摆幅分離函数的係数

刘 俊 賢

（數 學 系）

設在圓 $|z|\leqslant r$ 上正則的函數 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$ 在圓上除 $z=0$ 外沒有別的零點。再設有一整數 $m\geqslant 1$ 使當

$$\frac{k}{m}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{k+1}{m}\pi,\ k=0,1,2,\cdots\cdots 2m-1,$$

时恒得 $$\arg f\left(re^{\frac{k}{m}i\pi}\right)\leqslant\arg f\left(re^{i\theta}\right)\leqslant\arg f\left(re^{\frac{k+1}{m}i\pi}\right)。$$

我們在本文中稱這种函數为"在圓周 $|z|=r$ 上 m 級的擺幅分離函數"即函數的幅角分开在 $2m$ 只角內擺动。本文就是去指出这种函數展式中的前 m 個系數 a_2, $a_3,\cdots\cdots a_{m+1}$ 適合不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{n}{r^{n-1}},\ n=2,3,\cdots\cdots m+1。$$

这需要根據在下

引理： 在半個圓周 $|z|=1$ 上順一定旋向任給予单数個點 $\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots\xi_{2k+1}$ 則必 $|\xi_1-\xi_2+\xi_3-\cdots\cdots-\xi_{2k}+\xi_{2k+1}|\leqslant 1$。

这引理可通过遷移變換的性質來証明。如 $|a|\leqslant 2$ 則遷移變換 $\xi'=\xi+a$ 把圓 $|\xi-\xi_0|\leqslant 1$ 遷移于圓 $|\xi'-\xi'_0|\leqslant 1$，$\xi'_0=\xi_0+a$ 时兩圓必相交或相切。兩等圓弧所圍的区域 $\triangle(pq)$ 遷于对应的兩等圓弧所圍的区域 $\triangle(p'q')$ 如圖 I. 以下都用 $\triangle(\xi_j\xi_k)$ 表示相交于 ξ_j 及 ξ_k 的兩個同半徑的圓弧所圍的区域。

$$命\qquad -\xi_2+\xi_3=a,\quad \xi'_1=\xi_1-\xi_2+\xi_3=\xi_1+a$$

則知點 ξ'_1 必落在对称于弦 $\overline{\xi_1\xi_3}$ 的区域 $\triangle(\xi_1\xi_3)$ 如圖 II. 再命

$$-\xi_4+\xi_5=a,\ \xi''_1=\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4+\xi_5=\xi'_1+a$$

則由圖 II 察知 ξ''_1 必落在对称於弦 $\overline{\xi_1\xi_5}$ 的區域 $\triangle(\xi_1\xi_5)$。这是由於 $\triangle(\xi_1\xi_3)$ 被

包含在$\triangle(\xi_1\xi_4)$之內而$\triangle(\xi_1\xi_4)$經一遷移量$a=-\xi_4+\xi_5$遷移至$\triangle(\xi_1\xi_6)$內的$\triangle(\xi_1\xi^5{}_1)$。这樣可繼續至最後情形，

命 $-\xi_{2k}+\xi_{2k+1}=a$，$\xi_1{}^{(k)}=\xi_1-\xi_2+\xi_3-\cdots-\xi_{2k}+\xi_{2k+1}=\xi_1{}^{(k-1)}+a$

則$\xi_1{}^{(k)}$必落在对称於弦$\overline{\xi_1\xi_{2k+1}}$的$\triangle(\xi_1\xi_{2k+1})$。所有點$\xi_1\xi_2\cdots\xi_{2k+1}$均同在半個圓周上故所有區域$\triangle(\xi_1\xi_3)\cdots\triangle(\xi_1\xi_{2k+1})$均在圓域$|\xi|\leqslant1$之內。由是

$$|\xi_1-\xi_2+\xi_3-\cdots\cdots-\xi_{2k}+\xi_{2k+1}|=|\xi_1{}^{(k)}|\leqslant1.$$

