

由平面地形地質圖繪成塊狀立體圖的新方法

李 見 賢

(地 理 系)

引 言

塊狀立體圖法是地形和地質構造的綜合，它可以使人對於地形的成因有一個明晰的概念^[6]。利用這方法所繪成的塊狀立體圖，有接近模型的立體感覺，所以在地形和地質方面仍不少採用；而且可以用來繪製成相當準確和可以量度的塊狀立體圖，因此，在採礦地質方面特別有用；對於科普工作亦有幫助。

一、過去繪製塊狀立體圖的方法

綜合過去由平面地形圖繪成塊狀立體圖的主要方法有下列三種：

1. 高度標桿法：^{[1] [8] [1]}用這種方法能在較短的時間內繪成塊狀立體圖，並且可適用於大圖。但因繪製時在圖塊上的高度標桿太少，因此繪製地形暈滲線的依據不足，所以繪製時有許多主觀成份，因而用此法所繪成的立體圖形不準確(圖1,2,3)。

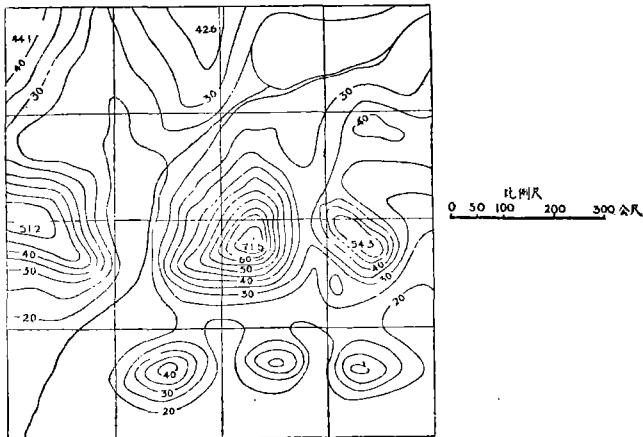


圖 1.

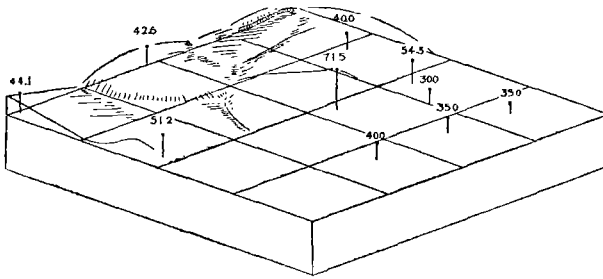


圖 2.

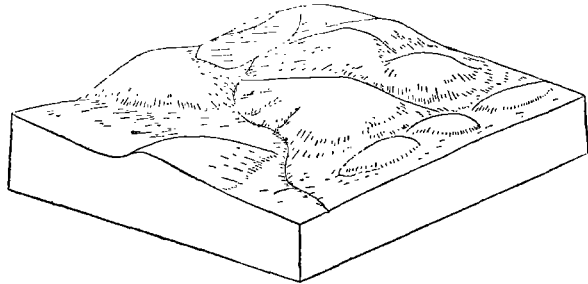


圖 3.

2. 剖面法：^[2] 這種方法若作很多的剖面，則其所繪製的立體地形圖較為準確；但繪製很多剖面則十分麻煩和費時(尤其是地形比較複雜的圖)。若剖面繪得少，則在繪地形量滲線時的依據不足，繪製的主觀成份也不少，以致所繪製的立體地形圖不準確。而且在圖塊上的線格很多，容易和圖內其他線條淆混。所以這種方法很少人採用(圖 4. 5. 6.)。

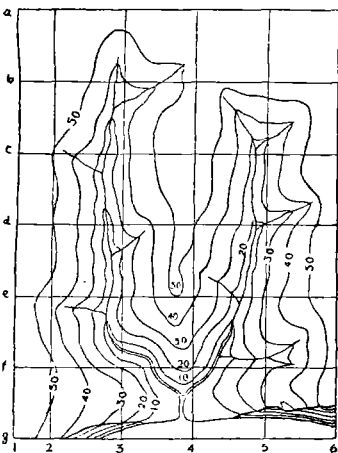


圖 4. ⊖

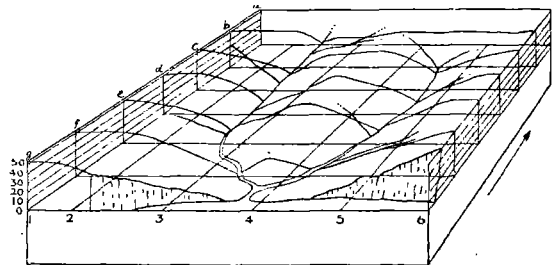


圖 5.

⊖ 圖 4. 5. 6. 採自 Barrington Brown and Debenham: Structure and Surface 第148頁。

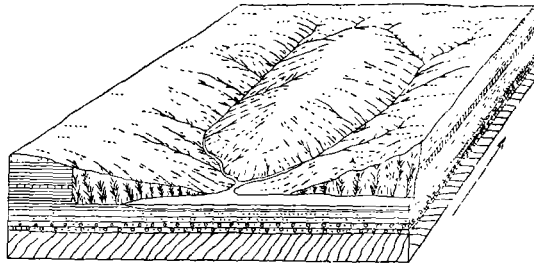


圖 6.

3. 等高線法：此法將平面的地形等高線圖先繪成投影的等高線圖，再轉繪成立體等高線圖，然後修飾成爲塊狀立體圖（圖 7. 8. 9. 10.）。此法在繪製地形量滄線時有足夠的依據，因此繪成的塊狀立體圖比較上述的兩種方法準確，並且能夠知道立體地形圖上各地的高度，繪製剖面也很容易。但是在繪製投影等高線時却十分費時，所以須用杜福爾圖法 (Dufour's Diagrams) 來繪製。

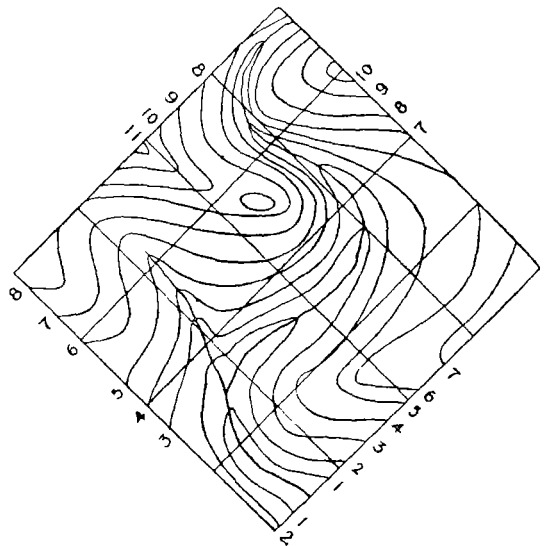


圖 7. ⊖

此法用一長尺作工具（圖 11），能將平面的等高線圖繪成投影的等高線圖。但是杜氏直尺在繪製原圖與直槽垂直的直線時，却繪成一段橢圓弧，因此它所繪製的圖皆不同程度的歪曲（12），所以它應用的範圍不大。

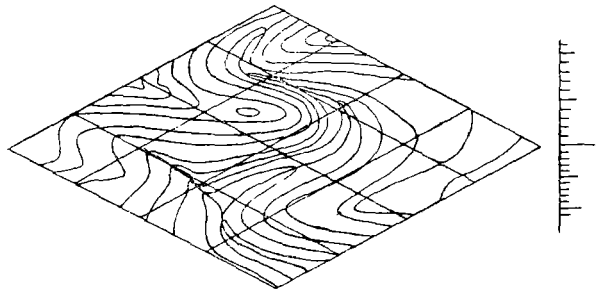


圖 8.

⊖ 圖 7. 8. 9. 10. 採自丁驥, 陳正祥: 透視圖繪法 Block Diagrams 第31-32頁。

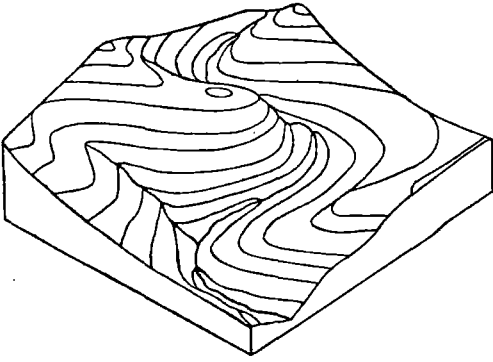


圖 9.

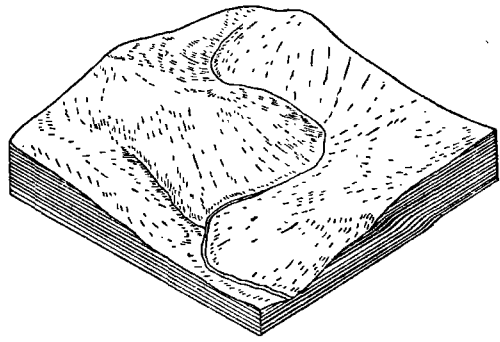


圖 10.

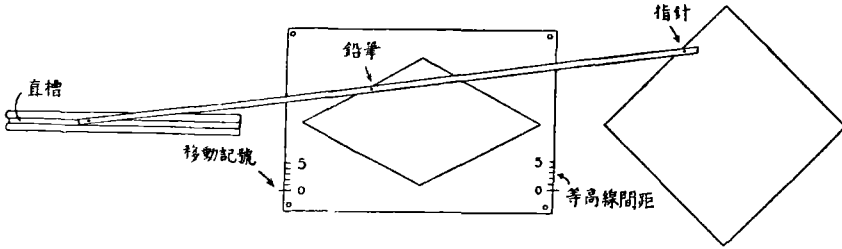


圖 11. ⊖ 杜福爾直尺

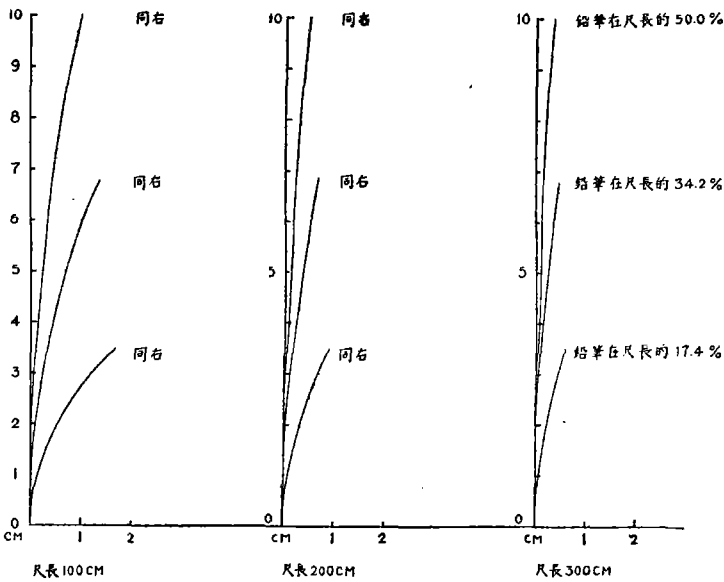


圖 12. 原圖寬度為 20 CM 時用杜福爾直尺繪製投影圖的圖寬及歪曲曲綫

⊖ 圖11採自 Erwin Raisz; General Cartography 第 298頁。

若以 0.2 mm 以內的偏差不作計算的話，則其應用的範圍約如下表：

杜福爾直尺的應用範圍表

| 鉛筆在尺上的位置 最大圖的寬度 cm | 17.36% | 34.20% | 50.00% |
|-----------------------|--------|--------|--------|
| 尺長 cm | | | |
| 100 | 4 | 5 | 6 |
| 200 | 6 | 7 | 8 |
| 300 | 7 | 8 | 10 |

