+h)} \gamma e^{f_i(t)} e^{-f_i(t)-f_i(t)} R(t)$ $R(t)$ 为有界函数

根据条件3°, $f_i(t) - f_i(t) = [f(t) - f_i(t)] - [f(t) - f_i(t)]$ 为有界

根据条件5°, $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)}$, $t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)}$ 均有界, $t^{(-1+h)} \gamma e^{f_i(t)} = t^{(-1+h)} \gamma e^{f_i(t)} e^{f_i(t)-f_i(t)}$ 更加有界, 故推知 $t^{(1+h)} \gamma e^{-f_i(t)} \tilde{\Psi}_i^{(2)} B_{ij}$ 有界且满足条件(L)。

于是证明 $\tilde{\Psi}_j(y_1, \dots, y_n, t)$ 满足条件(L), ($j=1, \dots, m$)。

此外, 经过变换(18), 从(1)得到:

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} = & \sum_{\sigma=m+1}^n \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma} \right) y_\sigma + e^{-f(t)} t^\gamma \tilde{\Psi}_s^{(1)} + e^{-f(t)} \tilde{\Psi}_s^{(2)} \\ & + (\gamma t^{-1} - t^{-\gamma} v(t)) y_s - \sum_{j=1}^m u_{sj} t^{-(1+h)\gamma} \left[\bar{q}_{j, m+1} y_{m+1} + \dots + \bar{q}_{jn} y_n \right. \\ & \left. + \tilde{\Psi}_j(y_1, \dots, y_n, t) \right] \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} \bar{q}_{s\sigma}(t) \right) y_\sigma + \gamma_s(y_1, \dots, y_n, t), \quad (s=m+1, \dots, n)$$

$$\text{此地} \quad \bar{q}_{s\sigma} = q_{s\sigma} - \sum_{j=1}^m u_{sj} t^{-(1+h)\gamma} \bar{q}_{j\sigma}, \quad s \neq \sigma (s, \sigma=m+1, \dots, n).$$

$$\bar{q}_{ss} = q_{ss} - \sum_{j=1}^m u_{sj} t^{-(1+h)\gamma} \bar{q}_{js} + \gamma_s t^{-1+\gamma-v(t)}, \quad (s=m+1, \dots, n)$$

$$\Psi_s(y_1, \dots, y_n, t) = e^{-f(t)} t^\gamma \tilde{\Psi}_s(1) + e^{-f(t)} \tilde{\Psi}_s(2) - \sum_{j=1}^m u_{sj} t^{-(2+h)\gamma} \tilde{\Psi}_j(s=m+1, \dots, n)$$

由于 $v(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{q_{ii}(t)\}$, 故 $v(t)$ 亦为有界, 并注意到 $0 < \gamma \leq 1$, 显见 $q_{i\sigma}$, $q_{\sigma\sigma}$ 均为有界, 至于 $\Psi_s(y_1, \dots, y_n, t)$, 可以仿照討論 $\tilde{\Psi}_j(y_1, \dots, y_n, t)$ ($j=1, \dots, m$) 的同样理由, 更易証明它也滿足条件 (L)。

这样一来, 組(1)經過变换(18)之后, 得方程組:

$$\begin{cases} \frac{dy_j}{dt} = t^{-(2+h)\gamma} \left[q_{jm+1} y_{m+1} + \dots + q_{jn} y_n + \Psi_j(y_1, \dots, y_n, t) \right] & (j=1, \dots, m) \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\sigma=m+1}^n (p_{s\sigma} + \frac{1}{t} q_{s\sigma}) y_\sigma + \Psi_s(y_1, \dots, y_n, t) & (s=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (22)$$

方程組(22)与(6)同一类型, 且滿足引理4的一切条件(此时 $\alpha = (2+h)\gamma > 1$, $\beta = \gamma > \frac{1}{2+h} \geq 0$), 因此(22)的未被扰动为稳定, 且有一連續系列的有界运动。

$$\begin{cases} y_j = c_j + t^{-(2+h)\gamma} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t), & (j=1, \dots, m) \\ y_s = \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \end{cases}$$

因此方程組(1)的未被扰动运动为稳定, 且有一連續系列的有界运动(16), 而(16)中充分接近于未被扰动运动的一切运动亦为稳定。

此外从条件5°推知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i^{(1)}(t) = 0$, 再由未被扰动运动关于 γ 为稳定, 故(22)的一切运动 $y_k(t)$ ($k=1, \dots, n$) 当始初扰动足够小均为有界, 于是根据变换(18), 得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$ ($k=1, \dots, n$), 即表示(1)的未被扰动运动为漸近稳定。

