

關於阿波羅尼問題和它的推廣

黃樹棠

(數學系)

阿波羅尼問題是最古老的幾何問題之一。它的目的在求作一個圓和平面上三個已知圓中每一個相切。一般說來，有八個這樣的圓存在，但阿波羅尼的解法早已失傳。歷史上很多著名的數學家，包括 Vieta, Newton, Gergonne, Plücker 和 Study 在內，都研究過這個問題，提出許多不同的解法。據說在十九世紀中，便有七十餘篇關於本題的論文^[1]。他們的解法往往不夠全面，很少注意到解的存在的必要而又充分的條件。

本文作者手頭缺乏資料，無從查考前人的著作，僅在學習方陣代數和圓形幾何的過程中，在姜立夫教授指導下，解決了這個問題。這裏所用的方法相信是新的，所得的結果十分簡單而又全面，並且同時解決了關於空間四個球面的和這相類似的問題。

爲了深入地了解這個問題的幾何性質，讓我們採用二級對稱方陣爲圓的坐標，改述拉格爾(Laguerre)圓素幾何學上的幾個基本事實，作爲後來進行解題的準備。

1. 格拉爾的圓素幾何學。圓列與圓彙^[2]

本文所討論的圓都是有定向的，用二級對稱方陣

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} \rho + \xi & \eta \\ \eta & \rho - \xi \end{pmatrix}$$

代表它，這裏 ρ , ξ , η 都是實數， ρ 是有定向的半徑， (ξ, η) 是圓心的笛卡兒坐標。

· 方陣 X 的行列式

$$(2) \quad \delta(X) = \rho^2 - \xi^2 - \eta^2$$

和跡函數

$$(3) \quad \tau(X) = 2\rho,$$

分別稱為圓的行列式和跡函數。跡函數為零的圓是點圓，沒有定向。無論有沒有定向的直線，都不是圓。

兩圓 X_1 和 X_2 同向相切的條件為

$$(4) \quad \delta(X_1 - X_2) = (\rho_1 - \rho_2)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2 - (\eta_1 - \eta_2)^2 = 0.$$

兩個定圓 P 和 Q 的綫性組合

$$(5) \quad X = P + \lambda(Q - P),$$

稱為拉氏圓列， λ 是列的參數。每個圓列一般地僅有一個點圓，這就是列的中心。

(例外情形：由半徑相等的圓構成的圓列沒有中心；由點圓構成的圓列，列中每一點都可看作中心。)

圓列為橢圓式的，如果

$$(6_1) \quad \delta(Q - P) = \delta(P - Q) > 0.$$

中心在列中每個圓的內部。列中任何兩圓不能同向相切。

圓列為雙曲式的，如果

$$(6_2) \quad \delta(Q - P) < 0.$$

中心在列中每個圓的外部。列中任何兩圓亦不能同向相切。

圓列為拋物式的，如果

$$(6_3) \quad \delta(Q - P) = 0.$$

中心在列中每個圓上。列中所有的圓都在列的中心彼此同向相切。

給定三個不屬於同一圓列的圓 P, Q, R ，它們的綫性組合

$$(7) \quad X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P),$$

稱為拉氏圓彙， λ 和 μ 是彙的參數。每個圓彙有無窮多個點圓，都在一條直線上，這就是彙的軸。(例外情形：由半徑相等的圓構成的圓彙沒有軸；由點圓構成的圓彙，彙中任兩點的聯綫都可看作軸。)

令 $\delta_{pq} = \delta_{qp} = \delta(P - Q)$ ， $\delta_{qr} = \delta_{rq} = \delta(Q - R)$ ， $\delta_{pr} = \delta_{rp} = \delta(R - P)$ ，

$$(8) \quad \Delta_{pqr} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{pq} & \delta_{pr} & 1 \\ \delta_{qp} & 0 & \delta_{qr} & 1 \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = \delta^2_{pq} + \delta^2_{qr} + \delta^2_{rp} - 2\delta_{pq}\delta_{qr} - 2\delta_{qr}\delta_{rp} - 2\delta_{rp}\delta_{pq}.$$

圓彙為橢圓式的，如果

$$(8_1) \quad \Delta_{pqr} > 0.$$

彙中每一個圓 X_0 有無窮多個同彙的圓和它同向相切。這些圓，包括 X_0 在內，組成兩個拋物式的圓列，列的中心在 X_0 上。所以，彙軸和彙中每個圓 X_0 相交於兩點。