同時杜氏直尺太長，一個人使用時首尾不能相顧，很不方便。

此外杜福爾氏及威爾遜^[6] (W, H, Wilson) 氏等另創製有幾種繪製塊狀立體圖的器械(圖 13, 14, 15, 16)：

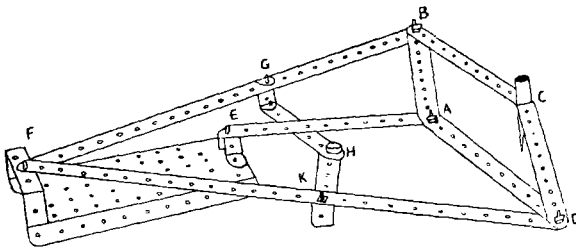


圖 13. 杜福爾等度畫法繪圖儀

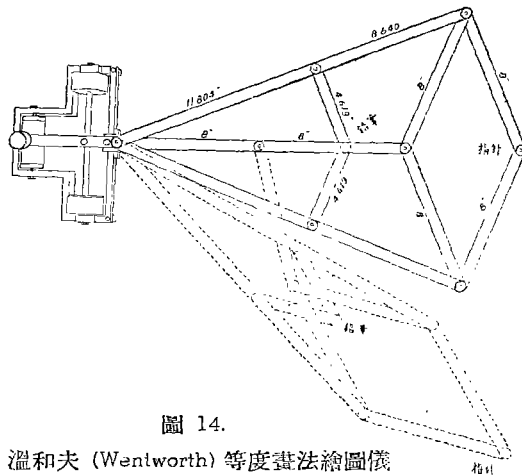


圖 14. 溫和夫 (Wentworth) 等度畫法繪圖儀

⊖ 圖 13—16 採自 Johnston W. D. Jr, and Nolan, T. B.: Isometric Block Diagrams in Mining Geology, Econ., Vol. 32, PP, 561--566, 1937.

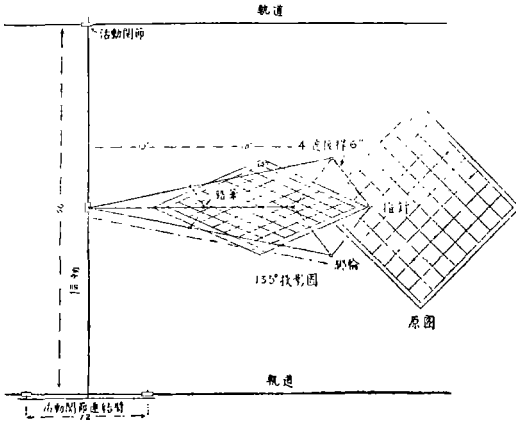


圖 15. 威爾遜 (W.H.Wilson) 等度畫法繪圖儀

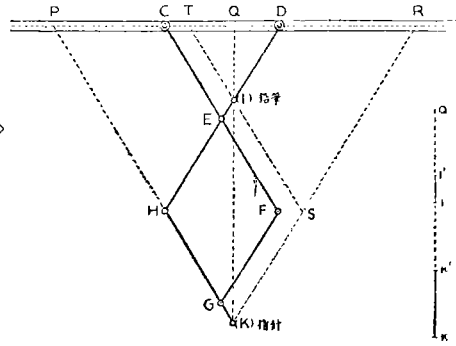


圖 16. 溫德胡 (Van Der Hoop) 繪圖儀

可以避免杜氏直尺的歪曲。但除溫德胡法 (Van Der Hoop Device) 以外，其他三種儀器的原理和構造基本相同，而儀器的構造亦較為複雜，在應用方面尚不普遍。作者年來對這問題曾加以留意，經過初步的研究，提出一種新的繪製方法，茲分別敘述如下：

二、平行投影繪製塊狀立體圖的方法

現設：

1. 投影面與水平面垂直，投影綫互相平行，過投影綫的沿直面與投影面所成之夾角等於 $\frac{\pi}{2}$ ，投影綫與水平面交一定角 θ (仰角，設小於 $\frac{\pi}{4}$ ，以下簡稱投影角) 這種投影稱爲斜角投影 (圖 17)。

2. 平行的投影綫都與投影面成正交，投影綫與水平面交一定角 θ (仰角)，這種投影稱爲正角投影。

則原圖經投影後的結果如下：

(1) 在原圖上與投影面平行的直線經投影後仍保持原有長度，如圖

$$a = a' = a''$$

(2) 過投影綫的沿直面與原圖水平面相交的直線，經投影後則被縮短了。如圖：

$$(2) b' = b \tan \theta_{\alpha} \text{ (斜角投影)}$$

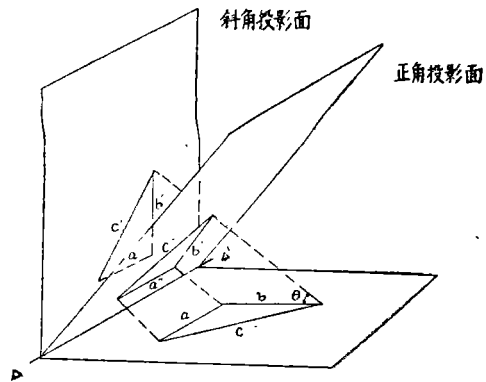


圖 17.

(B) $b'' = b \sin \theta$ (正角投影)

(3) 至於其他直線例如 C , 其正角或斜角投影均小於 C 。(可證明 $C > C' > C''$) 如果是平曲線則可作為平面上折線的極限來看。所以經投影後, 沿平行於投影面的直線保持原有長度, 沿過投影線的沿直面與原圖水平面交成的直線則縮短了, 結果是整個圖形縮扁了。

(4) 斜角投影因投影面與水平面成垂直, 所以原圖等高線的垂直間距 (h) 與它的投影 (h') 相同(如圖18), 即

$$h = h'$$

正角投影因投影線都與投影面成正交, 而投影線又與水平面成仰角 θ , 經投影的結果, 等高線的垂直間距被縮短了(如圖18)。其關係為:

$$h'' = h \cos \theta$$

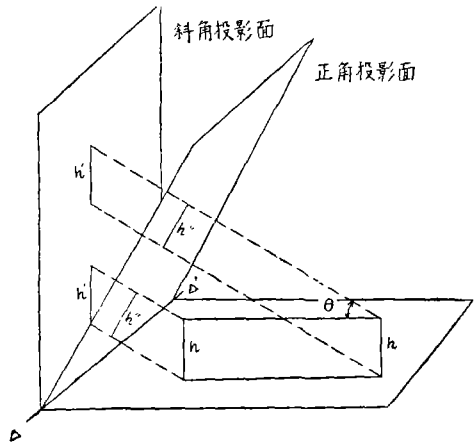


圖 18.

因此, 利用這兩種投影方法來繪製塊狀立體圖時, 必須先將原圖的等高線沿垂直于 $\Delta\Delta'$ 的方向按關係式 (A) 或 (B) 縮扁。當繪完最高一根縮扁的(投影的)等高線後, 在斜角投影的情形, 就要將畫紙離開 $\Delta\Delta'$ 向前移動一等高線垂直間距的長度 h , 在正角投影的情形, 則須將畫紙向前移 $h \cos \theta$ 的長度, 然後再繪次高的縮扁等高線。被遮蓋的等高線可以不必繪出。這樣順序將圖中所有的等高線(包括剖面上的等高線)繪完為止, 並連結其邊角上的線端, 便繪成塊狀立體圖。

三、塊狀立體圖儀(第一式) \ominus

根據上面的討論, 我們繪製塊狀立體圖的第一個重要步驟, 必須將原圖的等高線縮扁成為投影的等高線。但地圖上的等高線每一根皆由無限多點組成, 我們不能按照縮扁關係式在畫紙上把它的所有對應點描畫出來。即使將原圖先分為若干方格, 將這些方格轉繪成投影方格, 依照這些方格將原圖的等高線轉繪成為投影等高線, 也是一種很繁雜的事。應用杜福爾直尺來繪製, 也因該直尺繪出來的圖皆有不同程度的歪曲, 而且該尺太長, 應用時很不方便。若應用杜氏及威爾遜氏等人的儀器來繪

\ominus 這是暫定的名稱, 恰當與否, 仍待商討。

製，雖然可以避免歪曲，但儀器的構造較為複雜，應用也還不夠方便。因此，作者初步設計了一種儀器，可以由平面的地形圖繪成塊狀立體等高線圖，我們暫定這種儀器的名稱爲塊狀立體圖儀（第一式）。茲將這種儀器的構造、原理、用法及其優缺點，分述如下：

1. 儀器的構造（圖19）：用兩把長度約 50—75 cm 的直尺及直槽兩個，在直尺上面劃分爲 100 等分。下尺用以裝置鉛筆，其末端裝置一短針放置於低直槽中，並能自由滑動。上尺前端裝一指針，其末端裝置一短針放置於高直槽中，也可以自由滑動。上下尺用一連結關節連結起來。使用時兩直槽須在一直線之上，並把連結關節與鉛筆的位置依所需縮扁原圖的比率裝置妥當，用指針對原圖，在鉛筆下面放畫紙，使指針沿原圖移動，則鉛筆在畫紙上所繪出的圖，即爲所需的投影等高線圖。