推論 設在(1)中, $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$ ($h \geq 0$) 如果

- 1° 当 $i \neq \sigma$ 时 $q_{i\sigma} = 0$, $q_{ii} = q(t)$ ($i, \sigma=1, \dots, m$)
- 2° $q_{i\sigma} = t^{-h\gamma} q'_{i\sigma}$ ($\sigma=m+1, \dots, n$)
- 3° $\Psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \equiv 0$ ($i=1, \dots, m$)
- 4° $\sup_{t \geq t_0} t^{(1+h)\gamma} e^{f(t)} < +\infty$, 其中 $f(t) = \int_{t_0}^t t^{-\gamma} q(t) dt$

則定理2之結論仍成立。

事实上, 此时 $v(t) = q(t)$, $v(t) - q_{ii}(t) \equiv 0$, 定理2的条件3°自然成立, 而 $f_i(t) = f(t)$ 。

定理3 設在(1)中 $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$ ($h \geq 0$)。如果

- 1° 当 $i \neq \sigma$ 时, $q_{i\sigma} = 0$ ($i, \sigma=1, \dots, m$)。
- 2° $q_{i\sigma} = t^{-h\gamma} q'_{i\sigma}$ 而 $q'_{i\sigma}$ 有界 ($\sigma=m+1, \dots, n$)。
- 3° $\int_{t_0}^t t^{-\gamma} (v(t) - q_{ii}(t)) dt$ 有界, ($i=1, \dots, m$),

$$\text{其中 } v(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{q_{ii}(t)\}, \quad t \geq t_0.$$

$$4^\circ \quad \phi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_m)_\mu, \quad \mu \geq 2 \quad (i=1, \dots, m).$$

$$5^\circ \quad \sup_{t \geq t_0} t^{(1+h)\gamma} e^{f_i(t)} < +\infty, \quad \text{当 } \mu > 2, \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\sup_{t \geq t_0} t^{(2+h)\gamma} e^{f_i(t)} < +\infty, \quad \text{当 } \mu = 2, \quad (i=1, \dots, m)$$

则定理 2 的结论仍成立。

证：证明过程如定理 2，但须重新考虑 (20) 中的 $\Psi_j(y_1, \dots, y_n, t)$, ($j=1, \dots, m$)

A. $\phi_j^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_m)_\mu$, $\mu > 2$ 的情形。

此时 $\phi_j^{(1)}$ ($i=1, \dots, m$) 的展式之项最少有因子 $x_j x_k x_l$ 或 $x_j x_k$ 或 $x_k x_l$ ($j, k, l=1, \dots, m$; $S, \sigma=m+1, \dots, n$)，即 $\bar{\Psi}_j^{(1)}$ 的展式之项最少有因子： $e^{f_j(t)+f_k(t)+f_l(t)}$ 或 $f_j(t)+f(t)$ $-\gamma$ ，或 $e^{2f(t)}$ 。因此 $t^{(2+h)\gamma} e^{-f_i(t)} \bar{\Psi}_j^{(1)} B_{ij}$ 的展式的系数只有如下三种形式：

$$\text{I.} \quad t^{(2+h)\gamma} e^{f_j(t)+f_k(t)+f_l(t)-f_i(t)} \cdot P(t), \quad P(t) \text{ 为有界函数。}$$

$$\text{II.} \quad t^{(1+h)\gamma} e^{f_j(t)} e^{f(t)-f_i(t)} \cdot Q(t), \quad Q(t) \text{ 为有界函数。}$$

$$\text{III.} \quad t^{h\gamma} e^{f(t)} e^{f(t)-f_i(t)} \cdot R(t), \quad R(t) \text{ 为有界函数。}$$

II, III 二种函数按已前的证明均为有界。至于第 I 种函数的有界性的证明也可根据条件 5° 及 $f(t)-f_i(t)$ 的有界性 (根据条件 3°) 推得，因为：

$$t^{(2+h)\gamma} e^{f_j(t)+f_k(t)+f_l(t)-f_i(t)} = t^{(1+h)\gamma} e^{f_j(t)} \cdot t^\gamma e^{f_k(t)} \cdot e^{f_l(t)-f(t)} \cdot e^{f(t)-f_i(t)}$$

(20) 的第二个和的有界性的证明完全和定理 2 一样，所以 $\Psi_j(y_1, \dots, y_n, t)$ ($j=1, \dots, m$) 仍满足条件 (L)。