圓彙為拋物式的，如果

$$(8_2) \quad \Delta_{pqr} = 0.$$

彙中每一個圓 X_0 也有無窮多個同彙的圓和它同向相切。這些圓，包括 X_0 在內，組成一個拋物式的圓列，列的中心在 X_0 上。所以，彙軸和彙中每個圓 X_0 相切於一點。

圓彙為雙曲式的，如果

$$(8_3) \quad \Delta_{pqr} < 0.$$

彙中每一個圓 X_0 不能和同彙的另一個圓同向相切。所以彙軸和彙中任何圓都沒有公共點。

2. 拉氏圓變換和拉氏反演⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾

對稱方陣的一次整式變換，

$$(9) \quad T: X^* = kA'XA + B, \quad k \neq 0, \quad \delta(A) = \pm 1, \quad B' = B,$$

稱為拉氏圓變換，這裏 k 是實數， A 和 B 是實的二級方陣， A' 表 A 的轉置方陣。（雖然 $\pm A$ 給出同一變換， $\delta(A)$ 的正負號還是有意義的。）

這種變換把有定向的圓變為有定向的圓，而且由於 $\delta(X^*_1 - X^*_2) = k^2 \delta(X_1 - X_2)$ ，同向相切的兩圓變為同向相切的兩圓。不但如此，經過變換 T 之後，圓列仍為圓列，圓彙仍為圓彙，每一圓列或圓彙是橢圓式的，雙曲式的或拋物式的這種性質，也保持不變。

如果拉氏圓變換 T 有一個不變圓 F 存在，便可將它寫作下式：

$$X^* - F = kA'(X - F)A.$$

如果 F 是點圓，還可取它為笛氏坐標 (ξ, η) 的原點，將 T 寫作

$$X^* = kA'XA.$$

如果 T 為對合變換 ($T^2 = I$)，並且除原點外， ξ 軸上另有一點不變，那末，不但 ξ 軸上其餘諸點都不變，並將有一個以 ξ 軸為彙軸的圓彙存在，它的每個圓都被變換 T 保持不變。這時可將 T 寫成

$$(10) \quad T: X^* = kA'XA, \quad k = -\delta(A) = \pm 1, \quad a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{12} + a_{21} = 0.$$

這樣的對合變換，稱為拉氏反演（對於圓彙的反演）。拉氏反演可按照它的不變圓彙的性質，分為橢圓式的和雙曲式的。拋物式的反演不存在。

首先考慮 $k = -\delta(A) = 1$ 的情形。從

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{12} + a_{21} = 0,$$

推得

$$\delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -a_{11}^2 + a_{21}^2 = -1,$$

由此可取

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch } t & -\text{sh } t \\ \text{sh } t & -\text{ch } t \end{pmatrix}.$$

將拉氏反演 T 展開為

$$(11) \quad T_1: X^* = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ -\text{sh } t & -\text{ch } t \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \text{ch } t & -\text{sh } t \\ \text{sh } t & -\text{ch } t \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \rho \text{ch } 2t + \eta \text{sh } 2t + \xi & -\rho \text{sh } 2t - \eta \text{ch } 2t \\ -\rho \text{sh } 2t - \eta \text{ch } 2t & \rho \text{ch } 2t + \eta \text{sh } 2t - \xi \end{pmatrix},$$

或即

$$\rho^* = \rho \text{ch } 2t + \eta \text{sh } 2t, \quad \xi^* = \xi, \quad \eta^* = -\rho \text{sh } 2t - \eta \text{ch } 2t.$$

這些都是橢圓式的反演，因為不變的圓 $X^* = X$ 適合條件

$$\rho (\text{ch } 2t - 1) + \eta \text{sh } 2t = 0, \quad \rho \text{sh } 2t + \eta (\text{ch } 2t + 1) = 0,$$

亦即

$$\frac{\eta}{\rho} = -\frac{\text{ch } 2t - 1}{\text{sh } 2t} = -\frac{\text{sh } 2t}{\text{ch } 2t + 1} = -\frac{\text{sh } t}{\text{ch } t},$$

由於 $|\text{sh } t| < \text{ch } t$ ，每個不變的圓都和 ξ 軸相交於兩點，那便是說，每個反演 T_1 的不變圓彙都是橢圓式的。例如令 $t=0$ ， $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， T_0 的不變圓彙為 $\eta=0$ ，由中心在 ξ 軸上的一切圓所組成。