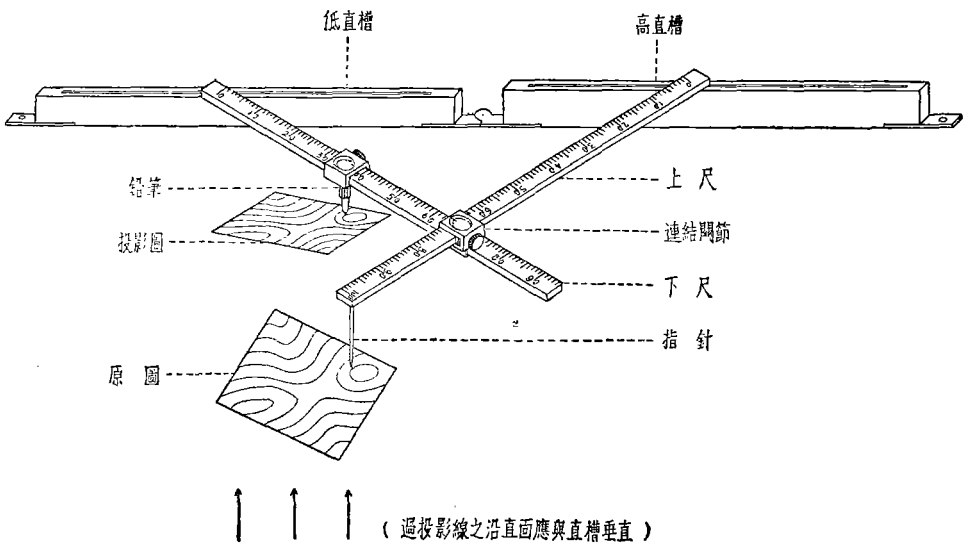


圖 19. 塊狀立體圖儀(第一式)

2. 儀器的原理（圖20）：

(1) 設有一直線 AC 交 y 軸於 B，則 $AC = AB + BC$ ，並令 $AB = a$ ， $BC = b$ ，令 $\angle CAO = \theta$ ，再過 C 作一直線 CP，令交 x 軸於 P，且使 $CP = a + b$ ，則 $\angle CPO = \theta$ ，延長 CP 至 Q，令 $CQ = b$ ，

則當 A 沿 x 軸滑動，B 沿 y 軸滑動時，

Q 在 OB 的延長線上，且 $\frac{OB}{OQ} = \frac{a}{a+2b}$ 。

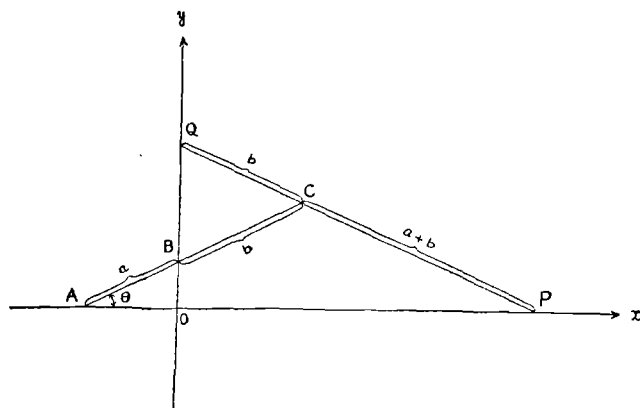


圖 20.

証： 因設計

$$CQ = BC = b,$$

$\therefore \triangle QCB$ 爲等腰三角形,

又 $\angle QCB = 2\theta$, $\therefore \angle CQB = \angle CBQ = 90^\circ - \theta$,

則 $\angle QBC + \angle CBC = 90^\circ - \theta + 90^\circ + \theta = 180^\circ$,

$\therefore Q$ 在 OB 延長線上。

故知 $QO \perp OP$,

故 QOP 爲直角三角形,

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle POQ$,

$$\therefore \frac{OB}{OQ} = \frac{AB}{PQ} = \frac{a}{a+2b}.$$

由上面的證明，可知塊狀立體圖儀（第一式）的直槽等於 x 軸，與直槽垂直的直線爲 y 軸（即 OB 及其延線），上尺爲 PCQ ，下尺等於 ABC ，連結關節爲 C ，指針爲 Q ，鉛筆裝在 B 處，連結關節至指針及鉛筆的距離皆爲 b ，上下尺末端與直槽的交點爲 P 及 A ，其至連結關節的長度皆爲 $a+b$ ，下尺末端至鉛筆的長度爲 a 。這樣的裝置及移動，則可將原圖寬 OQ 縮扁爲投影圖 OB ，而 OB ， CQ 共線，且與直槽垂直。根據上面的證明，在理論上是沒有偏差的，即凡與直槽垂直的線，皆可依比例縮短，而且與直槽保持垂直，即符合於上述兩種投影法中第（2）點所討論的要求。

（2）當 Q 點沿平行於 x 軸的線段移動時，對應 B 點，亦繪一等長的平行於 x

軸的線段。顯然，因為 Q 點沿平行於 x 軸的方向移動時， θ 角度不變，即是立體圖儀不變形，沿平行於 x 軸方向移動，故原圖與直槽平行的直線，經儀器繪在畫紙上，其長度仍與原圖的長度相等，即與上述兩種投影法中第(1)點所討論的投影法相符。

(3) 原圖上與直槽斜交的直線和平曲線，經儀器繪出後，當然亦與上述投影法中第(3)點相符合。因為和以前一樣，與直槽斜交的直線和平曲線，都可以看作與直槽平行和垂直的綫段所連成的折綫的極限。

(4) 由儀器繪完最高的一根等高綫後，在斜角投影情形就要將畫紙向直槽平移一等高綫垂直間距 (h) 的長度，在正角投影的情形，則須將畫紙向直槽平移 $h \cos \theta$ 的長度，然後再繪次高的等高綫，即符合於上述投影法的第(4)點。

(5) 實際繪出來的圖，也証實以上所討論的是正確的。

由上面的討論，可知用塊狀立體圖儀(第一式)繪出來的投影圖，完全與第二節中各點所討論的投影法相符，故這樣繪出來的投影圖，在理論上是沒有偏差的。

3. 儀器的用法：根據上面的証明，已知原圖寬度 OQ 與投影圖寬度 OB 之比為 $\frac{a}{a+2b}$ ，我們可依照這樣的關係，來裝置及使用這個儀器：

例一：設尺長為 100 等分，現因投影的結果，須縮扁為原圖的 30%，則可簡化上式成 $100 = a + 2b$ 來裝置儀器：

$$a = 30.$$

$$b = \frac{100 - 30}{2} = 35,$$

$$a + b = 65.$$

即鉛筆裝在下尺 30 等分處，連結關節裝在兩尺的 65 等分處，即可繪出縮扁為 30% 的投影圖。

例二：投影綫與地平面所成的仰角(投影角)為 20° ，應用斜角投影，則縮扁為原圖的 36.4%。

即 $a = 36.4$ (鉛筆位置)

$$b = \frac{100 - 36.4}{2} = 31.8$$

$$a + b = 36.4 + 31.8 = 68.2 \text{ (連結關節位置)}$$

若用正角投影：

則 $a = 34.2$ (鉛筆位置)

$$b = \frac{100 - 34.2}{2}$$

$$a + b = 67.1 \text{ (連結關節位置)}$$

如此類推，則能裝置及繪出上述兩種投影方法的各種塊狀立體等高線圖。在繪圖時我們必須先了解一個問題，即投影線的沿直面與水平面的交線是永遠與直槽垂直的。所以繪圖時視需要表現那一邊的剖面及地形，用原圖來遷就投影線，把原圖的位置放好，再行繪圖，這樣因原圖放置的位置不同，便可繪製出不同的塊狀立體圖（圖21—25）。

以下的地形圖及塊狀立體等高線圖，各圖投影線的投影角(仰角)皆為 20°，但如果原圖紙安放方位不同，則所繪成的塊狀立體等高線圖亦不相同。例如圖21的安放方位每次轉一直角，則得不同的塊狀立體等高線圖如圖 22, 圖 23, 圖 24 及圖 25 共四種結果(斜角投影)。

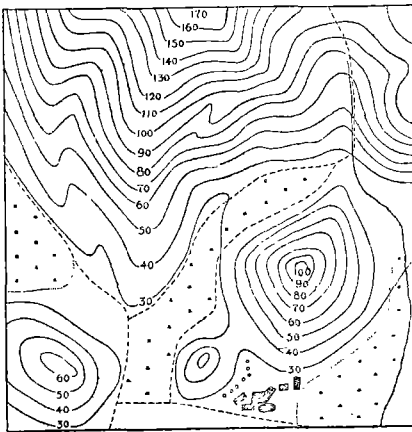


圖 21. 等高綫圖

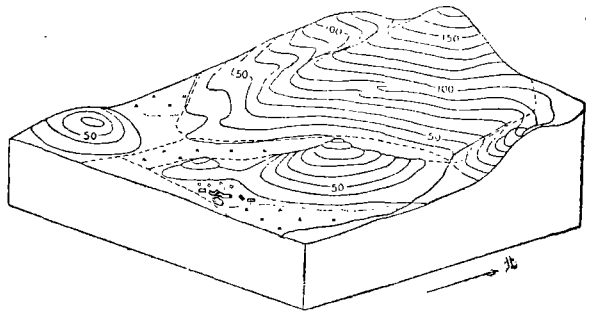


圖 22.

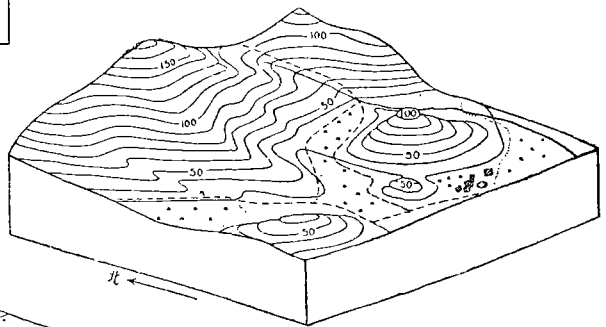


圖 23.

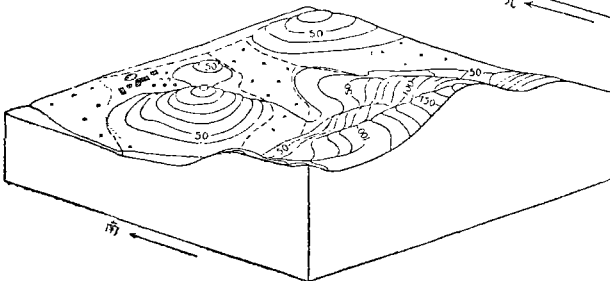


圖 24.

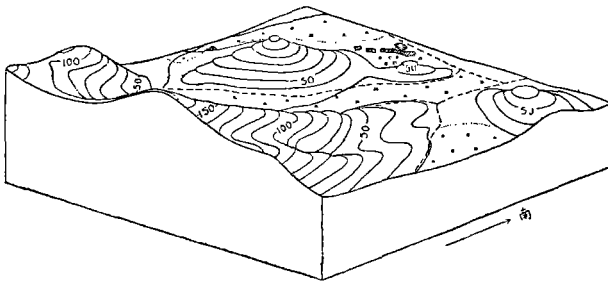


圖 25.

