

一类变系数非綫性微分方程組 解的稳定条件

欧阳亦嵩 賀春錦

(数力系四年級学生)

考虑下列微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

其中 $p_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) 为 $t \geq t_0$ 的实連續函数, f_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为变量 $t, x_1, \dots, x_n$ 的实連續函数, 定义于区域:

$$t \geq t_0, \quad |x_i| < A \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

且

$$f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

在区域 $(*)$ 內組(1)滿足解的存在及唯一性条件。

本文的目的在于研究組(1)的平凡解, 即未被扰动运动 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 的 Ляпунский (1) 稳定性問題。

定理: 設組(1)右端滿足如下条件:

- 1). $p_{ij}(t) + p_{ji}(t)$ ($i \neq j$) 在 $[t_0, +\infty)$ 是絕對可积的;
- 2). $p_{ii}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 或为絕對可积, 或为非正;
- 3). $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ 是这样的: 在区域 $(*)$ 內, 存在一个在 $[t_0, +\infty)$ 为可积的非負实函数 $g(t)$, 滿足不等式:

$$\sum_{i=1}^n |f_i| \leq \frac{1}{2n} g(t) \sum_{i=1}^n |x_i|$$

則組(1)之平凡解是稳定的。

証明: 为叙述方便起见, 而又不損害一般性, 設矩陣 $\|P_{ij}\|$ 的主对角綫上前 k 个元素非正。 ($0 \leq k \leq n$), 而其余的 $p_{ij}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 为絕對可积。

取初值条件为

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

其中 $|x_{i0}| < A$.

这样得到一組解。

$$x_i = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

作变换

$$\begin{cases} x_i = \gamma \cos \theta_i \\ \sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = 1, \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\gamma, \theta_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为 t 的函数。

则

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \frac{d\gamma^2}{dt} &= \sum_{i=1}^n 2x_i \frac{dx_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + f_i(t, x_1, \dots, x_n) \right) = \\ &= 2\gamma^2 \sum_{i=1}^n p_{ii}(t) \cos^2 \theta_i + \gamma^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n [p_{ij}(t) + p_{ji}(t)] \cos \theta_i \cos \theta_j + 2\gamma \sum_{i=1}^n f_i \cos \theta_i \end{aligned}$$

从 t_0 到 t 积分上式:

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \left(2\gamma^2 \sum_{j=1}^n p_{ii} \cos^2 \theta_i + \gamma^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (p_{ij} + p_{ji}) \cos \theta_i \cos \theta_j + 2\gamma \sum_{i=1}^n f_i \cos \theta_i \right) d\tau$$

其中 $\gamma_0^2 = \sum_{i=1}^n x_{i0}^2$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &\leq \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \left(2\gamma^2 \sum_{i=k+1}^n p_{ii} \cos^2 \theta_i + \gamma^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (p_{ij} + p_{ji}) \cos \theta_i \cos \theta_j \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma \sum_{i=1}^n f_i \cos \theta_i \right) d\tau \\ &\leq \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \left(2\gamma^2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \gamma^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + 2|\gamma| \sum_{j=1}^n |f_j| \right) d\tau \\ &\leq \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \left(2\gamma^2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \gamma^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + 2|\gamma| \left(\frac{1}{2n} g \sum_{i=1}^n x_i \right) \right) d\tau \\ \therefore \gamma^2 &\leq \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \gamma^2 \left(2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + g \right) dt. \end{aligned} \quad (3)^*$$

$$\text{令 } \bar{\gamma} = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} \gamma^2(t)$$

* 从这里出发也可以运用 R. Bellman 不等式^[2]而得证定理。

則可以在 $[t_0, t_0 + T]$ 上找到一點 t_1 , 使

$$\bar{\gamma} = \gamma^2(t_1)$$

从(3)式得

$$\bar{\gamma} \leq \gamma_0^2 + \bar{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} \left(2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + g \right) d\tau$$

即

$$\left(1 - \int_{t_0}^{t_1} \left(2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + g \right) d\tau \right) \bar{\gamma} \leq \gamma_0^2$$

計及假定的性質對於任意給定 C , 并滿足 $0 < C < 1$.

則當 t_0 充分大時, 對一切 $t \geq t_0$, 有

$$\int_{t_0}^t \left(2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + g \right) dt < c < 1$$

所以當 t_0 充分大時,

$$\bar{\gamma} \leq \frac{\gamma_0^2}{1 - \int_{t_0}^{t_1} \left(2 \sum_{i=k+1}^n |p_{ii}| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |p_{ij} + p_{ji}| + g \right) d\tau} < \frac{\gamma_0^2}{1-c}$$

因為 T 可以任意選擇, 故對一切 $t \geq t_0$.

$$\gamma^2(t) \leq \bar{\gamma} < \frac{\gamma_0^2}{1-c}.$$

因此, 任給 $\varepsilon > 0$, 我們可以找出 $\delta > 0$, 使當 $|x_{i_0}| < \delta$ ($\delta < A$)

$$\frac{\gamma_0^2}{1-c} < \varepsilon^2.$$

即 $\gamma^2 < \varepsilon^2$.