所有的 T_1 都保持 ξ 軸上的點圓不變，所以當 $t \neq 0$ 時， T_1 把圓彙 $\eta=0$ 變為另一個同軸的橢圓式的圓彙。因為反演是對合，同一 T_1 也同時把那個圓彙變為圓彙 $\eta^*=0$ 。那個圓彙可用下面的關係來決定：

$$\eta^* = -\rho \text{sh } 2t - \eta \text{ch } 2t = 0,$$

即

$$(12) \quad \frac{\eta}{\rho} = -\frac{\text{sh } 2t}{\text{ch } 2t}.$$

任何以 ξ 軸為彙軸的圓彙都可用 ξ 軸 (兩個點圓所決定的) 和一個與它相交的圓來決定, 所以給定了任何以 ξ 軸為彙軸的橢圓式的圓彙, 總可利用關係 (12) 找到一個 T_t 把它變為圓彙 $\eta=0$ 。

同理, T_t 把雙曲式的圓彙 $\rho=0$ 變為另一個以 ξ 軸為彙軸的雙曲式的圓彙, 同時也把那個圓彙變為圓彙 $\rho^*=0$ 。那個圓彙可用下面的關係來決定:

$$\rho^* = \rho \text{ch } 2t + \eta \text{sh } 2t = 0,$$

即

$$(13) \quad \frac{\rho}{\eta} = -\frac{\text{sh } 2t}{\text{ch } 2t}.$$

任何以 ξ 軸為彙軸的雙曲式的圓彙, 都可用 ξ 軸和一個不與它相交的圓來決定, 所以給定了任何一個以 ξ 軸為彙軸的雙曲式的圓彙, 總可利用關係 (13) 找到一個 T_t 把它變為圓彙 $\rho=0$ 。

其次考慮 $k = -\delta(A) = -1$ 的情形。這時可取 $A = \begin{pmatrix} \text{sh } t & -\text{ch } t \\ \text{ch } t & -\text{sh } t \end{pmatrix}$ 。將拉氏反演展開為

$$(14) \quad S_t : X^* = - \begin{pmatrix} \text{sh } t & \text{ch } t \\ -\text{ch } t & -\text{sh } t \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} \text{sh } t & -\text{ch } t \\ \text{ch } t & -\text{sh } t \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\rho \text{ch } 2t - \eta \text{sh } 2t + \xi & \rho \text{sh } 2t + \eta \text{ch } 2t \\ \rho \text{sh } 2t + \eta \text{ch } 2t & -\rho \text{ch } 2t - \eta \text{sh } 2t - \xi \end{pmatrix},$$

或即

$$\rho^* = -\rho \text{ch } 2t - \eta \text{sh } 2t, \quad \xi^* = \xi, \quad \eta^* = \rho \text{sh } 2t + \eta \text{ch } 2t.$$

這些都是雙曲式的反演, 因為不變的圓 $X^* = X$ 適合條件

$$\rho(\text{ch } 2t + 1) + \eta \text{sh } 2t = 0, \quad \rho \text{sh } 2t + \eta(\text{ch } 2t - 1) = 0,$$

亦即

$$\frac{\rho}{\eta} = -\frac{\text{sh } 2t}{\text{ch } 2t + 1} = -\frac{\text{ch } 2t - 1}{\text{sh } 2t} = -\frac{\text{sh } t}{\text{ch } t},$$

所以每個不變的圓都和 ξ 軸不相交, 那就是說, 每個反演 S_t 的不變圓彙都是雙曲式的。例如, 令 $t=0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, S_0 的不變圓彙為 $\rho=0$, 由平面上一切點圓

所組成。

依照前面對於 T_i 所作的討論得知，給定了任何一個橢圓式的（或雙曲式的）圓彙，總可找到一個 S_i 把它變為圓彙 $\eta=0$ （或 $\rho=0$ ）。

3. 阿波羅尼問題

如果把已知三圓的每一個分別看作有定向的圓 P, Q, R ，阿波羅尼問題要求作出一個有定向的圓 X ，同時和它們同向相切，也就是要求對稱方陣 X ，使適合下面三條件：

$$\begin{aligned} \delta(X-P) &= (\rho - \rho_P)^2 - (\xi - \xi_P)^2 - (\eta - \eta_P)^2 = 0, \\ (15) \quad \delta(X-Q) &= (\rho - \rho_Q)^2 - (\xi - \xi_Q)^2 - (\eta - \eta_Q)^2 = 0, \\ \delta(X-R) &= (\rho - \rho_R)^2 - (\xi - \xi_R)^2 - (\eta - \eta_R)^2 = 0. \end{aligned}$$