根據經驗當投影線與水平面所成的仰角(投影角)為 $10^{\circ}-35^{\circ}$ 以內, 這儀器皆方便使用, 尤其是投影角在 $20^{\circ}-30^{\circ}$ 附近時, 繪成的塊狀立體圖最為自然, 儀器的使用亦很方便。若超出這個限度(仰角 $10^{\circ}-35^{\circ}$) 愈多, 則繪出的圖形太大, 或壓縮太多, 很不自然, 甚至不合情理, 並且這時也因鉛筆距連結關節及指針或直槽太近, 使用儀器亦感不便。

以下各圖是表示原圖置放的位置相同, 而投影角不同時的塊狀立體等高綫圖(斜角投影)。

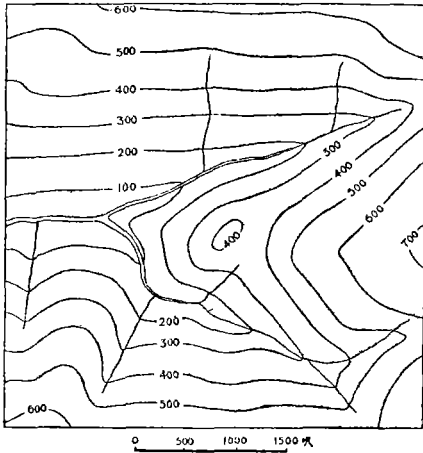


圖 26. 等高綫圖

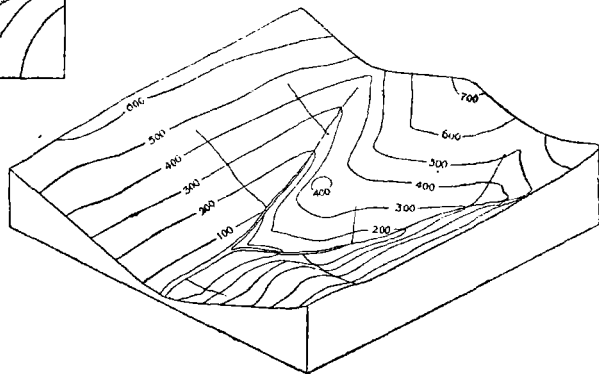


圖 27. 投影角 30° 時的塊狀立體等高綫圖

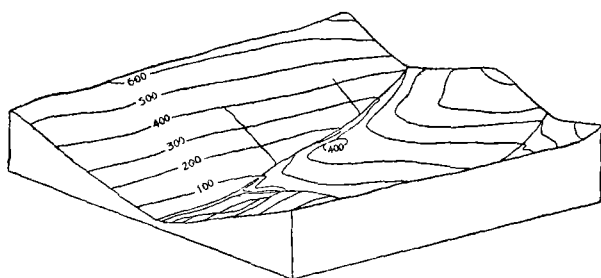


圖 28. 投影角 20° 時的塊狀立體等高綫圖

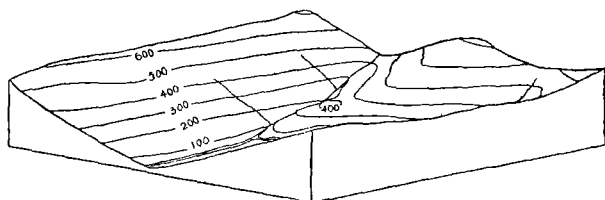


圖 29. 投影角 10° 時的塊狀立體等高綫圖

4. 儀器的優缺點：由上面的討論我們可知塊狀立體圖儀(第一式)有如下的優點：

- (1) 它繪出來的塊狀立體等高綫圖，完全與上面所討論的投影法相符，在理論上沒有偏差。
- (2) 繪製簡便，能在較短的時間內，把塊狀立體等高綫圖繪出。
- (3) 能更準確地繪製塊狀立體地質圖。
- (4) 儀器構造簡單，使用方便，一個人使用沒有困難。
- (5) 可適用於較大的圖。
- (6) 可以繪畫橢圓。

所以塊狀立體圖儀(第一式)繪製的塊狀立體圖比前述的各種方法皆較簡便而準確。

它的缺點就是不能繪製透視投影的塊狀立體圖。為了解決這個問題，作者初步再設計了塊狀立體圖儀(第二式)，將另文討論。

四、塊狀立體地質圖的繪製方法

在一幅有等高綫的地形地質圖上，岩層接觸綫必與地形等高綫及剖面上的等高綫發生交點(或平行、重合)，我們可依這些交點(或平行、重合的關係)，按繪製立體等高綫的辦法，把它的位置在立體等高綫圖上繪製出來。繪製時，我們可順序將等高綫與岩層接觸綫的交點繪在立體等高綫上，如圖 30：我們以 180 公尺的等高綫與

岩層接觸綫的交點爲例，以指針對準交點，同時儀器上的鉛筆就在畫紙上繪出一點（圖 30、31、32），當立體等高綫和等高綫與岩層接觸綫的交點繪完後，將那些在立體等高綫上的交點順序連結起來，則成爲塊狀立體地質圖上的岩層接觸綫（圖33、34）。

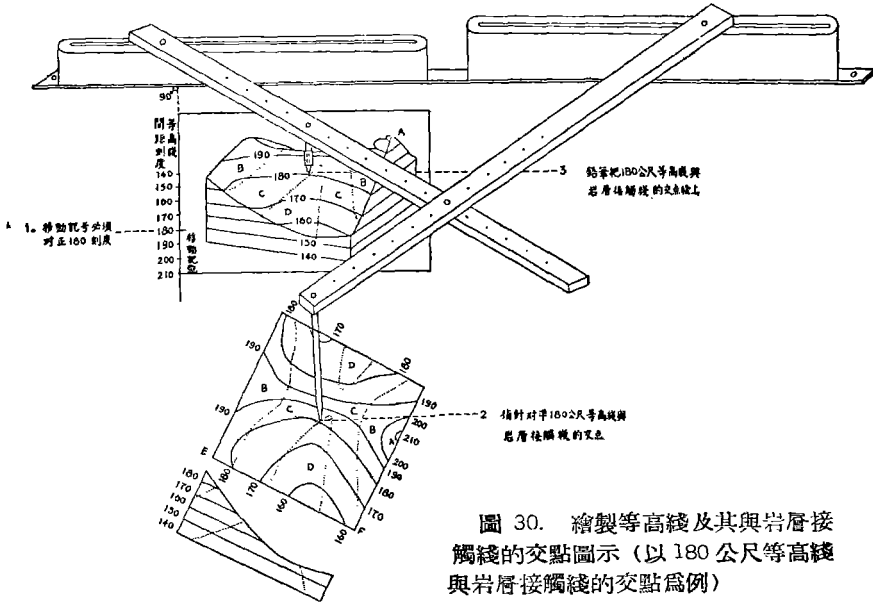


圖 30. 繪製等高綫及其與岩層接觸綫的交點圖示（以 180 公尺等高綫與岩層接觸綫的交點爲例）

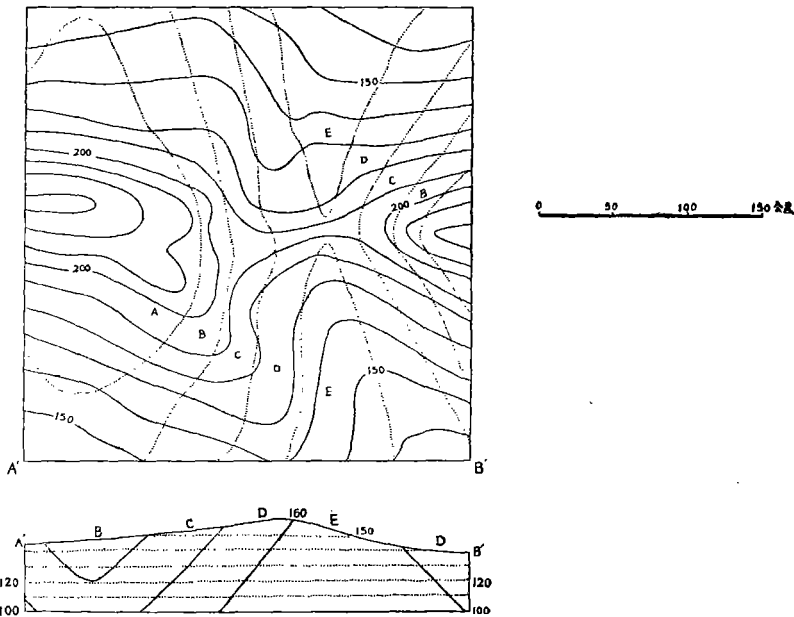


圖 31. 地形地質圖及 A'-B' 的剖面圖

在繪製塊狀立體地質圖的地質剖面時，我們必須依原地形地質圖，先作出它的

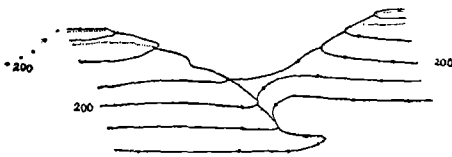


圖 32. 投影綫由原圖西南投射
其投影角為 20° 繪製法一

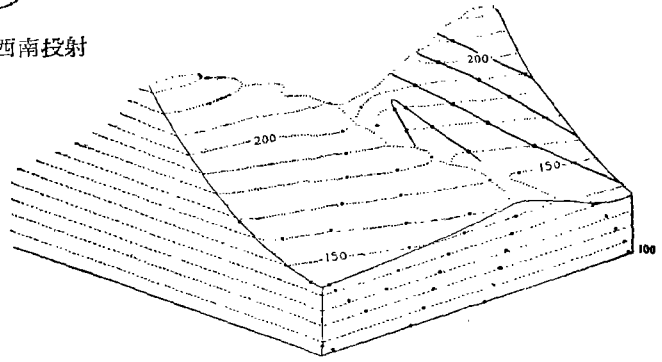


圖 33. 繪製法二

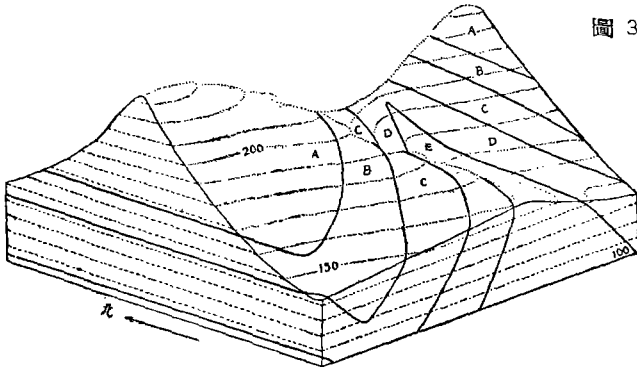


圖 34. 塊狀立體地質圖一

地質剖面(這個剖面要有等高綫)。因剖面上的岩層接觸綫與等高綫發生交點(或平行、重合,圖 30、31),我們可利用儀器將這些交點轉繪到塊狀立體圖的剖面上去。繪製時順序將剖面上的等高綫與圖上原來剖面所在的一邊重合,如圖 35:我們以剖面上 150 公尺的等高綫與岩層接觸綫的交點為例,繪圖時必須將剖面上 150 公尺的等高綫與原圖邊(即原來剖面所在的一邊)EF 重合,然後將畫紙的移動記號對準 150 公尺的間距刻度處,再用指針對準剖面上 150 公尺等高綫與岩層接觸綫的交點,則儀器上的鉛筆可將這交點轉繪到塊狀立體圖的剖面上去。如此類推,每繪剖面上的等高綫與岩層接觸綫的交點時,必須將該等高綫與原圖邊重合,然後將畫紙的移動記號對準該等高綫的間距刻度,依上法將原圖剖面上的岩層接觸綫與等高綫的交點轉繪到塊狀立體圖的剖面上去,順序將它繪完(若岩層不複雜則繪出少數主要的點便可)。然後順序將那些點連結起來,則成爲塊狀立體地質圖剖面上的岩層接觸綫。將這些剖面上及地表上的岩層接觸綫內加上地質符號或顏色表示地層的情況(圖 36)。

