

收斂數列空間 (C) 中的弱列緊性*

黃 炎 明

在 G. Sirvint 的一篇文章[1]中 (确切地說是 A. Alexiewicz 替他整理的文章) 曾給出了如下定理:

定 理: (c) 空間的子集 H 弱列緊的充分必要条件是同时成立着:

(1) H 为有界集,

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^{(\infty)}$ 並一致成立于 H.

該文中沒有加以証明。

本文的目的在于給出例子來說明这个定理所說条件的充分性是不正确的, 並且給出 (c) 空間中子集弱列緊的另一个充分必要条件。

下面先叙述一些用到的定义和命題。

(c) 空 間: 所有滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^{(\infty)}$ 的实数序列 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ (其中 $x^{(\infty)}$ 为一实数) 按通常方式构成綫性空間, 并以

$$\|x\| = \sup_n \left\{ |x^{(n)}| \right\}$$

为模数所构成的 Banach 空間称为收斂數列空間, 記作 (c). [2, 29—30頁]

弱列緊性: 設 E 为一綫性有模空間, E^* 表示 E 的共軛空間. 若 E 的子集 H 具有如下性質:

凡序列 $\{x_n\} \subset H$ 均含有一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 及存在 $x_0 \in E$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \text{ 对一切 } f \in E^* \text{ 成立,}$$

則称 H 为弱列緊的。

有 界 性: 設 E 为一綫性有模空間. 对 E 的子集 H, 若有实数 M 存在, 使

$$\|x\| \leq M \quad \text{对一切 } x \in H \text{ 均成立,}$$

則称 H 为有界的。

並一致收斂: 設 $H \subset (c)$, 若对每个正数 ϵ 及自然数 n_0 , 均有自然数 $n_1 \geq n_0$ 使

* 本文承刘俊賢教授、郑會同教授和刘良深同志先后审阅并提出寶貴的意見, 謹致深切謝意。

$$\min_{n_0 < n < n_1} |x^{(n)} - x^{(\infty)}| < \varepsilon \quad \text{對一切 } x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots) \in H \text{ 均成立}$$

則稱序列 $\{x^{(n)}\}$ 在 H 上亞一致收斂於 $x^{(\infty)}$ ，或寫為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^{(\infty)} \quad \text{亞一致成立於 } H.$$

注意，亞一致收斂的概念與通常的收斂概念有一點重要的差別： $\{x^{(n)}\}$ 在 H 上亞一致收斂於 $x^{(\infty)}$ 並不能推出 $\{x^{(n)}\}$ 的每一個子序列 $\{x^{(n_k)}\}$ 也在 H 上亞一致收斂於 $x^{(\infty)}$ 。（後面舉出的例子就表明了這一點。）

L. Kantorovitch 和 G. Fichtenholz 在他們的一篇論文 [3] 中給出了一個比亞一致收斂強一些但又比通常的一致收斂弱一些的收斂概念，茲以我們用到的方式表述如下：

差不多一致收斂：設 $H \subset (c)$ ，若序列 $\{x^{(n)}\}$ 的每一子序列 $\{x^{(n_k)}\}$ 均在 H 上亞一致收斂於 $x^{(\infty)}$ ，則說 $\{x^{(n)}\}$ 在 H 上差不多一致收斂於 $x^{(\infty)}$ ，或寫為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^{(\infty)} \quad \text{差不多一致成立於 } H.$$

下面的例子表明 G. Sirvint 的定理條件中的充分性是不成立的。

例。令 $H = \{x_n\}$ ，其中

$$x_1 = (1/1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$x_2 = (1/2, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$x_3 = (1/3, 1, 3/3, 1, 1, 1, \dots)$$

$$x_4 = (1/4, 1, 3/4, 1, 1, 1, \dots)$$

$$x_5 = (1/5, 1, 3/5, 1, 5/5, 1, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1/n, 1, 3/n, 1, 5/n, 1, \dots)$$

$$\vdots$$

顯然， H 為 (c) 空間的一個子集，我們將證明它滿足定理所述條件但卻不是弱列緊的。

先證明 H 滿足定理所述的條件：

(1) 由假設易知 $\|x_n\| = 1$ 對一切 n 成立，從而 H 是有界的。

(2) 對給定 $\varepsilon > 0$ ，及 n_0 。我們取 $n_1 = n_0 + 1$ ，則知 $n_1 > n_0$ ，且由題設易知

$$\min_{n_0 < n < n_1} |x_k^{(n)} - 1| = 0 < \varepsilon \quad \text{對一切自然數 } k \text{ 成立。}$$