這在理論上只須解決三個聯立的二次方程式，可是要將所求的通解用文字寫出來並不簡單。現在把問題分為三款討論如下：

(一) $\Delta_{PQR} < 0$ ， P, Q, R 所決定的圓彙是雙曲式的。取彙軸為 ξ 軸，根據上節的結果，總可找到一個拉氏反演 T_i （或 S_i ），把這個圓彙變為圓彙 $\rho=0$ ，所以可設

$$(16) \quad \rho_P = \rho_Q = \rho_R = 0.$$

這時

$$\begin{aligned} \delta_{PQ} &= -(\xi_P - \xi_Q)^2 - (\eta_P - \eta_Q)^2, \\ \delta_{QR} &= -(\xi_Q - \xi_R)^2 - (\eta_Q - \eta_R)^2, \\ \delta_{RP} &= -(\xi_R - \xi_P)^2 - (\eta_R - \eta_P)^2, \\ \delta_{PQ} \delta_{QR} \delta_{RP} &< 0. \end{aligned}$$

我們可以從方程系 (15) 中消去二次項，得到

$$(17) \quad \begin{aligned} 2(\xi_Q - \xi_P)(\xi - \xi_P) + 2(\eta_Q - \eta_P)(\eta - \eta_P) &= -\delta_{PQ}, \\ 2(\xi_R - \xi_P)(\xi - \xi_P) + 2(\eta_R - \eta_P)(\eta - \eta_P) &= -\delta_{RP}. \end{aligned}$$

只要 P, Q, R 三點不共綫（三圓不屬於同一圓列），即

$$(18) \quad \Phi = \begin{vmatrix} \xi_Q - \xi_P & \eta_Q - \eta_P \\ \xi_R - \xi_P & \eta_R - \eta_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_P & \eta_P & 1 \\ \xi_Q & \eta_Q & 1 \\ \xi_R & \eta_R & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

便可得到

$$(19) \quad \begin{aligned} \xi - \xi_p &= \frac{1}{2\Phi} \left[-(\eta_r - \eta_p)\delta_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\delta_{pr} \right], \\ \eta - \eta_p &= \frac{1}{2\Phi} \left[(\xi_r - \xi_p)\delta_{pq} - (\xi_q - \xi_p)\delta_{pr} \right]. \end{aligned}$$

代入 (15) 中第一方程, 得

$$(20) \quad \rho^2 = \frac{-\delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rp}}{4\Phi^2}.$$

因爲 $\delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rp} < 0$, 所以總有兩個不同的解 X_1 和 X_2 存在。最後按照所用的拉氏反演 T_t (或 S_t) 還原, 使得這一類的通解。

(二) $\Delta_{pqr} > 0$, P, Q, R 所決定的圓彙是橢圓式的。取彙軸爲 ξ 軸, 根據上節的結果, 總可找到一個拉氏反演 T_t (或 S_t), 把這個圓彙變爲圓彙 $\eta=0$, 所以可設

$$(21) \quad \eta_p = \eta_q = \eta_r = 0,$$

這時

$$\begin{aligned} \delta_{pq} &= (\rho_p - \rho_q)^2 - (\xi_p - \xi_q)^2, & \delta_{qr} &= (\rho_q - \rho_r)^2 - (\xi_q - \xi_r)^2, \\ \delta_{rp} &= (\rho_r - \rho_p)^2 - (\xi_r - \xi_p)^2, \end{aligned}$$

$\delta_{pq}\delta_{pr}\delta_{rp}$ 的符號是不定的, 但我們仍可從方程系 (15) 中消去二次項, 得到

$$(22) \quad \begin{aligned} 2(\rho_q - \rho_p)(\rho - \rho_p) - 2(\xi_q - \xi_p)(\xi - \xi_p) &= \delta_{pq}, \\ 2(\rho_r - \rho_p)(\rho - \rho_p) - 2(\xi_r - \xi_p)(\xi - \xi_p) &= \delta_{pr}. \end{aligned}$$

只要 P, Q, R 不屬於同一圓列, 即

$$(23) \quad \psi = \begin{vmatrix} \rho_q - \rho_p & \xi_q - \xi_p \\ \rho_r - \rho_p & \xi_r - \xi_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_p & \xi_p & 1 \\ \rho_q & \xi_q & 1 \\ \rho_r & \xi_r & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