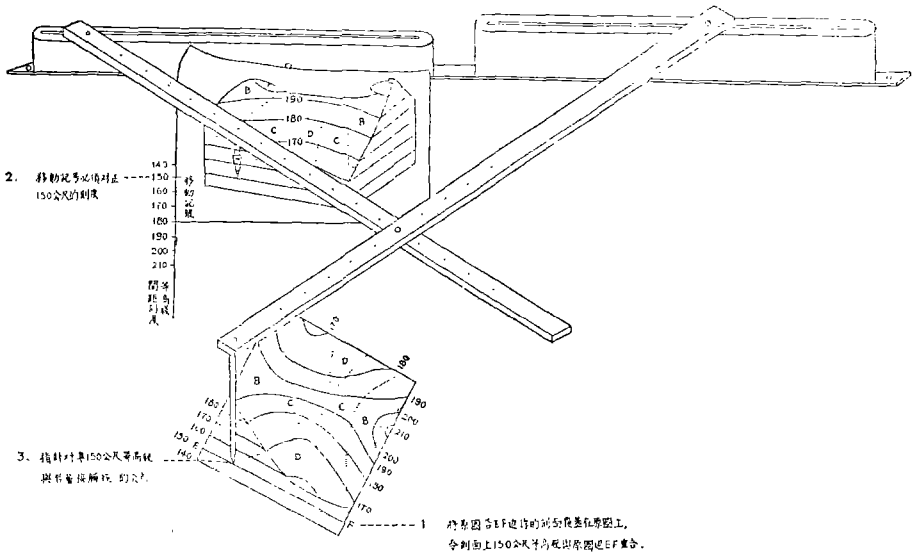


圖 35. 繪製剖面上等高綫及其與岩層接觸綫的交點圖示
 (以剖面上 150 公尺等高綫與岩層接觸綫的交點為例)

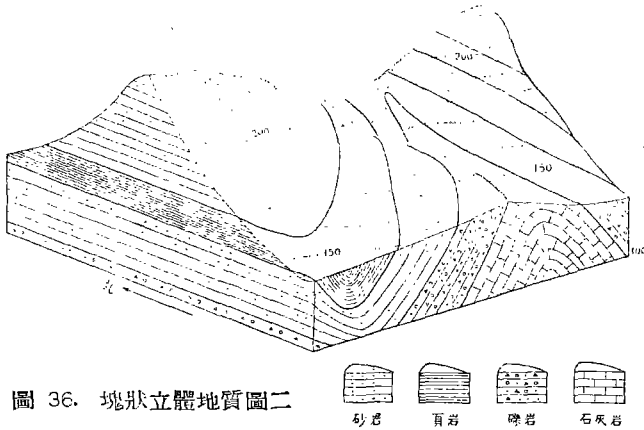


圖 36. 塊狀立體地質圖二

- 砂岩
- 頁岩
- 礫岩
- 石灰岩

五、討論幾種塊狀立體圖的繪製方法

1. 正剖圖 (斜角) 畫法—⊖: 用斜角投影的方法繪製出來的塊狀立體圖, 因等高綫的垂直間距沒有縮短, 所以它可準確地量度剖面上的高度或深度。若原圖有一邊與投影面平行, 則該邊的剖面沒有受任何的壓縮和歪曲; 地質資料可以直接填繪在這個剖面上, 不須用儀器轉繪, 作圖也很簡捷。若這個剖面是橫切岩層走向的話

⊖ 這是暫定的名詞, 恰當與否, 仍須商討。

(即投影面與岩層走向垂直)，則直接可在這個剖面上量度岩層的深度、寬度、厚度和傾角。我們暫稱這種方法為正剖面(斜角)畫法一，它在地質上是很有用的。但是我們繪圖時所用的原圖一般皆是方形的，因此我們想要直接用儀器繪出一個完全沒有壓縮或歪曲的正剖面時，則其他兩個在旁的剖面被壓縮成爲一直線(圖37)，因此看不見側剖面了。爲了補救這個缺點，可用正剖面(斜角)畫法二⊖來繪製塊狀立體圖，這種繪製方法留在後面討論。或者原圖可以採用非正方形的四邊形或多角形，則在它的任何一邊與投影面平行，皆可以將該面投影成爲沒有任何壓縮的剖面。用時亦能繪出其他鄰邊的剖面(這些剖面當然在平面上是被壓縮的)(圖38.39)。

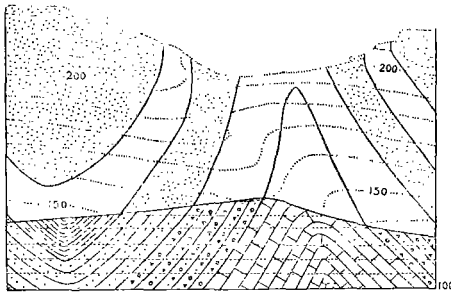


圖 37. ⊖

正剖面(斜角)畫法一塊狀立體地質圖

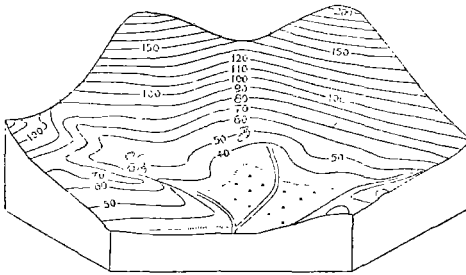


圖 39.

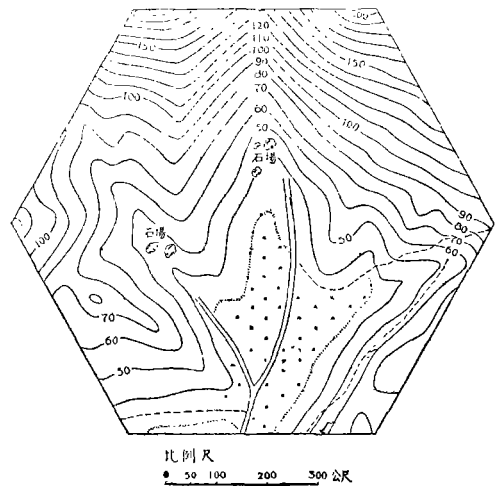


圖 38.

2. 等度(正角)畫法: [7] [8] 利用正角投影繪製出來的塊狀立體等高綫圖,因等高綫的垂直間距都按一定的比例縮短了,在視覺上畧比用斜角投影的方法繪製的塊狀立體圖稍爲自然。但在量度高度或深度時,必須在塊狀立體圖的剖面上有等高綫,否則便不及斜角投影的方便。若原圖是方形的,並有一個角正對着直槽的平行綫

⊖ 這是暫定名詞, 恰當與否, 仍須商討。

⊖ 圖 37 的原圖根據圖 31。

(圖 40),而投影角為 $35^{\circ}16'$ 時(即鉛筆裝在下尺的 57.74 等分處),則投影出來的塊狀立體圖,它的長、闊、高三軸皆壓縮為原圖的 0.82。因它們都按照一定的比例縮短,所以在三軸上的距離是準確的(其他方向的距離則不準確)。若此圖塊上有一個剖面是橫切岩層走向的話,則可在此剖面上直接量度岩層的深度和寬度(厚度和傾角可用岩層的深度和寬度互成直角,用作圖法求得),或用均等分度規(圖 42)^[6]量出其傾角,這種繪製塊狀立體圖的方法,就是等度(正角)畫法,通常用以繪製塊狀立體地質圖(圖 41)。

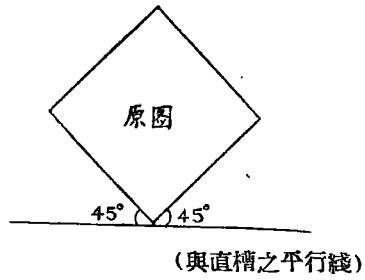


圖 40.

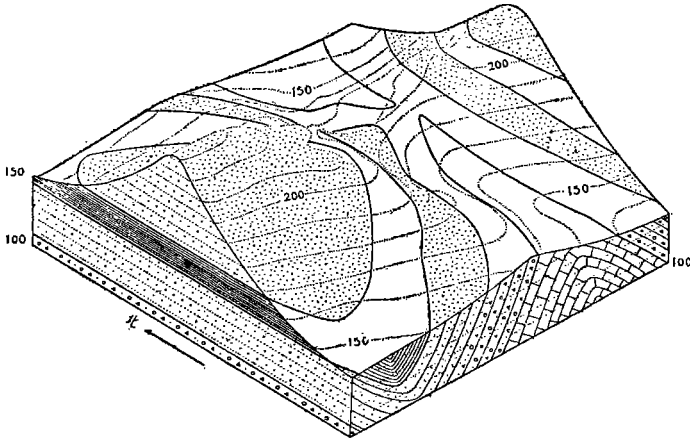


圖 41. ⊖ 等度(正角)畫法塊狀立體地質圖

3. 二度(正角)畫法: 關於繪製二度(正角)投影的塊狀立體圖,根據蘇聯地質學家 B. H. 柏夫林諾夫^[8]教授編著的“表示地質構造用的立體圖解”(北京地質學院 1955)一書中第 27 頁所說:“用機械法來做二度立體圖解時需要裝置專門的儀器,這種儀器的

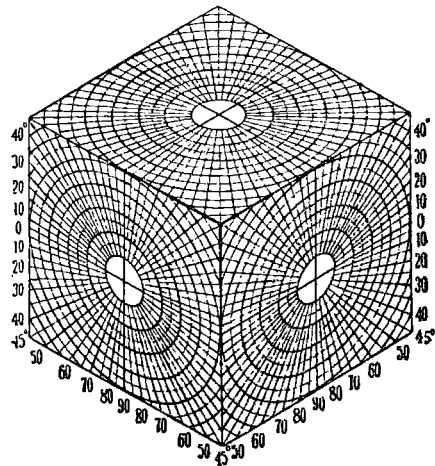


圖 42. ⊖ 均等分度規

- ⊖ 圖 41 的原圖根據圖 31。
- ⊖ 圖 42 採自 Johnston, W. D. Jr. and Nolan, T. B. 的 “Isometric Block Diagrams in Mining Geology, Econ.,” Vol. 32, P. 567, 1937.

