

康脫洛維奇—西奇柯克問題的特殊情形

—分配問題的一個証明

馬麟浚 鄧永录

§ 1 問題的提出

在海河運輸的實際調配問題中，有這樣的問題：運輸總站要把幾艘貨船分別分派到幾個港口去，已知每艘船到每個港口的成本，求一合理的分派方案，使總成本最低。若以 C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 表示第 i 艘船到第 j 個港口的已知成本； x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 表示如下的僅取 0 或 1 的一些待定的數：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如第 } i \text{ 艘船去第 } j \text{ 個港口;} \\ 0, & \text{如第 } i \text{ 艘船不去第 } j \text{ 個港口,} \end{cases}$$

則問題的數學模型是：求一組 x_{ij} ，使目標函數

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad (C_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, n)$$

達到最小值，而 x_{ij} 滿足下列的約束條件：

$$\begin{cases} x_{ij} = x_{ij}^2 & i, j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \end{cases}$$

這問題顯然是康脫洛維奇——西奇柯克問題（運輸問題）的一個特殊情形，稱為分配問題。解決這問題的途徑可以僅就“運價表”考慮，這個方法是弗洛德（Flood）提出來的；本文將此方法形象地介紹，並給以一簡單的証明，結論是：如果 C_{ij} 為有理數，則弗洛德方法必可達到最小解；另外對所處理的問題作了某些推廣。

§ 2 方法及其理論根據

在敘述方法之前，我們先來作些准备工作：

定義 1：對 $\|C_{ij}\|$ ，令

$$d_i = c_{ij} - \min_{1 \leq j \leq n} \{c_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

稱為對矩陣 $\|C_{ij}\|$ 作行移量；由此得一新矩陣

$$\left\| \begin{array}{cccc} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{array} \right\|,$$

稱為 $\|C_{ij}\|$ 的行移量矩陣。類似地，令

$$\lambda_{ij} = c_{ij} - \min_{1 \leq i \leq n} \{c_{ij}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

称为矩阵 $\|C_{ij}\|$ 的列移量; 由此得一新矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $\|C_{ij}\|$ 的列移量矩阵。

定义 2: 对矩阵 $\|C_{ij}\|$, 选出 Y 行与 S 列, 使得全部包含 $\|C_{ij}\|$ 的零元素, 这种选法称为制造綫复盖, $Y+S$ 称为这个綫复盖的維数。如某綫复盖的維数是所有綫复盖的維数的最小者, 则称这綫复盖为最小綫复盖。

定义 3: 設已知 $\|C_{ij}\|$ 的最小綫复盖, 把沒被复盖的元素减去其最小者, 另外将这最小元素加上在复盖綫交点位置上的元素, 这种作法称为割碼; 由此得一新矩阵, 称为割碼矩阵。

定理 1: 在分配问题中, 如对矩阵 $C = \|C_{ij}\|$, 构造一新矩阵 $D = \|d_{ij}\|$, 其中

$$d_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j \quad (u_i, v_j \text{ 为任意常数}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则分别以 C 与 D 組成目标函数 S_C 与 S_D 的分配问题的最小解是恒等的。

証明: 由于

$$\begin{aligned} S_D &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_i + v_j) x_{ij} \\ &= S_C - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j x_{ij} \\ &= S_C - \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{j=1}^n v_j, \end{aligned}$$

故可见使 S_D 达到最小的解, 也使 S_C 达到最小; 反之亦然。証毕。

定理 2: 設矩阵 $\|C_{ij}\|$ 共有 r 个零元素, 最小綫复盖的維数是 m , 則可以找到恰好 m 个零元素, 使得其中沒有两个是同一行或列。

証明: 显然 $r \geq m$

如 $r = m$, 則这 r 个零元素不会有二个同一行或一列, 否則, 如有二个零元素同在第 i 行(列), 則剩下來的 $r - 2$ 个零元素的綫复盖維数最多为 $r - 2$; 由于 $r = m$, 因此得这 r 个零元素的綫复盖維数为 $m - 1$, 此与 m 的最小性矛盾。

如 $r > m$, 我們仍用反証法, 設定理結論不成立, 則出現下列二情形之一:

(1) 只能选得 k 个, $k > m$;

(2) 可以选得 k 个, $k < m$ 。

考虑 (1), 因只能选得 k 个, $k < m$, 則除了这 k 个以外, 其余的 $m - k$ 个零元素均必与这 k 个中的某一个同行或列, 这样, 有一綫复盖的維数是 $k < m$, 此与 m 的最小性矛盾。

考虑 (2), 既然有 k 个零元素, 它們中沒有两个同一行或列, 則要包含这 k 个零

元素, 至少要 k 行或列, 这与 m 个可包含矛盾。

定理 2: 假如对分配问题的目标函数的系数 C_{ij} 所组成的矩阵 $\|C_{ij}\|$ 进行行移量, 然后, 对所得矩阵进行列移量, 最后对所得列移量矩阵进行若干步削减得最小线复盖数为 n , 则令不同时有两个同一行或一列的零元素位置的 x_{ij} 为 1, 其余的 x_{ij} 为 0, 即得原分配问题的一组最小解。

证明: 由定理 1, 原问题与最后所得矩阵相应的分配问题的最小解恒等。但最后的命题的最小解显然是所给的, 故得证。

现在介绍解问题的办法如下:

第一步: 先对 $\|C_{ij}\|$ 作行移量, 得行移量矩阵

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{bmatrix},$$

次对 D 作线复盖, 如最小线复盖的维数等于 n , 则由定理 2, 可以选出 n 个零元素, 使得没有两个在同一行或列; 令对应于这些零元素位置的 x_{ij} 为 1, 其余的 x_{ij} 为 0, 则由定理 2 得一组最小解, 如最小线复盖的维数小于 n , 则进行下一步工作。

第二步: 先对 $D = \|d_{ij}\|$ 作列移量, 得列移量矩阵

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix},$$

其次对 L 作第一步的后半部工作, 如得到了最小解, 则停止, 否则进行下一步工作。

第三步: 先对 $L = \|l_{ij}\|$ 作削减, 得削减矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mn} \end{bmatrix},$$

次对 Q 作第一步的后半部工作, 如得到了最小解, 则停止, 否则进行下一步工作。

第四步: 对 Q 作第三步的工作。

这样一直下去, 每次对新得削减矩阵重复第三步工作, 直到最小线复盖维数等于 n , 得到最小解为止。

§ 3 实现问题

在上一节里, 我們已经看到, 弗洛德方法能否达到问题的最小解, 关键在于经过一系列的的工作后, 能否使最小线复盖维数达到 n 。现在讨论此问题。

首先注意, 如最小线复盖的维数为 m , 则不妨设相应的不出现两个以上同一行或同一列之零元素 (以后简称为相应的零) 排在矩阵的左上角。这样, 我們有

引理 1: 在弗洛德方法进行过程中, 与最小线复盖相应的零不会在最小线复盖的交叉点上。

证明: 设最小线复盖的维数为 k_0 , 则相应有对角线上

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{k_0 k_0} = 0,$$

反证法。若有 $1 \leq l \leq k_0$ 使 a_{ll} 在最小线复盖的交叉点上, 则易知此时最小线复盖的维数为 $k_0 + 1$ 而非 k_0 , 从而得出矛盾。证毕。

引理2：在弗洛德方法進行過程中，最小綫復蓋的維數單調非減。

證明：由引理1及注意弗洛德方法只可能在割砌時對位於最小綫復蓋的交差點上的零的個數有所減少即得證。

定理4：若分配問題的目標函數的係數所組成的矩陣 $\|C_{ij}\|$ 的元素均為整數，則弗洛德方法必能達到最小解。

證明：設經過移量後矩陣 $\|a_{ij}\|$ 。它的最小綫復蓋維數為 k_0 ($0 \leq k_0 \leq n$)，當 $k_0 = n$ 時，定理成立；當 $k_0 < n$ 時，不妨設相應的 k_0 個零在矩陣 $\|a_{ij}\|$ 的左上方的對角線上；對此矩陣進行割砌一次，則必出現下二情形之一：

1° 最小綫復蓋維數增至大於 k_0 ；

2° 最小綫復蓋維數仍為 k_0 ，

對於情形2°，注意到每次割砌，不與那 k_0 個零同行或列的（即位於矩陣右下方的）元素均至少減去1，因而在有限步割砌後，矩陣的右下方必出現零，此時最小綫復蓋維數增至大於 k_0 。

於是不論情形1°與2°，每經有限步工作，最小綫復蓋的維數必有所增加；但 n 是一有限數，故經有限步工作，必能使最小綫復蓋的維數達到 n 。証畢。

引理3：設 a 為大於零的實數， C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 為非負實數，則分別以 $\|C_{ij}\|$ ， $\|aC_{ij}\|$ 為目標函數所相應係數矩陣的分配問題等價。

證明：因為對應的目標函數分別為

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \text{ 及 } S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n aC_{ij} x_{ij} = a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} = aS_1.$$

故使 S_1 取最小值的解，也必然使 S_2 取最小值；反之亦然。

定理5：若分配問題的目標函數的係數所組成的矩陣 $\|C_{ij}\|$ 的元素均為有理數，則弗洛德方法必能達到最小解。

證明：設 C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 的公分母為 a ，也由引理3知 $\|C_{ij}\|$ 與 $\|aC_{ij}\|$ 所對應的分配問題等價，而 $\|aC_{ij}\|$ 之元素均為整數，故由定理4知本定理成立。

雖然在證明弗洛德方法可達最小解的過程中，我們要求全體 C_{ij} 為有理數，這從數學觀點來說，是有缺陷的，不過這種限制對實際問題來說，並不是苛求，因為在實踐中提出來的問題， C_{ij} 多是（甚至可說必然是）有理數；另外屬於實數的情形，我們也證明了可用有理數的問題作任意精確的逼近。

§4 應用上的推廣

上述方法及證明，只是對 n 個港口及 n 艘船討論，即僅就方陣的情形進行討論，但事實上，同一方法可用到當有 m 個港口及 n 艘船的情形，即一般矩陣的情形。例如1°當

$m > n$ 時，可對長方陣 $\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$ 的一切 n 階子方陣，進行移量、割砌求得最小解。2°

$m < n$ 時，并假設港口容量=船的數量，此時如第 i 個港口對應之容量為 k_i ($k_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m$)，則可把它看作 k_i 個港口處理之，這又歸回到方陣的情形。