便可得到

$$(24) \quad \begin{aligned} \rho - \rho_p &= \frac{1}{2\psi} \left[(\xi_r - \xi_p)\delta_{pq} - (\xi_q - \xi_p)\delta_{pr} \right], \\ \xi - \xi_p &= \frac{1}{2\psi} \left[-(\rho_r - \rho_p)\delta_{pq} + (\rho_q - \rho_p)\delta_{pr} \right]. \end{aligned}$$

代入 (15) 中第一方程, 得

$$(25) \quad \eta^2 = \frac{-\delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rp}}{4\psi^2}.$$

所以, 在這一欸, 只當 $\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} < 0$ 時有兩個解。當 $\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} > 0$ 時, 沒有解。 $\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} = 0$ 的情形值得仔細考察: (a) 如果 $\delta_{pq} = 0$, $\delta_{qr} \neq 0$, $\delta_{rp} \neq 0$, P 和 Q 所決定的拋物式的圓列中, 有一個圓同時也與 R 同向相切; (b) 如果 $\delta_{pq} = \delta_{qr} = 0$, $\delta_{rp} \neq 0$, 圓 Q 本身可以看作一解; (c) 如果 $\delta_{pq} = \delta_{qr} = \delta_{rp} = 0$, 三圓屬於同一拋物式的圓列。

(三) $\Delta_{pqr} = 0$, P, Q, R 所決定的圓彙是拋物式的, 這時它們已有彙軸作為公切綫, 問題比較容易解決。取彙軸為 ξ 軸, 便有

$$(26) \quad \rho_p = \eta_p, \quad \rho_q = \eta_q, \quad \rho_r = \eta_r,$$

這時

$$\delta_{pq} = -(\xi_p - \xi_q)^2, \quad \delta_{qr} = -(\xi_q - \xi_r)^2, \quad \delta_{rp} = -(\xi_r - \xi_p)^2,$$

$$\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} \leq 0.$$

方程系 (15) 化爲

$$(27) \quad \begin{aligned} \delta(X-P) &= \rho^2 - \eta^2 - 2\rho_p(\rho - \eta) - (\xi - \xi_p)^2 = 0, \\ \delta(X-Q) &= \rho^2 - \eta^2 - 2\rho_q(\rho - \eta) - (\xi - \xi_q)^2 = 0, \\ \delta(X-R) &= \rho^2 - \eta^2 - 2\rho_r(\rho - \eta) - (\xi - \xi_r)^2 = 0. \end{aligned}$$

仿上消去二次項, 得

$$(28) \quad \begin{aligned} 2(\rho_q - \rho_p)(\rho - \eta) - 2(\xi_q - \xi_p)(\xi - \xi_q) &= \delta_{pq}, \\ 2(\rho_r - \rho_p)(\rho - \eta) - 2(\xi_r - \xi_p)(\xi - \xi_p) &= \delta_{pr}. \end{aligned}$$

只要 P, Q, R 不屬於同一圓列, 由 (23), $\Psi \neq 0$, 我們得到

$$(29) \quad \rho - \eta = \frac{1}{2\Psi} (\xi_p - \xi_q)(\xi_q - \xi_r)(\xi_r - \xi_p),$$

$$\xi - \xi_p = \frac{1}{2\Psi} \left[(\rho_r - \rho_p)\delta_{pq} - (\rho_q - \rho_p)\delta_{pr} \right].$$

然後代入 (27) 中第一方程, 得

$$(30) \quad \begin{aligned} \rho - \rho_p &= \frac{1}{4\Psi} \cdot \frac{\left[(\rho_r - \rho_p)\delta_{pq} - (\rho_q - \rho_p)\delta_{pr} \right]^2 - \delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rp}}{(\xi_p - \xi_q)(\xi_q - \xi_r)(\xi_r - \xi_p)}, \\ \xi - \xi_p &= \frac{1}{4\Psi} \cdot \frac{\left[(\rho_r - \rho_p)\delta_{pq} - (\rho_q - \rho_p)\delta_{pr} \right]^2 + \delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rp}}{(\xi_p - \xi_q)(\xi_q - \xi_r)(\xi_r - \xi_p)}. \end{aligned}$$

如果 $\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} = -(\xi_p - \xi_q)^2(\xi_q - \xi_r)^2(\xi_r - \xi_p)^2 < 0$, 方程 (30) 里的分