設計，比等度投影繪圖儀複雜多了。”作者經過初步的研究，認為不一定使用其他複雜的儀器，就用這個簡單的儀器（塊狀立體圖儀第一式）也可以繪製二度（正角）投影的塊狀立體圖，為說明這個問題，首先要證明兩個幾何命題：

1. 設： $AC = AC'$,

$\angle C'AC = 90^\circ$ ，及 BB' 為通過 A 的直線（圖43），過 C 及 C' 向 BB' 作垂線交 BB' 於 B 及 B' 。則 $rt.\triangle ABC \cong rt.\triangle AB'C'$ 。

求 $\angle BAC = \gamma$ 時可以在 BC 及 $B'C'$ 上分別找出 F 及 E 兩點使 $BC : BF = B'C' : B'E$ 。

且 $AF = \frac{1}{2}AE$ 。

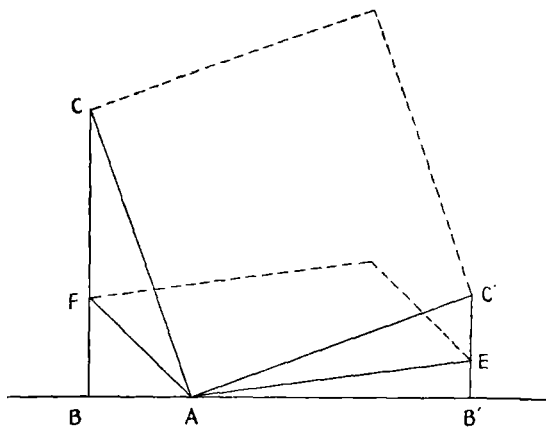


圖 43.

解：將 $rt.\triangle ABC$ 與 $rt.\triangle AB'C'$ 相疊合（圖 44）（ \because 兩三角形全等），如果 E, F 為所求點，即 $AB : EB = BC : BF$ ，則必 $FE \parallel AC$ 。於是上述之問題轉變為 $\angle A = \gamma$ 時，能使一與 AC 平行之直線交 AB, BC 於 E, F ，而使 $EC = 2AF$ 。

設： COA 為 x 軸， O 為原點（ AC 之中點），又設 OA 長為 1，因 $\angle ABC$ 為直角，故 B 在 AC 為直徑之圓上，

即於 $x^2 + y^2 = 1$ 之上，或

於 $x = \cos t \quad y = \sin t$ 之上，

則

AB 直線之方程式：

$$\frac{y - \sin t}{x - \cos t} = \frac{y}{x - 1}$$

BC 直線之方程式：

$$\frac{y - \sin t}{x - \cos t} = \frac{y}{x + 1}$$

設平行於 AC 之直線方程式：

$$y = K \quad (\text{規定 } K < \sin t)$$

$$AB \text{ 與直線 } y = K \text{ 相交於 } E: y = K, x = \frac{\sin t + K \cos t - K}{\sin t}$$

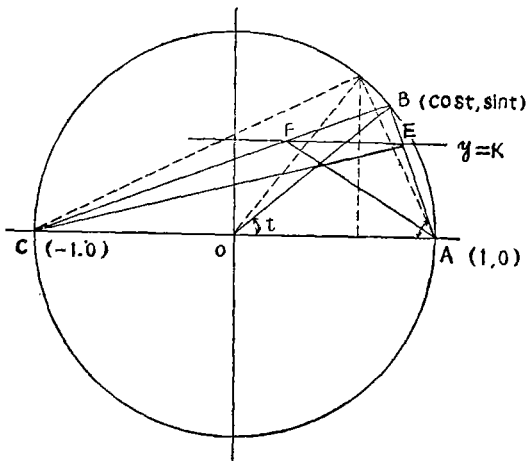


圖 44.

BC 與直綫 $y=K$ 相交於 F: $y=K, x=\frac{K+K \cos t-\sin t}{\sin t}$

假設 $\overline{CE}^2=4 \overline{AF}^2$,

$$\text{即 } K^2+\left(\frac{\sin t+K \cos t-K}{\sin t}+1\right)^2=4\left[K^2+\left(\frac{K+K \cos t-\sin t}{\sin t}-1\right)^2\right]$$

$$K^2+\left(K \cot t-\frac{K}{\sin t}+2\right)^2=4 K^2+4\left(K \cot t+\frac{K}{\sin t}-2\right)^2$$

$$\left(3+3 \cot ^2 t+10 \frac{\cos t}{\sin t}+3 \frac{1}{\sin ^2 t}\right) K^2-\left(20 \cot t+\frac{12}{\sin t}\right) K+12=0 \dots \dots (1)$$

有實根之條件,

$$\left(10 \cot t+\frac{6}{\sin t}\right)^2-12\left(3+3 \cot ^2 t+10 \frac{\cos t}{\sin t}+\frac{3}{\sin ^2 t}\right) \geq 0$$

$$64 \cot ^2 t-36 \geq 0,$$

$$-\frac{3}{4} \leq \cot t, \text{ 或 } \cot t \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{取 } t \leq \text{arc } \text{tg } \frac{3}{4},$$

$$\therefore \angle CAB \geq \text{arc } \text{tg } 2,$$

$$\text{約 } 90^\circ \geq \angle CAB \geq 63^\circ 27'.$$

2. 求上題中的 $\frac{FB}{AB}$:

解: 由(1)式可化爲:

$$\left(\frac{K}{\sin t}\right)^2-2\left(\frac{K}{\sin t}\right)+\frac{6}{5 \cos t+3}=0$$

$$\therefore \frac{K}{\sin t}=1 \pm \sqrt{1-\frac{6}{5 \cos t+3}} \quad (\text{取負號, 因已規定 } K < \sin t)$$

$$\text{即 } K=\sin t\left(1-\sqrt{1-\frac{6}{5 \cos t+3}}\right) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{而 } \sin t=\sin 2\left(90^\circ-\angle A\right)=\sin 2 A,$$

$$\cos t=\cos 2\left(90^\circ-\angle A\right),$$

$$\text{而 } \frac{BE}{AB} = \frac{AB-AE}{AB},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } AB &= \sqrt{(\cos t - 1)^2 + (\sin t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t + 1 + \sin^2 t} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}, \\ &= 2 \sin \frac{t}{2} = 2 \cos \angle A \end{aligned}$$

$$\text{而 } AE = \frac{K}{\sin \angle A}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{AB-AE}{AB} &= \frac{2 \cos \angle A - \frac{K}{\sin \angle A}}{2 \cos \angle A} \\ &= 1 - \frac{K}{2 \cos \angle A \sin \angle A} \\ &= 1 - \frac{K}{\sin 2 \angle A} \\ &= 1 - \frac{K}{\sin t}. \end{aligned}$$

將(2)式之 K 值代入, 則得:

$$\frac{AB-AE}{AB} = \sqrt{1 - \frac{6}{5 \cos t + 3}},$$

$$\text{即 } \frac{BE}{AB} = \sqrt{1 - \frac{6}{5 \cos t + 3}}.$$

*

*

*

附 錄

上面討論的結果，可用圓規直尺求得：並可將求得的結果來裝置儀器。

作圖時先將 $\sqrt{1 - \frac{6}{5 \cos t + 3}}$ 化成 $\sqrt{\frac{\cos t - \frac{3}{5}}{\cos t + \frac{3}{5}}}$ ，

設 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $\angle CAB \geq \arctan 2$ (圖 45.a)

以 C 為中心， CA 為半徑作弧交 AB 之延長線於 O 。由 A 向 CO 作垂線交 CO 於 H ，則

$$CH = \overline{AC} \cos t.$$

再以 H 為中心， $\frac{3}{5} \overline{AC}$ 為半徑作弧交 CO 於 I ，交 CO 之延長線於 K ，

則 $CI = \overline{AC} \left(\cos t - \frac{3}{5} \right)$ ，

$$CK = \overline{AC} \left(\cos t + \frac{3}{5} \right)。$$

再以 C 為中心， CA 為半徑作弧 \widehat{OA} 。

以 CK 之中點 M 為中心， MK 為半徑作弧交 \widehat{OA} 之延長弧於 N 。

再由 N 向 CO 作垂線交 CO 於 Q ，則

$$CQ = \frac{\overline{AC}}{\cos t + \frac{3}{5}}$$

以 C 為中心，以 CI 為半徑作弧交 OC 之延長線於 R 。

以 QR 之中點 U 為中心， UQ 為半徑作圓弧 \widehat{QR} 。

由 C 向 \widehat{QR} 作 CQ 之垂線，交 \widehat{QR} 於 V ，則

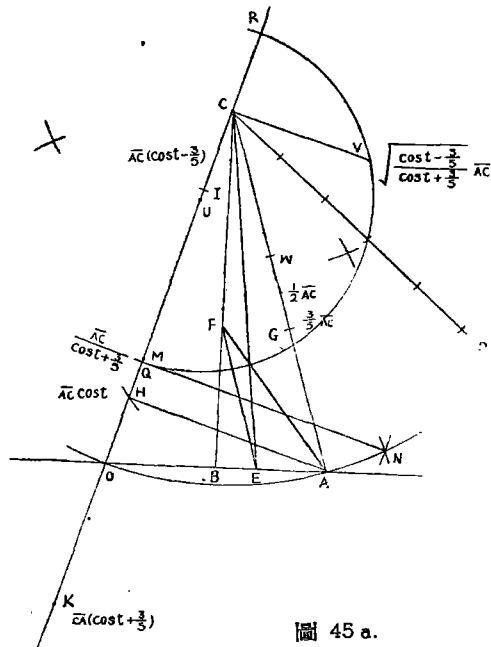


圖 45.a.

$$CF = \frac{\sqrt{\cos t - \frac{3}{5}}}{\sqrt{\cos t + \frac{3}{5}}} \cdot AC$$

故以 C 為中心，以 CF 為半徑作弧交 CA 於 W 。

由 W 作 CB 之平行線交 AB 於 F 。

以 E 為中心，以 CF 為半徑作弧交 CB 於 F 。則

$$BF = \sqrt{1 - \frac{6}{5 \cos t + 3}} \cdot AB,$$

$$BF = \sqrt{1 - \frac{6}{5 \cos t + 3}} \cdot BC。$$

且已設 $\angle CAB \geq \text{arc } t_2$ ，根據 1, 2 兩段的結

果可知 $AF = \frac{1}{2} EC$,

且 $BC:BF = AB:EC$ 。

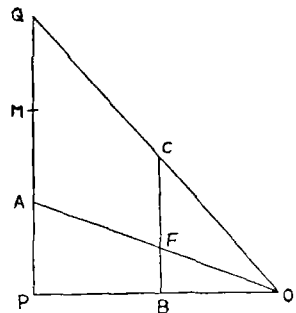


圖 45 b.