(其中 $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$) 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^{(\infty)} \quad \text{亚一致成立于 } H.$$

现在再去证明 H 不是弱列紧的。

由假设不难看出

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \text{ 为奇数时,} \\ 1 & \text{当 } i \text{ 为偶数时,} \end{cases}$$

令 $x_0 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ 则上式可改写为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)} = x_0^{(i)} \quad \text{对一切自然数 } i \text{ 成立。} \quad (1)$$

用反证法, 若 H 是弱列紧的, 则应有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_* \in (c)$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_*) \quad \text{对一切 } f \in (c)^* \text{ 成立。} \quad (2)$$

对每 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)}, \dots) \in (c)$ 规定

$$f_i(x) = x^{(i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

易知 $f_i \in (c)^*$ 对一切 i 成立, 从而 (2) 式包含了

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(i)} = x_0^{(i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots.$$

从而 $x_* = x_0$, 故有 $x_0 \in (c)$. 而序列 $x_0 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ 不收敛从而 $\overline{(c)}$

(c) 是显然的, 从而导出了矛盾. 即 H 应该不是弱列紧的。

在给出我们的定理之前, 兹叙述用到的三个命题如下:

[命题 1]: [4, 136—137 页]

给定 $\{x_n\} \subset (c)$, 及 $x \in (c)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ 对一切 $f \in (c)^*$ 成立的充分必要条件为:

(1) $\{x_n\}$ 为有界的,

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = x^{(i)}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(\infty)} = x^{(\infty)}$.

[命题 2]: (一致有界原理) [4, 80 页]

设 E 为线性有模空间, 给定 $\{x_n\} \subset E$, 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| < \infty \quad \text{对一切 } f \in E^* \text{ 成立}$$

則 $\{x_n\}$ 为有界的,

[命题3]: (G. Sirvint) [1, § 1, 1.2]

給定 $H \subset (c)$ 。

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = 0 \quad \text{差不多一致成立于 } H \text{ 之充分必要条件为: 对每序列}$$

$\{x_n\} \subset H$ 均有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{(i)}|}{n} = 0$$

此外, 我們还証明两个引理:

引理 1: 設 $H = \{x_n\} \subset (c)$, 并且

$$(1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x^{(\infty)} \quad \text{亚一致成立于 } H,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = x_0^{(i)} \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(\infty)} = a$$

則 $\{x_0^{(i)}\}$ 能含有一收敛于 a 的子序列,

[証明]: 由条件 (1), 按定义不难肯定存在自然数的序列

$$i_1 < i_2 < \dots < i_j < \dots$$

使

$$i_j < \min_{i < i_{j+1}} |x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)}| < 1/j, \quad n, j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

我們断言, 必有自然数的序列

$$i_1 < i_2 < \dots < i_j < \dots$$

及

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

使对每一个标号 j 均有

$$\left| x_{n_k}^{(i_j)} - x_{n_k}^{(\infty)} \right| < 1/j \quad \text{当 } k \geq j \text{ 时成立} \quad (4)$$

如果这断言正确, 在 (4) 中取极限 ($k \rightarrow \infty$) 由条件 (2) 便有

$$\left| x_0^{(i_j)} - a \right| \leq 1/j \quad \text{对一切自然数 } j \text{ 成立}$$

$$\text{从而有 } \lim_{j \rightarrow \infty} x_0^{(i_j)} = a$$

这便是引理所要求证明的。

现在来证明 (4),

事实上, 令

$$N(i, j) = \left\{ n : \left| x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)} \right| < 1/j \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则由 (3) 可知对每一个自然数 j 下列集合

$$N(i_j, j), N(i_j + 1, j), \dots, N(i_{j+1}^{-1}, j),$$

中必有一个是无穷集, (若不然, 我们便能取出不属于所有上述集合的自然数 n_0 , 这将使

$$\left| x_{n_0}^{(i)} - x_{n_0}^{(\infty)} \right| \geq 1/j \quad \text{对 } i = i_j, i_j + 1, \dots, i_{j+1}^{-1}, \text{ 成立}$$