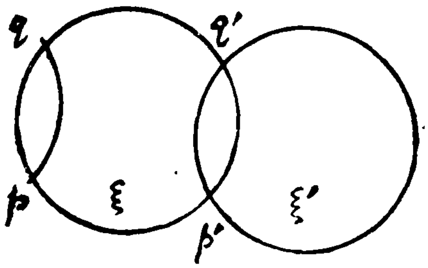

圖 I

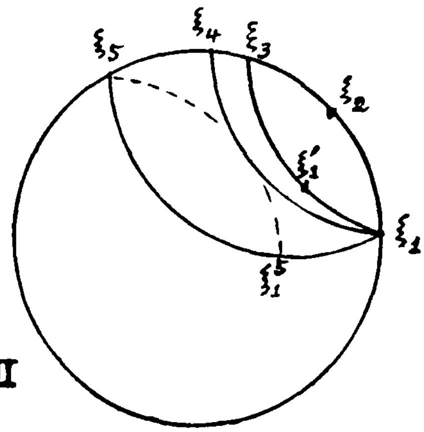

圖 II

現在先察一級的擺幅分離函數。命$\varphi=\arg f(re^{i\theta})$ 卽有兩個角$\alpha(0<\alpha<2\pi)$，$\beta(0<\beta<2\pi)$使於$0\leqslant\theta\leqslant\pi$时恆得$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$及於$\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$时恆得$\beta\leqslant\varphi\leqslant\alpha+2\pi$（这由於已設$f(z)$在圓上僅有一個零點)。因为已設$f(z)$在圓周$C_r$ $(|z|=r)$上正則故$f(z)$所蓋对应的解析曲線Γ_r除了可能包含有一部分是由原點发出的射線的一段之外，在其上不能有$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\equiv0$，因而$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$有有限個零點，这些零點把$\Gamma_r$分析为若干個单調弧$\Delta S_1$，$\Delta S_2,\cdots\cdots\Delta S_\lambda$各对应於$C_r$上順序連接互不相交的圓弧$\Delta s_1$，$\Delta s_2,\cdots\cdots\Delta s_\lambda$ $(\Delta s_1+\Delta s_2+\cdots+\Delta s_\lambda=2\pi r)$。在每一$\Delta s_j$上常$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\geqslant0$或常$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\leqslant0$，並且在相隣的$\Delta s_j$，$\Delta s_{j+1}$上$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$的正負號相反。由擺幅分離的性質得知於$\theta=0$，$\theta=\pi$时必$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}>0$，因而半圓周$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$及$(\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$各包含$\Delta s_1,\Delta s_2\cdots\cdots\Delta s_\lambda$中的单数個，故任一射線$\varphi=$常数割$\Gamma_r$於单数個交點（除了可能有重合的一部分之外）$w_1,w_2,\cdots w_{2k+1}$分在$\Delta S_1\cdots\Delta S_\lambda$中不同的弧上，这些交點各对应於$\Delta s_1\cdots\Delta s_\lambda$中$2k+1$段弧上的點$re^{i\theta_v}$，$v=1,2,\cdots2k+1$. 如是得寫

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\widehat{\Gamma_r}\beta} e^{-i\theta}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left[e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2}+e^{-i\theta_3}-\cdots-e^{-i\theta_{2k}}+e^{-i\theta_{2k+1}}\right]d\varphi$$

那么由上引理得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left|e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2}+e^{-i\theta_3}-\cdots-e^{-i\theta_{2k}}+e^{-i\theta_{2k+1}}\right|$$

$$d\varphi\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2\pi}$$

同样理由得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\beta\widehat{\Gamma_r}\alpha} e^{-i\theta}d\varphi\right|\leqslant\frac{\alpha+2\pi-\beta}{2\pi}$$

故得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} e^{-i\theta}d\varphi\right|\leqslant\frac{\beta-\alpha+\alpha+2\pi-\beta}{2\pi}=1.$$

再取 m 級擺幅分離函数來看，依定义在 $(0,\ 2\pi)$ 間有 $2m$ 個角 $\varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_{2m-1}$（命 $\varphi_{2m}=\varphi_0+2\pi$）各对应于 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 間 $2m$ 個角 $0,\ \frac{\pi}{m},\ \frac{2\pi}{m},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$ $\frac{2m-1}{m}\pi$，使當 $\frac{j\pi}{m}\leqslant\theta\leqslant\frac{j+1}{m}\pi$ 时恒得 $\varphi_j\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{j+1}$，$j=0,1,2\cdots2m-1$ 在 $\varphi_j\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{j+1}$ 間，曲綫 Γ_r 可分析为单数個单調弧 $\triangle S_1\cdots\cdots\triangle S_{2k+1}$ 对应于圓弧 $j\frac{\pi}{m}\leqslant\theta\leqslant\frac{j+1}{m}\pi$ 上的 $\triangle s_1\cdots\cdots\triangle_{2k+1}$。由于在 $\triangle s_1\cdots\cdots\triangle s_{2k+1}$ 等圓弧，每弧上任取一點 $re^{i\theta_v}$，$v=1,\ 2,\ \cdots\ 2k+1$ 都使 $e^{-in\theta_1},e^{-in\theta_2},\cdots e^{-in\theta_{2k+1}}$，$2k+1$ 個