$$\therefore |x_i| < \varepsilon.$$

附注: 對於 $p_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 為可以取實值的連續函數, 我們可以得到類似的定理如下:

設組(1)的右端滿足如下的條件:

- 1°. $p_{ij}(t) + \overline{p_{ji}(t)}$ 在 $(t_0, +\infty)$ 是絕對可積的, 此處 $\overline{p_{ji}(t)}$ 為 $p_{ji}(t)$ 的共軛復數;
- 2°. $p_{ii}(t)$ 的實數部分在 $(t_0, +\infty)$ 或絕對可積, 或非正;
- 3°. $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ 是這樣的: 在區域(*)內存在一個在 $[t_0, +\infty)$ 可積的非負實函數 $g(t)$ 滿足不等式

$$\sum_{i=1}^n |f_i| \leq \frac{1}{2n} g(t) \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

則組 (1) 的平凡解是稳定的.

証明: 为叙述方便起见, 而又不損害一般性, 設矩陣 $\|P_{ij}\|$ 的主对角綫上前 K 个元素具有非正的实部分, 而其余的 $P_{ii}(t)$ 的实部分在 $[t_0, +\infty)$ 绝对可积.

取初值条件为

$$x_s(t_0) = x_{s0} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

其中

$$|x_{s0}| < A.$$

这样得到一組解

$$x_s = x_s(t) = \gamma_s e^{i\theta_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

其中 γ_s, θ_s 为 t 的函数.

作变换.

$$\begin{cases} \gamma_s = \gamma \cos \varphi_s \\ \sum_{s=1}^n \cos^2 \varphi_s = 1 \end{cases}$$

其中 γ, φ_s 为 t 的实函数.

$$\text{則 } \gamma^2 = \sum_{s=1}^n \gamma_s^2 = \sum_{s=1}^n x_s \bar{x}_s.$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma^2}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n x_s \bar{x}_s = \sum_{s=1}^n (p_{ss} + \bar{p}_{ss}) x_s \bar{x}_s + \\ &+ \sum_{\substack{s,j=1 \\ s \neq j}}^n (p_{sj} + \bar{p}_{js}) x_s \bar{x}_j + \sum_{s=1}^n (x_s \bar{f}_s + \bar{x}_s f_s) \end{aligned}$$

从 t_0 到 t 积分上式:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \left(\sum_{s=1}^n (p_{ss} + \bar{p}_{ss}) x_s \bar{x}_s + \sum_{\substack{s,j=1 \\ s \neq j}}^n (p_{sj} + \bar{p}_{js}) x_s \bar{x}_j + \right. \\ &\left. + \sum_{s=1}^n (x_s \bar{f}_s + \bar{x}_s f_s) \right) d\tau. \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \gamma_0^2 = \sum_{s=1}^n x_{s0} \bar{x}_{s0}.$$

$$\gamma^2 \leq \gamma_0^2 + \int_{t_0}^t \gamma^2 \left(\sum_{s=k+1}^n |p_{ss} + \bar{p}_{ss}| + \sum_{\substack{s,j=1 \\ s \neq j}}^n |p_{sj} + \bar{p}_{js}| + g \right) d\tau.$$

余下与上面的定理的証明相仿.

推論: 在組 (1) 中, 当 $f_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 即得到綫性齐次方程組:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1')$$

这时定理中的条件 3) 自然满足, (取 $g(t) \equiv 0$ 即可) 因而得到相应的判别法.

本文作者对許淑庆教授、胡金昌教授以及黎百恬老师的指导和鼓励表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] А.М. ЛЯПУНОВ., Общая задача об устойчивости движения. М. Л. 1950.

[2] RICHARD BELLMAN., Stability Theory of Differential Equations. 1953.
The Stability of Solutions of a Kind of Nonlinear Differential Equations with Variable Coefficients

Au Yeung Yik-Oi Ho Chun-Chin

(Abstract)

Consider the following system of differential equations,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

where $p_{ij}(t)$ are real continuous functions of t ($t \geq t_0$). f_i ($i=1, 2, \dots, n$) are real continuous functions of $t, x_1, x_2, \dots, x_n$, defined on the following region;

$$t \geq t_0, |x_i| \leq K_A \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

and

$$f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

The existence and uniqueness of solutions of system (1) is presupposed on region (*). The purpose of this paper is to study the stability (in the sense of Liapounoff) of the trivial solution, i.e. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Theorem: Let the right hand side of system (1) satisfies the following conditions,

1. $P_{ij}(t) + P_{ji}(t)$ are absolute integrable in the interval $[t_0, \infty)$.

2. $P_{ii}(t)$ are either absolute integrable, or non-positive in the interval $[t_0, \infty)$.

3. $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ are such: On region (*), there exists a non-negative real function, which is integrable in the interval $[t_0, \infty)$, and satisfies the following inequality,

$$\sum_{i=1}^n |f_i| \leq \frac{1}{2^n} g(t) \sum_{i=1}^n |x_i|$$

then the trivial solution of system (1) is stable.

In this paper, we also generalize the result of our theorem, when and $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ are complex functions, and we have the analogous result.