母不能為零，本題有唯一的解。如果 $\delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} = 0$ ，解不存在，除非 $\delta_{pq} = \delta_{qr} = \delta_{rp} = 0$ 。

綜合上面三種情形，如果已知三圓不屬於同一圓列，要有同時和它們同向相切的圓存在，必要而又充分的條件為

$$(31) \quad \Omega_{pqr} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{pq} & \delta_{pr} \\ \delta_{qp} & 0 & \delta_{qr} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & 0 \end{vmatrix} = 2 \delta_{pq} \delta_{qr} \delta_{rp} \leq 0.$$

條件 $\Delta_{pqr} \leq 0$ 只是充分的，並不必要。

我們屢次把 P, Q, R 三圓同列的情形撇開。其實，如果屬於同一雙曲式的圓列，它們有兩條實的公切綫，我們不承認直綫是圓，才說問題沒有解。還有一個例外情形，即當三圓屬於同一拋物式的圓列時，全列的圓都同時和它們同向相切。

文獻中關於本題的解法，很多是假定已知三圓屬於同一雙曲式的圓列的。最近 Blaschke 在他的解析幾何書中還是這樣做^[6]。

每一個無定向的圓可以看作兩個有定向的圓，所以一般地說，阿波羅尼問題有八個解。

4. 拉格爾的球素幾何學

在推廣阿波羅尼問題之前，讓我們採用方陣坐標改寫拉氏的球素幾何學。空間一個有定向的球面，可取二級愛爾米德方陣為坐標：

$$(32) \quad Z = \begin{pmatrix} \rho + \xi & \eta + i\zeta \\ \eta - i\zeta & \rho - \xi \end{pmatrix}, \quad \bar{Z} = Z'$$

這裏 ρ 是有定向的半徑， (ξ, η, ζ) 是球心的笛卡兒坐標。點球沒有定向。無論有沒有定向的平面，都不是球面。兩個球面同向相切的條件為

$$(33) \quad \delta(Z_1 - Z_2) = (\rho_1 - \rho_2)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2 - (\eta_1 - \eta_2)^2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = 0.$$

兩個球面 P 和 Q 的綫性組合，稱為拉氏球列：

$$(34) \quad Z = P + \lambda(Q - P).$$

球列為橢圓式的，雙曲式的或拋物式的，按照

$$(35) \quad \Delta_{pq} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{pq} & 1 \\ \delta_{qp} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \delta_{pq} > 0, < 0 \text{ 或 } = 0$$

而定。列裏有一個點球（撇開簡單的例外情形不提），作為列的中心，分別落在全列各球面的內部（橢圓式的），外部（雙曲式的）或球面上（拋物式的）。

三個綫性無關的球面 P, Q, R 決定一個拉氏球彙：

$$(36) \quad Z = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P).$$

球彙為橢圓式的，雙曲式的或拋物式的，按照

$$(37) \quad \Delta_{PQR} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{PQ} & \delta_{PR} & 1 \\ \delta_{QP} & 0 & \delta_{QR} & 1 \\ \delta_{RP} & \delta_{RQ} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0, < 0 \text{ 或 } = 0$$

而定。彙裏的點球組成一條直線，這是彙的軸，分別和全彙各球面相交於兩點（橢圓式的），沒有交點（雙曲式的）或相切於一點（拋物式的）。

四個綫性無關的球面 P, Q, R, S 決定一個拉氏球叢：

$$(38) \quad Z = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P) + \nu(S - P).$$

球叢為橢圓式的，雙曲式的或拋物式的，按照

$$(39) \quad \Delta_{PQRS} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{PQ} & \delta_{PR} & \delta_{PS} & 1 \\ \delta_{QP} & 0 & \delta_{QR} & \delta_{QS} & 1 \\ \delta_{RP} & \delta_{RQ} & 0 & \delta_{RS} & 1 \\ \delta_{SP} & \delta_{SQ} & \delta_{SR} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} > 0, < 0 \text{ 或 } = 0$$

而定。叢裏的點球組成一平面，這是叢的底面，分別和全叢各球面相交於一圓（橢圓式的），沒有交點（雙曲式的）或相切於一點（拋物式的）。

拉氏球變換可表為愛爾米德方陣的一次整式變換：

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} T: Z^* &= kA'Z\bar{A} + B, \\ \text{或 } Z^* &= kA'\bar{Z}\bar{A} + B, \end{aligned} \right\} k \neq 0, \delta(A)\delta(\bar{A}) = 1, B' = \bar{B},$$