从而

$$\min_{i_j \leq i < i_{j+1}} \left| x_{n_0}^{(i)} - x_{n_0}^{(\infty)} \right| \geq 1/j$$

而矛盾于 (3),) 即对于每一个自然数 j , 均有一个 i_j^* , 使 $i_j \leq i_j^* < i_{j+1}$

及相应的 $\{n_k^*\}$ 使

$$\left| x_{n_k^*}^{(i_j^*)} - x_{n_k^*}^{(\infty)} \right| < 1/j \quad \text{对一切自然数 } k \text{ 成立, 为了得到 (4) 我}$$

们只需要把上述过程按对角线方法去处理。(参考拿汤松著的实变函数论中译本 272—273 页) 便还能对每个 j 选出这样的 i_j , 使 $i_j \leq i_j^* < i_{j+1}$ 及有着共同的 $\{n_k\}$ 使

$$\left| x_{n_k}^{(i_j)} - x_{n_k}^{(\infty)} \right| < 1/j \quad \text{对 } j = 1, 2, \dots \text{ 及 } k \geq j \text{ 时均成立, 这}$$

就是 (4)

引理証毕,

引理2: 設 $H = \{x_n\} \subset (c)$, 并且

$$(1) \lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x^{(\infty)} \quad \text{差不多一致成立于 } H,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(i)} = x_0^{(i)} \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(\infty)} = a.$$

則有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_0^{(i)} = a$$

[証明]: 若不然, 則易知有子序列 $\{x_0^{(i_j)}\}$ 使

$$|x_0^{(i_j)} - a| \geq \varepsilon. \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

而由条件(1)知道

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(i_j)} = x^{(\infty)} \quad \text{亚一致成立于 } H$$

从而由引理1知道 $\{x_0^{(i_j)}\}$ 含有一收敛于 a 的子序列, 这与(5)发生了矛盾。故

推知

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_0^{(i)} = a$$

引理証毕

定理: (c) 的子集 H 弱列紧充分必要条件为

(1) H 为有界的,

$$(2) \lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x^{(\infty)} \quad \text{差不多一致成立于 } H$$

[証明]

充分性 設 $\{x_n\}$ 为 H 中之一个序列, 由条件(1)知有实数 $M > 0$ 使

$$|x_n^{(i)}| < M \quad i, n = 1, 2, \dots$$

从而也有

$$|x_n^{(\infty)}| < M \quad n = 1, 2, \dots$$

用对角线方法便可知 $\{x_n\}$ 有子序列 $\{x_{n_j}\}$ 及数列 $\{x_0^{(i)}\}$ 和某一数 a 使

$$\text{及} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{(i)} &= x_0^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots \\ \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{(\infty)} &= a \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

再加上条件 (2) 和应用引理 2 便知

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_0^{(i)} = a$$

於是 $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(i)}, \dots) \in (c)$, 由 $\{x_{n_j}\}$ 之有界性, (6)

以及其中的 $a = x_0^{(\infty)}$, 应用命题 1 便結論出

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = f(x_0) \quad \text{对一切 } f \in (c)^* \text{ 成立}$$

由 $\{x_n\}$ 之任意性, 按定义知 H 是弱列紧的.

必要性:

条件 (1) 之必要性. 若 H 无界, 便存在 $\{x_n\} \subset H$ 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty \quad (7)$$

而由 H 之弱列紧性知有 $\{x_n\}$ 之子序列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0 \in (c)$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \quad \text{对一切 } f \in (c)^* \text{ 成立}$$

从而更有

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})} < \infty \quad \text{对一切 } f \in (c)^* \text{ 成立}$$

由命题 2 知有 $M > 0$ 使

$$\|x_{n_k}\| \leq M \quad \text{对一切自然数 } k \text{ 成立}$$

这矛盾于 (7), 即 H 应该是有界的.