我們利用這些作圖的結果來裝置儀器時，可以先作一直線 PB (圖 45 b)，由 P 作一垂直於 PB 之垂線 PQ ，並使 PQ 等於儀器之尺長；再以圖 45 a 之 CFB 為定長，過 B 作一垂直於 PB 之垂線 BFC ；聯 QC 並延長之交 PB 之延長線於 O ；聯 OF 並延長之交 PQ 於 A ，並作 AQ 之中點 M ，則

$$PA = a \quad (\text{鉛筆位置})$$

$$PM = a + b \quad (\text{連結關節位置})$$

*

*

*

由上面的證明，可見正方形原圖的角與投影面(直槽的平行線)所成的兩個角，其中大角必須大於 $\text{arc } t_2$ (約 $63^\circ 27'$)，小角必須小於 $90^\circ - \text{arc } t_2$ (約 $26^\circ 33'$) (圖 46)，才有可能將其長濶兩邊投影成爲 2:1，如圖 43； $AF = 2AF'$ 。

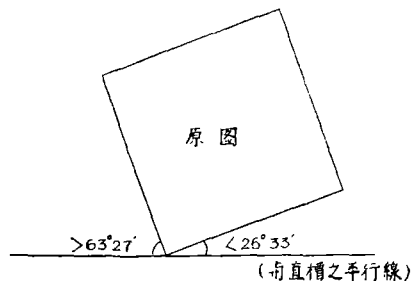


圖 46.

若用正角投影，則原圖所置放的位置

與直槽平行線所成之小角為 $\text{arc cot } \sqrt{7}$ (約 $20^{\circ}43'$)，投影角為 $\text{arc cos } \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (約 $19^{\circ}30'$ ，即鉛筆在 33.4%) 時，則可將長邊及垂直高度皆縮短為原長的 0.94，而長濶(側)二邊之比為 2:1，合於二度(正角)投影的要求。其證明如下：

設有一立方體 $ABCDGFEF'$ (圖 47)，過 A 有一正投影之投影面，投影角為 θ ，立方體經投影後成為 $AB'C'D'G'E'F'$ ，現過 A 作一垂直於 AE 之直線 AO (直槽之平行線)，求 $\angle BAO = ?$ $\theta = ?$ 時，

則
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AE'}{AE},$$

且
$$AD' = \frac{1}{2} AB'$$

證：為了證明便利起見，設 AD, AB, AE 為單位長，取 AD, AB, AE 為 x, y, z 三坐標軸。設通過原點 A 的平面(投影面)為 $Ax + By + Cz = 0$ ，

y 軸方向：(0, 1, 0)

z 軸方向：(0, 0, 1)

∵ 已設 $\frac{AB'}{AB} = \frac{AE'}{AE}$ ，

則 AB, AE 投到平面 $ax + by + cz = 0$ 的投影相同。

故有
$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

即 $b = c$ 。

令 $c = 1$ ，則 $b = 1$ ，

則 $ax + y + z = 0$ 與 $z = 0$ 之交線為 $ax + y = 0$ ，

則 $ax + y = 0$ 與 y 軸的交角 $\angle BAO$ 為

$$\angle BAO = \text{arc cot } a \quad (0^{\circ} \leq \angle BAO \leq 90^{\circ})$$

則
$$\cos \theta = \cos \left(90^{\circ} - \text{arc cos } \frac{a \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} \right)$$

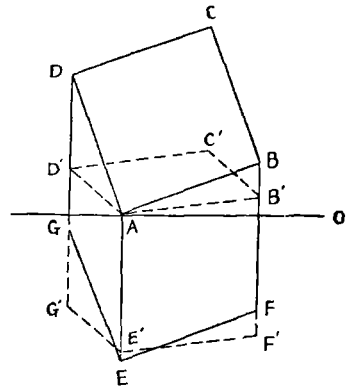


圖 47.

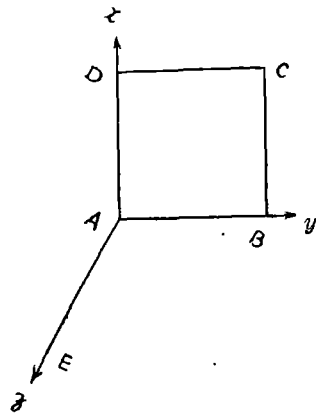


圖 48.

$$= \cos\left(90^\circ - \arccos \frac{1}{\sqrt{2+a^2}}\right)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2+a^2}}.$$

因 $\cos\theta = \frac{AB'}{AB}$, 設 $\frac{AB'}{AB} = K$

故 $\cos\theta = \frac{AB'}{AB} = \sqrt{1 - \frac{1}{2+a^2}} = K. \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \leq K \leq 1\right)$

若使 AD 在 $ax+y+z=0$ 的投影 AD' 等於 AB 在 $ax+y+z=0$ 的投影 AB' 的 $\frac{1}{2}$, 即須 $AD' = \frac{1}{2} AB'$,

因 y 軸方向為: $(0, 1, 0)$,

x 軸方向為: $(1, 0, 0)$,

$$AB' = \sqrt{1 - \frac{1^2}{a^2+1+1}} \qquad AD' = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+1+1}}$$

$$\text{即 } \sqrt{1 - \frac{1^2}{a^2+1^2+1^2}} = 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+1^2+1^2}}$$

解得 $a = \pm\sqrt{7}$ (取正號)

$\therefore \sqrt{7}x+y+z=0$ 即為所求之平面

此時 $\angle BAO = \arccot a = \arccot \sqrt{7}$

$$\theta = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{2+a^2}} = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

因此我們便可以按照這些證明的結果來置放原圖及裝置儀器，繪圖時當繪完高的一根等高線後，再繪次高的等高線時，因等高線的垂直間距 (h) 亦按 $\frac{AB'}{AB} =$

$\sqrt{1 - \frac{1}{2+a^2}} = K$ (約 0.94) 的比值縮短了, 所以必須按此縮短率(即 $h \cdot K$ 之值),

將畫紙向直槽平移一格 ($h \cdot K$), 再繪次高的等高線。經過這樣繪製出來的塊狀立體圖長邊的長度及高度皆按 0.94 的比例縮短了, 所以在剖面上的寬度與深度是準確的, 而側邊的長度等於長邊之半, 完全合於二度(正角)投影繪製塊狀立體圖的要求。

若用斜角投影, 則方形原圖置放之位置與直槽平行線所成之大角由 $\text{arc } \text{tg } 2$ (約 $63^\circ 27'$), 至 90° 的範圍內, 皆可將邊的比例投影成爲 2:1, 而垂直高度則經投影後仍與原長相等, 所以在繪圖時每繪完一根高的等高線後, 畫紙仍須按原來等高線的垂直間距向直槽平移一格 (h), 再行繪次高的等高線。所以經過這樣繪製出來的塊狀立體圖, 深度比寬度稍大了一些; 但是這種相差是很小的。例如在一萬分之一的地形圖上 1 mm 等於實際高距 10 m, 若方形原圖與直槽平行線(投影面)所成之大角爲 $70^\circ - 75^\circ$ 時, 相差只有 0.05—0.03 m, 所以在 1 mm 內有 0.5—0.03 mm 之差是很微的, 這是普通作圖亦沒有辦法繪出來的。因此這些差值一般可以不作計算, 畫紙仍可按原來等高線的垂直間距 (h) 移動, 經過這樣繪製出來的塊狀立體圖也基本合於二度投影的要求。

設塊狀立體圖上側邊的厚度 EF (BC 及 D E 之垂線) (圖 49), 則 $EF = EB \sin \angle EBF$, 令 $EB = 1$, 則 $EF = \sin \angle EBF$, 因此當 $\angle EBF = 90^\circ$ 時, 則 $EF = 1$, 即側剖面的厚度和正剖面的厚度相同, 但側面和正面完全被投影成爲一直線了。若 $\angle EBF = 0^\circ$ 時, 則 $EF = 0$, 即側

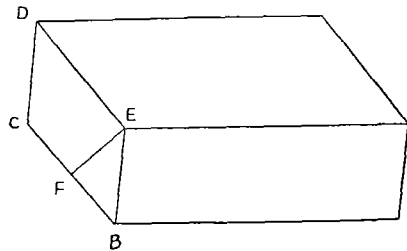


圖 49.

面的厚度完全被壓縮成爲一直線, 而側面和正面適成 90° , 因此這些立體圖形不能看見側剖面, 同時圖形也不美觀。所以在繪圖時要選擇適當的投影, 使側面的厚度要適當配置得好。

由上面的討論可知, 當原圖安放的位置與直槽之平行線所成的大角爲 $\text{arc } \text{tg } 2$ (約 $63^\circ 27'$) 時, 經投影後則側面和正面完全被投影成爲一直線; 大角在 90° 時, 側邊的厚度也被壓縮成爲一直線。這些圖形的缺點已如上述, 根據實際經驗繪出來的圖形, 我認爲原圖安放的位置與直槽之平行線所成的大角在 70° 附近時所繪的塊狀立體圖最自然、美觀, 這也恰與用二度(正角)投影的方法來繪製塊狀立體圖時的原圖安放的位置基本相同(圖 50)。

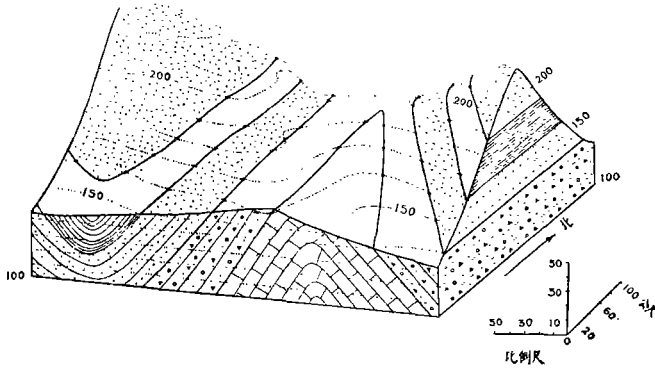


圖 50. ⊖ 二度(正角)畫法塊狀立體地質圖

4. 正剖面(斜角)畫法二: 利用以上所討論的三種投影方法繪製的塊狀立體圖, 都存在着一定的缺點: 如用正剖面(斜角)畫法一繪製出來的塊狀立體圖, 雖然能繪出完全沒有歪曲和壓縮的正剖面, 但是在其他兩側的剖面則被壓縮成爲一直線, 因此側面的剖面完全不能利用, 同時塊狀立體圖也不很自然。若用等度(斜角)投影來繪製塊狀立體圖, 雖然塊狀立體圖上的三軸都按 0.82 縮短了, 在三軸上的距離是準確的, 但其他方向的距離則不準確, 因此所有角度皆受歪曲或壓縮而不準確。用二度(正角)投影繪出來的塊狀立體圖, 在長邊剖面的深度和寬度是準確的, 但角度仍受一定的歪曲, 所以仍不夠準確。因此利用上面討論的三種投影方法所繪製的塊狀立體圖, 都存在着一定的缺點, 所以還不夠理想。作者經過研究, 提出另一

種利用斜角投影的方法來繪製塊狀立體圖: 用這種投影所繪製出來的塊狀立體圖(圖 51), 它的最大優點就是可以繪製出一個完全沒有歪曲的正剖面 $ABCD$, 同時又可以繪製出側剖面 $BGFC$, 其中 CF , BG 可以投影成與正剖面 AB , CD 之比爲 1:2 (或相等)。在繪圖時可以將主要的地質構造放在正剖面 $ABCD$ 之上

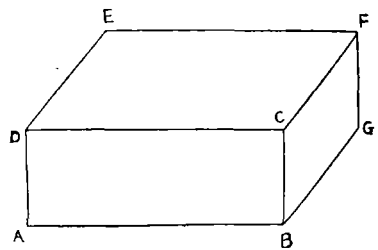


圖 51.