式中 k 是實數， A 和 B 是複的二級方陣， \bar{A} 表 A 的共軛方陣。這些變換不但保持兩個球面向向相切的性質不變，並也保持 $\Delta_{PQ}, \Delta_{PQR}, \Delta_{PQRS}$ 的正負號不變。

對於拉氏球叢的反演可用實的系數方陣表達出來。事實上，

$$(41) \quad T_t: Z^* = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ -\text{sh } t & -\text{ch } t \end{pmatrix} \bar{Z} \begin{pmatrix} \text{ch } t & -\text{sh } t \\ \text{sh } t & -\text{ch } t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \rho \operatorname{ch} 2t + \eta \operatorname{sh} 2t + \xi & -\rho \operatorname{sh} 2t - \eta \operatorname{ch} 2t + i \zeta \\ -\rho \operatorname{sh} 2t - \eta \operatorname{ch} 2t - i \zeta & \rho \operatorname{ch} 2t + \eta \operatorname{sh} 2t - \xi \end{pmatrix}, \\
 (42) \quad S_t: Z^* &= - \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \\ -\operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \end{pmatrix} \bar{Z} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t & -\operatorname{ch} t \\ \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\rho \operatorname{ch} 2t - \eta \operatorname{sh} 2t + \xi & \rho \operatorname{sh} 2t + \eta \operatorname{ch} 2t + i \zeta \\ \rho \operatorname{sh} 2t + \eta \operatorname{ch} 2t - i \zeta & -\rho \operatorname{ch} 2t - \eta \operatorname{sh} 2t - \xi \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

T_t 都是橢圓式的反演, S_t 都是雙曲式的反演。它們的不變球叢有公共的底面, 即 $\xi\zeta$ 平面, 由點球 $\rho=0, \eta=0$ 組成。同以這個平面為底面的球叢, 橢圓式的和橢圓式的, 雙曲式的和雙曲式的, 由於反演而兩兩配成對偶。特別是橢圓式的球叢 $\eta=0$ (由球心在 $\xi\zeta$ 平面上的球面組成) 和雙曲式的球叢 $\rho=0$ (由空間所有球點組成), 在每個 T_t 或 S_t 中各有它的對偶, 因此給定了一個以 $\xi\zeta$ 平面為底面的橢圓式的 (雙曲式的) 球叢, 我們總可找到一個拉氏反演 T_t 或 S_t , 把它變為球叢 $\eta=0$ ($\rho=0$)。

5. 阿波羅尼問題的推廣

在空間有多少個球面同時和四個已知的球面相切? 這是阿波羅尼問題最自然的推廣, 並可相應地推廣第三節的解法。給球半徑以一定的方向, 問題要求有定向的球面 Z 同時和四個有定向的已知球面 P, Q, R, S 同向相切, 也便是要求愛爾米德方陣 Z 適合下面四個條件:

$$\begin{aligned}
 (43) \quad &\delta(Z-P)=0, \delta(Z-Q)=0, \delta(Z-R)=0, \\
 &\delta(Z-S)=0.
 \end{aligned}$$

(一) 設 P, Q, R, S 所決定的拉氏球叢是雙曲式的, $\Delta_{PQR} < 0$ 。首先求出這個球叢的底面, 取它做 $\xi\zeta$ 平面。其次求出一個拉氏反演 T_t (或 S_t), 把這球叢變為球叢 $\rho=0$ 。這樣便把本問題化為求作球面通過空間四個已知點, 很容易得到兩個有定向的球面。最後用同一 T_t (或 S_t) 還原, 使得同時和 P, Q, R, S 同向相切的兩個球面。在假定 $\rho_P = \rho_Q = \rho_R = \rho_S = 0$, 仿照第三節第一款進行計算之後, 我們有

$$(44) \quad \rho^2 = \frac{-\Omega_{PQRS}}{\Phi^2 \xi \eta \zeta},$$

式中

$$\Phi_{\xi\eta\zeta} = \begin{vmatrix} \xi_p & \eta_p & \zeta_p & 1 \\ \xi_q & \eta_q & \zeta_q & 1 \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r & 1 \\ \xi_s & \eta_s & \zeta_s & 1 \end{vmatrix}, \quad \Omega_{pqrs} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{pq} & \delta_{pr} & \delta_{ps} \\ \delta_{qp} & 0 & \delta_{qr} & \delta_{qs} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & 0 & \delta_{rs} \\ \delta_{sp} & \delta_{sq} & \delta_{sr} & 0 \end{vmatrix}.$$