至于 $\Psi_j(y_1, \dots, y_n, t)$ 在条件 5° 之下仍满足条件 (L) 则是显然的，故定理 2 的结论仍成立。

B. $\Psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_m)_2$ 的情形

仿上面的理由，易见此时 $t^{(2+h)\gamma} e^{-f_i(t)} \bar{\Psi}_j^{(1)} B_{ij}$ 的展式的系数只有如下三种形式：

$$\text{I.} \quad t^{(2+h)\gamma} e^{f_j(t)} e^{f(t)-f_i(t)} P(t), \quad P(t) \text{ 为有界函数。}$$

$$\text{II.} \quad t^{(1+h)\gamma} e^{f(t)} e^{f(t)-f_i(t)} Q(t), \quad Q(t) \text{ 为有界函数。}$$

$$\text{III.} \quad t^{(2+h)\gamma} e^{f_j(t)+f_l(t)} R(t), \quad R(t) \text{ 为有界函数。}$$

根据条件 3° ，即 $f(t)-f_i(t)$ 为有界 ($i=1, \dots, m$)，

及根据条件 5° 的 $\sup_{t \geq t_0} t^{(2+h)\gamma} e^{f_i(t)} < +\infty$ ($i=1, \dots, m$) 可以证明这三种类型的系数均为

有界，其余部分的证明均与定理 2 相同，因此定理 2 的结论仍有效，证毕。

参 考 文 献

- [1] А.М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М.Л. 1950
- [2] 許添庆. 一类微分方程組在一个临界情形中的解的稳定条件, 教学学报 10. № 2 (1960)
- [3] И. Г. Малкин. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, Т. IV, Вып. №6. (1942)
- [4] Б.Н. Басов. Устойчивость решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений ПММ, Т. XV III, Вып. 3, (1954)
- [5] 胡金昌 許添庆 关于临界情形某一类微分方程組的稳定, 中山大学学报本期

ВОПРОС ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ
ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Суй Сюн-цзи. Ху Цзюнь-чан
(Университет им. Сунь Ят-сена)

Резюме

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{t} \sum_{\sigma=1}^m q_{i\sigma}(t) x_{\sigma} + \Psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t} \Psi_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t} \sum_{\sigma=1}^m q_{s\sigma}(t) x_{\sigma} + \sum_{\sigma=m+1}^n \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t} q_{s\sigma}(t) \right) x_{\sigma} + \Psi_s^{(1)}(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \frac{1}{t} \Psi_s^{(2)}(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i=1, \dots, m; \quad s=m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

Где $\gamma > 0$ и $p_{s\sigma}$ ($s, \sigma = m+1, \dots, n$) — вещественные постоянные, причем p_{ss} такие, что все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{m+1, m+1} - k & \dots & p_{m+1, n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n, m+1} & \dots & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные вещественные части; $q_{j\sigma}(t)$ ($j, \sigma = 1, \dots, n$) — вещественные функции вещественной переменной t , определенные, непрерывные и ограниченные при всех $t \geq t_0 > 0$; $\Psi_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, n$) — голоморфные функции переменных $x_1, \dots, x_n$, разложения которых начинаются членами не выше второго порядка, а $\Psi_j^{(2)}$ —

голоморфные функции переменных $x_1, \dots, x_n$, разложения которых имеют вид

$$\psi_j^{(2)} = \sum_{m_1 + \dots + m_n \geq 2} R_j^{(m_1, \dots, m_n)}(t) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

коэффициенты $R_j^{(m_1, \dots, m_n)}(t)$ в этих разложениях суть непрерывные функции t , ограниченные при всех $t \geq t_0 > 0$, удовлетворяющие лишь тому условию, чтобы все $\psi_j^{(2)}$ были голоморфные в равной степени⁽¹⁾ для всех $t \geq t_0 > 0$.

Цель настоящей работы заключается в исследовании условия устойчивости в смысле Янукова невозмущенного движения $x_1 = \dots = x_n = 0$ системы (1) при $t \rightarrow +\infty$.

Настоящую работу можно считать продолжением работы [2] в которой мы исследовали случай $m = 1$.

Теорема 1. Если в уравнениях (1), $\gamma > 1$, а

$$\Psi_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

то невозмущенное движение системы (1) устойчиво. Кроме того, уравнения (1) имеют решение вида

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^m \left(\delta_{ij}^j + t^{-(\gamma-1)} \mu_{ij} \right) \left[c_j + t^{-(\gamma-1)} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right], \\ x_s &= t^{-\gamma} \sum_{j=1}^m \mu_{sj} \left[c_j + t^{-(\gamma-1)} \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right] + \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t), \\ &\quad (i = 1, \dots, m; \quad s = m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

где $\delta_{ij}^j = 0$ при $i \neq j$, а $\delta_{ij}^i = 1$, $(i, j = 1, \dots, m)$.