(即剖面 $ABCD$ 應與岩層走向垂直)。因此就可直接量度出岩層的寬度、深度、厚度、傾角等, 在側剖面上除岩層的傾角及厚度外, 其他深度、寬度亦可以直接量度。所以我認爲利用這種投影來繪製塊狀立體圖, 比上述三種投影的繪製法更勝一籌, 而且完全可以用這個簡單的儀器快捷地把它繪製出來。茲將其原理及繪製方法簡述如下:

⊖ 圖 50 的原圖根據圖 31。

設 $ABCD$ 為正方形(圖52), 過 A 有一與地平面垂直的投影面 LL , 平行的投影線所成之沿直面與 LL 面相交成 90° , 這些投影線與地平面所成的仰角為 θ ($< 45^\circ$), 則 $ABCD$ 正方形在 LL 面上的投影為 $AB'C'D'$ 的平行四邊形。這些斜角投影的道理已經在上面討論過了。現以 AD' 為正方形之邊, 作正方形 $A EFD'$, 過 AD' 有一投影面 $L'L'$ 亦與地平面成垂直, 則正方形 $A EFD'$ 也可以在 $L'L'$ 的投影面上投影成為 $AB'C'D'$ 之平行四邊形。

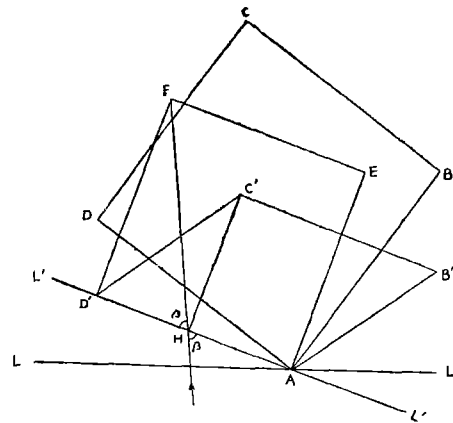


圖 52.

證: 將 LL 面上的 $AB'C'D'$ 平行四邊形重疊於 $ABCD$ 面上, 過 C' 作 AD' 之垂線交 AD' 於 H , 聯 HF , 則 $C'H$ 即為 HF 之投影圖, $\angle FHD'$ 即為平行之投影線之沿直面與 $L'L'$ 投影面所成之夾角 β , 即:

$$\beta = \text{arc tg} \frac{FD'}{HD'}$$

現設平行投影線與地平面所成之仰角為 γ , 則:

$$\tan \gamma = \frac{C'H}{FH}$$

即平行之投影線與地平面所成之仰角為 γ , 其沿直面與投影面 $L'L'$ 所成之夾角為 β 時, 即可將正方形 $A EFD'$ 投影成為平行四邊形 $AB'C'D'$, 與正方形 $ABCD$ 投影在 LL 投影面上之結果相同。

根據上面的討論, 可知過 AD' 直線鉛垂面的圖形在 $L'L'$ 平面上的投影圖完全一樣(甚至平行此鉛垂面的平面圖形在 $L'L'$ 平面上的投影圖也一樣, 不過位置不同而已)。

因此我們便可以根據這些道理, 投影出完全沒有任何壓縮或歪曲的剖面, 同時又可以投影出側邊的剖面, 如 AB 、 AE 可投影成 AB' 。

我們依上面所討論的道理, 利用儀器來繪製塊狀立體圖的時候, 根據儀器構造原理, 不能用儀器直接把正方形 $A EFD'$ 繪成它的投影圖 $AB'C'D'$, 但我們可以直接用儀器把正方形 $ABCD$ 繪成它的投影圖 $AB'C'D'$ (即將正方形 $ABCD$ 縮小為

$A'EFD'$ 正方形後，並如圖 52 安放時，亦可在 $L'L'$ 面上投影成爲 $AB'C'D'$ 。因此我們就可以利用這些結果把它轉繪成有正剖面的塊狀立體圖。繪製時(圖 53)，必須先將原圖 $ABCD$ 放置好，然後用儀器的指針對準 AD (或 BC) 移動，同時鉛筆也就在固定的畫紙上繪出 AD 的投影圖 $A'D'$ 。求出 $A'D':AD$ 之值。再適當延長 $A'D'$ 至 O ，並作 $A'O$ 之垂綫 OP ，在 OP 上劃分等高綫間距刻度，而這些等高綫間距刻度必須按 $A'D':AD$ 之值縮短。然後再用一張畫紙覆蓋在 $A'D'O$ 之上，並在靠 OP 之畫紙邊劃一移動記號，將畫紙邊與 OP 重合，並將畫紙邊的移動記號對準所需之等高綫間距刻度，這樣裝置好

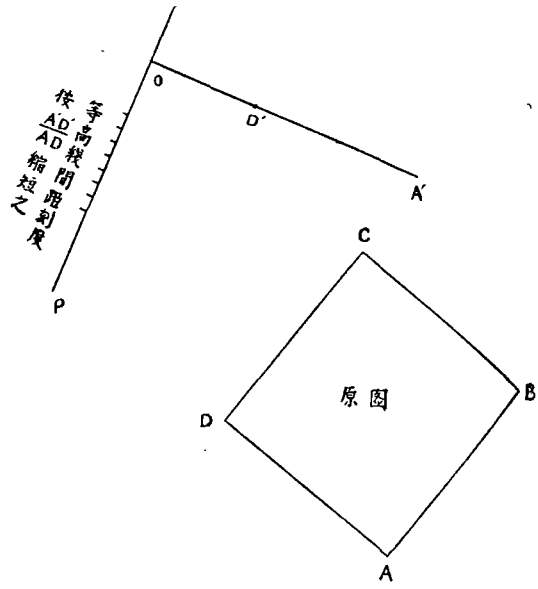


圖 53.

之後，指針就可以對準原圖上的等高綫移動，每繪完一根高的等高綫後，再繪次高的等高綫時，必須將畫紙沿 PO 平移一等高綫間距刻度，直到繪完原圖的所有等高綫，畧加修飾，便能繪製出有一正剖面及一側剖面的塊狀立體圖。因爲正剖面的長度、高度和角度等都按一定的比例 ($A'D':AD$) 縮短或縮小了，因此整個原剖面經繪製後都按此比例縮小，所以它仍然是準確的。

在繪製這種塊狀立體圖的時候，我們可以利用二度投影所討論的結果來繪製，如方形 (不一定是正方形) 的原圖所置放的位置與直槽之平行綫所成之角有一大角爲 $69^{\circ}17'$ 時 (或有一小角爲 $20^{\circ}43'$)，鉛筆即可裝置在儀器的 33.4% 處， $A'C':AD$ 之值亦即爲 0.94，因此就可以很快裝置好儀器及劃分好等高綫間距刻度 (若 $A'D':AD$ 之值相差太微，可以不作計算)，再按上面所討論的方法繪製，就可以繪製出長(正)邊與短(側)邊之比爲 2:1，而有正剖面的塊狀立體圖 (圖 54)。

根據作者實際繪圖的經驗，原圖安放的位置與直槽之平行綫 (投影面) 所成之大角爲 70° 附近時，所繪的這種斜角投影的塊狀立體圖是比較自然和美觀的。

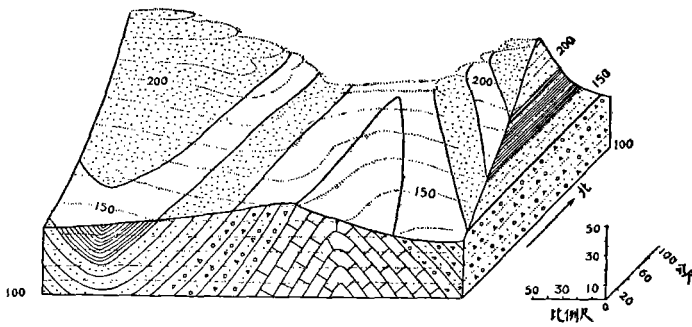


圖 54. ⊖ 正剖面(斜角)畫法二塊狀立體地質圖

結 語

以上所討論的幾種塊狀立體圖都是實用的，尤其是以正剖面（斜角）畫法二所繪製的塊狀立體圖最為實用，它們都能直接讀出立體圖塊上每一地點的地面高度及岩層分佈情況，亦能夠直接（或間接）量度出剖面上的岩層深度、寬度、厚度及其傾角，能充分表現數量的關係，可以說是地形地質情況在立體圖塊上的數學表現，故這些塊狀立體圖和一般不能表示數字的圖畫式的塊狀立體圖有很大的不同。

本文所提出的由平面地形地質圖繪成塊狀立體圖的方法及所論及的幾種投影，僅是作者年來研究的初步結果，其中還有不少地方尚須繼續深入研究，希望讀者和製圖先進不吝指正。

本文所研究的繪製塊狀立體圖的方法，雖然是應用在繪製地形、地質圖方面的，但牽涉到很多數學方面的問題。作者關於數學方面的知識很缺乏，如果沒有數學系教師許淞慶、許毅然、吳希光和馬汝念等先生的協助，要初步完成這件研究工作是不可能的。同時，本文在寫作過程中得到本系葉匯、繆鴻基等老師的指導與關懷和朱健梧先生的幫助繪圖；在製造儀器方面主要依靠木工場賴華同志和金工場鄭焜、黃興等同志，特此深表感謝。

參 考 文 獻

- [1] 丁驥、陳正祥：透視圖繪法 Block Diagrams, 1943 年 4 月初版，前中央大學出版部印行。
- [2] C. Barrington Brown and F. Debenham: Structure and Surface, 1929, London.

⊖ 圖 54 的原圖根據圖 31。

-
- [3] 葛綏成: 地圖繪製法及讀法, 1938 年, 中華書局。
- [4] Raisz, E: General Cartography. McGraw—Hill Book Company, New York, 第一版, 1938, 第二版 1948。
- [5] Johnston, W. D. Jr. and Nolan, T. B.: Isometric Block Diagrams in Mining Geology. Econ, Vol. 32, PP. 550—570, 1937。
- [6] 馬爾科夫, K. K.: “地形學基本問題”的結論部份, 地理學報第 19 卷第 2 期, 1953 年 12 月。
- [7] 阿普若道夫著, 馬萬鈞譯: 地質製圖學, 商務, 1954 年 1 月。
- [8] B. H. 帕夫林諾夫: 表示地質構造用的立體圖解, 北京地質學院, 1955。