点同在半個圓周上只要 $0<n\leqslant m$ 故仿照在上推得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{j\pi}{m}}^{\frac{j+1}{m}\pi} e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_j\Gamma_r\varphi_{j+1}} e^{-in\theta}\,d\varphi\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}}\left|\sum_{v=1}^{2k+1}(-1)^{v-1}e^{-in\theta_v}\right|d\varphi\leqslant\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{2\pi}$$

及 $$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{2m-1}\int_{j\frac{\pi}{m}}^{\frac{j+1}{m}\pi}e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{2m-1}\frac{(\varphi_{j+1}-\varphi_j)}{2\pi}=1$$

把在上結果联系到下列各式:

$$\frac{zf^1(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}d\theta=1+\alpha_1z+\cdots+\alpha_nz^n+\cdots,$$

$$\alpha_n=\frac{2}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta,$$

$$(n-1)a_n=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}a_2+\cdots+\cdots\alpha_1a_{n-1},\ n=2,3,\cdots m+1$$

使証明

定理 1. 在圓周 $|z|=r$ 上 m 級擺幅分離函数的係数 a_n 適合不等式 $|a_n|\leqslant\frac{n}{r^{n-1}}$, $n=2,3,\cdots m+1$。

如果不論 $r<1$ 如何 $f(z)$ 常是 m 級擺幅分離函数則令 $r\longrightarrow1$ 时得 $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\cdots m+1$. 我們説这樣的函数是在单位圓内 $|z|<1$ 的 m 級擺幅分離函数。

例如对原點星形的函数，由於 $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ 的不變號故函数的輻角的擺幅可以任意分離，那就是对原點是星形的函数可說是在单位圓内一個 ∞ 級的擺幅分離函数。

如設$f'(z)$在圓$|z|\leqslant r$上沒有零點及於$|z|=r$时$f(z)$所畫曲線的切線向的擺幅可以分離則把在上定理应用於$F(z)=zf'(z)$得

定理2．若在圓上$|z|\leqslant r$, $f(z)$正則及$f'(z)\neq 0$且當$|z|=r$时$f(z)$所畫对应曲線的切線向的擺幅可分離为$2m$分則$f(z)$展式中前m個係数適合不等式

$$|a_n|<\frac{1}{r^{n-1}},\ n=2,3,\cdots m+1。$$

例如$f(z)$是突形函数則$zf'(z)$是一∞級擺幅分離函数。

ON THE COEFFICIENTS OF SEPARATELY OSCILLATING FUNCTIONS

Liou Tsyun Hyen

ABSTRACT

If a regular function

$$f(z)=z+a_2 z^2+\cdots\cdots+a_n z^n\cdots\cdots, \ |z|\leqslant r,$$

satisfies the following conditions: (a) $f(z)$ has no other zero than that at $z=o$; (b) there exists an integer $m\geqslant 1$ such that we have

$$\arg f\left(re^{\frac{k}{m}i\pi}\right)\leqslant \arg f\left(re^{i\theta}\right)\leqslant \arg f\left(re^{\frac{k+1}{m}i\pi}\right)$$

when $$\frac{k}{m}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{k+1}{m}\pi, \quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots 2m-1,$$

we say that $f(z)$ is a "separately oscillating function of order m on the circle $|z|=r$," and show that in the development of $f(z)$ the coefficients a_n satisfy $|a_n|\leqslant\frac{n}{r^{n-1}}$ for $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots\ m+1$.

The proof is based upou the following lemma:

Given any odd number of points $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_{2k+1}$ lying on a semi-circumference $|\xi|=1$ and arranged in the order of circulation, we have

$$|\xi_1-\xi_2+\xi_3-\cdots\cdots-\xi_{2k}+\xi_{2k+1}|\leqslant 1.$$