μ_{ij} , μ_{sj} — функции t , ограниченные при всех $t \geq t_0$;

$c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные;

$\varphi_k(c_1, \dots, c_m, t)$, $(k = 1, \dots, n)$ — голоморфные функции $c_1, \dots, c_m$ в равной степени для всех $t \geq t_0 > 1$ при $|c_i| \leq C \leq A$, причем разложения функций φ_k по степеням $c_1, \dots, c_m$ не содержат членов первой степени и притом $\varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, $(s = m+1, \dots, n)$.

Это решение определяем непрерывный ряд ограниченных движений, заключающий в себе и невозмущенное движение, а все движения этого ряда, достаточно близкие к невозмущенному будут устойчивыми.

Теорема 2. Если в уравнениях (1) $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$ ($h \geq 0$),

и если 1° $q_i \sigma = 0$ при $i \neq \sigma$ ($i, \sigma = 1, \dots, m$),

2° $q_i \sigma = t^{-h} q'_i \sigma$ и $q'_i \sigma$ ограниченные при $t \geq t_0$ ($\sigma = m+1, \dots, n$),

3° $\int_{t_0}^t t^{-\gamma} (\chi(t) - q_n(t)) dt$ ограниченные при $t \geq t_0$ ($i = 1, \dots, m$),

где $v(t) = \sup_{i=1, \dots, m} \{q_{ii}(t)\}$ при $t \geq t_0$,

$$4^\circ \Psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (i=1, \dots, m),$$

$$5^\circ \sup_{t \geq t_0} t^{(1+k)} \gamma e^{f(t)} < +\infty \quad (i=1, \dots, m),$$

$$\text{где } f_i(t) = \int_{t_0}^t t^{-\gamma} q_{ii}(t) dt$$

то невозмущенное движение системы (1) асимптотическое устойчиво. Кроме того, уравнения (1) имеют решение вида

$$x_i = \sum_{j=1}^m e^{f_i(t)} \left(\delta_i^j + t^{-(2+k)} \gamma \mu_{ij} \right) \left(c_j + t^{-(2+h)} \gamma \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right),$$

$$x_s = e^{f_s(t)-\gamma} \left[\sum_{j=1}^m \mu_{sj} \left(c_j + t^{-(2+h)} \gamma \varphi_j(c_1, \dots, c_m, t) \right) + \varphi_s(c_1, \dots, c_m, t) \right],$$

$$(i=1, \dots, m; \quad s=m+1, \dots, n),$$

где $f(t) = \int_{t_0}^t t^{-\gamma} v(t) dt$, а μ_{ij} , μ_{sj} , φ_j , φ_s определены в теореме 1.

Это решение определяет непрерывный ряд ограниченных движений, к которому будет принадлежать и невозмущенное, и все движения этого ряда, достаточно близкие к невозмущенному, будут устойчивыми.

Теорема 3. Если в уравнениях (1) $\frac{1}{2+h} < \gamma \leq 1$ ($h > 0$),

и если $1^\circ q_{i\sigma} = 0$ при $i \neq \sigma$ ($i, \sigma = 1, \dots, m$),

$2^\circ q_{i\sigma} = t^{-h} \gamma q'_{i\sigma}$ и $q'_{i\sigma}$ ограниченные при $t \geq t_0$ ($\sigma = m+1, \dots, n$),

$3^\circ \int_{t_0}^t t^{-\gamma} (v(t) - q_{ii}(t)) dt$ ограниченные при $t \geq t_0$ ($i=1, \dots, m$),

где $v(t) = \sup \{q_{ii}(t)\}$ при $t \geq t_0$,

$4^\circ \Psi_i^{(1)}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_m)_{ii}$, $\mu \geq 2$, ($i=1, \dots, m$),

$5^\circ \sup_{t \geq t_0} t^{(1+h)} \gamma e^{f_i(t)} < +\infty$ при $\mu > 2$, ($i=1, \dots, m$),

$\sup_{t \geq t_0} t^{(2+h)} \gamma e^{f_i(t)} < +\infty$ при $\mu = 2$, ($i=1, \dots, m$),

то утверждение теоремы 2 тоже справедливо.