只要四點不共面（四球不屬於同一球彙），總有 $\Phi_{\xi\eta\zeta} \neq 0$ 。條件 $\Omega_{pqrs} < 0$ 顯然是 $\Delta_{pqrs} < 0$ 的當然結果。

(二) 設 P, Q, R, S 所決定的拉氏球叢是橢圓式的， $\Delta_{pqrs} > 0$ 。取這個球叢的底面做 $\xi\zeta$ 平面，總可找到一個拉氏反演 T_t (或 S_t)，把這個球叢變為球叢 $\eta=0$ 。這樣， P, Q, R, S 的球心都落在 $\xi\zeta$ 平面上，我們可先假定 $\eta_p = \eta_q = \eta_r = \eta_s = 0$ ，仿照第三節第二款的辦法求出 ρ, ξ, ζ ，再開方求 η ，最後用同一 T_t (或 S_t) 還原。這裏進行計算的結果，得

$$(45) \quad \eta^2 = \frac{-\Omega_{pqrs}}{4\Phi_{\xi\zeta}^2 \rho_{\xi\zeta}},$$

式中

$$\Phi_{\rho\xi\zeta} = \begin{vmatrix} \rho_p & \xi_p & \zeta_p & 1 \\ \rho_q & \xi_q & \zeta_q & 1 \\ \rho_r & \xi_r & \zeta_r & 1 \\ \rho_s & \xi_s & \zeta_s & 1 \end{vmatrix}, \quad \Omega_{pqrs} \text{ 同前。}$$

只要 P, Q, R, S 不屬於同一球叢（ $\xi\zeta$ 平面和 P, Q, R, S 相交所得的四個圓不屬於同一圓彙），總有 $\Phi_{\rho\xi\zeta} \neq 0$ 。所以當 $\Omega_{pqrs} < 0$ 時，有兩個解；當 $\Omega_{pqrs} = 0$ 時，只有一個解。

(三) 設 P, Q, R, S 所決定的拉氏球叢是拋物式的， $\Delta_{pqrs} = 0$ 。這時四球都和球叢的底面相切。取「它做 $\xi\zeta$ 平面，便有 $\rho_p = \eta_p, \rho_q = \eta_q, \rho_r = \eta_r, \rho_s = \eta_s$ ，問題的解決只用到一次方程系。但在仿照第三節第三款進行計算的結果中，又有一 $-\Omega_{pqrs}$ 的平方根作為分母而出現。所以只在 $\Omega_{pqrs} < 0$ 的條件下，本題才有一個解，且僅有一個解。

最後應加聲明，我們經常假定 P, Q, R, S 是綫性無關的四個球面。如果它們中間有綫性關係，那麼，它們屬於同一個球彙或球列，顯然沒有公共的切球面存在。唯一的例外是當六個 δ_{ij} 全部為零時，它們屬於同一拋物式的球列，和全列的球面

都是同向相切的。

綜合以上情形，現在可說，推廣後的阿波羅尼問題有解存在的必要而又充分的條件為

$$\Omega_{pqrs} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{pq} & \delta_{pr} & \delta_{ps} \\ \delta_{qp} & 0 & \delta_{qr} & \delta_{qs} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & 0 & \delta_{rs} \\ \delta_{sp} & \delta_{sq} & \delta_{sr} & 0 \end{vmatrix} \leq 0.$$

條件 $\Delta_{pqrs} \leq 0$ 只是充分的，並不必要。

一般地說，任給空間四個球面，有 16 個球面存在，每一個都是同時和它們相切的。

參 考 文 獻

- (1) J. L. Coolidge: A treatise on the circle and the sphere. 1916. 第三章和第十章。
- (2) W. Blaschke: Differentialgeometrie. Bd III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. 1929. 第四章和第六章。
- (3) 姜立夫: A matrix theory of circles and spheres. 科學記錄, I (1942—45), 257—262。
- (4) 華羅庚: Geometries of matrices. 科學記錄, 同卷, 263—267。
- (5) 華羅庚: Geometry of matrices I—II—III. Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), 441—490; 61 (1947), 193—255。
- (6) W. Blaschke: Analytische Geometrie. 1954.