条件 (2) 之必要性, 注意命题 3 就知道目下只須去証明对任意的 $\{x_n\} \subset H$ 均有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)}|}{n} = 0$$

令

$$y_n^{(i)} = \left| x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)} \right| \quad (8)$$

由H之有界性容易推知 $\{y_n^{(i)}\}$ 也是有界的 (对 i 和 n 取遍自然数集), 运用对角线

方法可知有 $\{n_k\}$ 及 $\{a^{(i)}\}$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}^{(i)} = a^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

考虑相应的序列 $\{x_{n_k}^*\}$ 由H之弱列紧性知它有子序列 $\{x_{n_k}^*\}$ 及 $x_0 \in (c)$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}^*) = f(x_0) \quad \text{对一切 } f \in (c)^* \text{ 成立}$$

从而由命题1便有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{*(i)} = x_0^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

及

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{*(\infty)} = x_0^{(\infty)}$$

由极限性质及(8)知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| x_{n_k}^{(i)} - x_{n_k}^{(\infty)} \right| = \left| x_0^{(i)} - x_0^{(\infty)} \right| \quad i = 1, 2, \dots$$

结合(9)便得知

$$a^{(i)} = \left| x_0^{(i)} - x_0^{(\infty)} \right| \quad i = 1, 2, \dots$$

而由于 $x_0 \in (c)$ 知

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a^{(i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| x_0^{(i)} - x_0^{(\infty)} \right| = 0$$

又由下极限的性质易知

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)} \right| \leq a^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots$$

于是便推出了

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x_n^{(i)} - x_n^{(\infty)} \right| = 0$$

定理全部证毕

最后, 我們还对定理的条件作一些补充討論。

首先来給出两个简单事实:

引理 3: 若 $\{x^{(n)}\}$ 不能在 H 上亚一致收敛於 $x^{(\infty)}$, 則它的任一个子序列 $\{x^{(n_k)}\}$ 也不能在 H 上亚一致收敛於 $x^{(\infty)}$ 。

[証明] 由定义不难直接驗明若 $\{x^{(n)}\}$ 有子序列 $\{x^{(n_k)}\}$ 在 H 上亚一致收敛於 $x^{(\infty)}$ 則 $\{x^{(n)}\}$ 也就在 H 上亚一致收敛於 $x^{(\infty)}$, 从而得本引理。

由引理 3 容易推出:

引理 4: $\{x^{(n)}\}$ 在 H 上差不多一致收敛於 $x^{(\infty)}$ 之充要条件为: $\{x^{(n)}\}$ 的任一个子序列均含有一个於 H 上亚一致收敛於 $x^{(\infty)}$ 的子序列。

上述引理 4 的条件即通常所謂关于亚一致收敛的 $(*)$ 收敛, 从而本文的定理可改述为:

定 理 (c) 的子集 H 弱列紧的充要条件为:

- (1) H 为有界的,
- (2) $\{x^{(n)}\}$ 关于在 H 上亚一致收敛的 $(*)$ 收敛于 $x^{(\infty)}$ 。

参 考 文 献

- [1] G. Sirvint
Weak compactness in Banach spaces
Studia Math. Tom XI (1950) 71—94.
- [2] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев
《汎函数分析概要》
科学出版社 1955年 8 月
- [3] G. Fichtenholz, et L. Kantorovitch
Quelques théorèmes sur les fonctionnelles linéaires
ДАН. СССР TOM III (1934) 310—313.
- [4] S. Banach
Théorie des opérations linéaires
New york 1955.

WEAK COMPACTNESS IN THE SPACE (c)

Huang Yen - ming

ABSTRACT

In his paper [1] G. Sirivint stated the following theorem without poof:

THEOREM: A subset H in (c) is weakly compact if and only if H is bounded and

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x^{(\infty)}$$

quasi-uniformly on H .

In this note, example is constructed to show that the sufficiency of the condition of the theorem does not hold, and another criterion of weak compactness of subsets in (c) is given as follows:

THEOREM: A subset H in (c) is weakly compact if and only if H is bounded and

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = x^{(\infty)}$$

almost-uniformly [3] on H .

An alternate form of the above theorem is

THEOREM A subset H in (c) is weakly compact if and only if H is bounded and $\{x^{(i)}\} (i = 1, 2, \dots)$ $(*)$ -converges (with respect to quasi-uniformly convergence) to $x^{(\infty)}$.