歐氏空間中一對曲線它們的 Frenet 標架的相關位置是不變的

梅　向　明*

在 n 維歐氏空間 En 中一條曲線，如果它的曲率和一系列常數成比例，則稱爲 Syptak 型的 Generalized 螺旋曲線 (Generalized helix of Syptak)[1] 本文中將研究這種曲線的一個性質。

我們希望在 En 中指出有這樣一對曲線存在，我們能夠在它們上面建立點對應使對應點的 Frenet 標架的相關位置不變 (Rigidly Connected), 換言之，其中一標架的每一個向量和另一標架各向量的夾角爲定角 (Constant angle) 。

在 En 中給出一對曲線 C 和 C^*, 假定它們不是極小曲線，同時每一曲線不包含在 En 的任何子空間中，它們的方程分別是：

$$C:\qquad x^i=f^i(S),$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

$$C^*:\qquad x^i=\varphi^i(S^*).$$

其中 S 和 S^* 分別表示 C 和 C^* 的弧長。

令 $\xi^i_{(1)}$ 和 $\xi^{*i}_{(1)}$ 分別表示 C 和 C^* 的單位切向量，則

$$(1)\qquad \xi^i_{(1)}=\frac{df^i}{ds},\qquad \xi^{*i}_{(1)}=\frac{d\varphi^i}{ds^*}$$

再令 C 和 C^* 的單位法向量分別爲 $\xi^i_{(k)}$ 和 $\xi^{*i}_{(k)}$ ($k=2,3,\cdots,n$), 它們都由 Frenet 公式所確定：

〔1〕見 Y. C. wong（黃用諏）：Generalized helicesiin an ordinary Vn. Proceedings of Cambridge Philosophy Society, Vol. 37(1941), P.P.14—28.

* 本文作者，是我校數學系的畢業同學。

$$(2)\qquad \frac{d\xi^{i}_{(l)}}{ds}=-k_{l-1}\xi^{i}_{(l-1)}+k_{l}\xi^{i}_{(l+1)}$$

$$(l,k=1,2,\cdots,n;\ k_0=k_n=0,\ k^*_0=k^*_n=0)$$

$$(3)\qquad \frac{d\xi^{*i}_{(k)}}{ds^*}=-k^*_{k-1}\xi^{*i}_{(k-1)}+k^*_{k}\xi^{*i}_{(k+1)}。$$

式中 k_k 和 k^*_k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 分別表示 C 和 C^* 的曲率，它們都不等於零。

如果 C 和 C^* 之間能找到這樣的點對應

$$(4)\qquad S^*=S^*(S),$$

使對應點的 Frenet 標架的相關位置不變，則應有[2]

$$(5)\qquad \xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}=Const.\ a_{kl}\qquad (l,k=1,2,\cdots,n)$$

由於 Frenet 標架的正交性質，並且標架的每向量都是單位向量，所以常數 a_{kl} 中祇有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個是獨立的。

我們首先討論一下，如果條件(4)和(5)被滿足的話，C 和 C^* 的曲率 k_k 和 k^*_k 之間將存在什麽關係？

將(5)式的兩邊對 S 微分之，得

$$(6)\qquad \frac{ds^*}{ds}\ \frac{d\xi^{*i}_{(k)}}{ds^*}\cdot\xi^{i}_{(l)}+\xi^{*i}_{(k)}\cdot\frac{d\xi^{i}_{(l)}}{ds}=0$$

根據(2)和(3)式，又得

$$(7)\qquad ds^*\left(-k^*_{k-1}\xi^{*i}_{(k-1)}+k^*_{k}\xi^{*i}_{(k+1)}\right)\cdot\xi^{i}_{(l)}+\xi^{i}_{(k)}\cdot ds\left(-k_{l-1}\xi^{i}_{(l-1)}\right.$$

$$\left.+k_{l}\xi^{i}_{(l+1)}\right)=0$$

---

〔2〕從這兒我們把 $\sum_{i=1}^{n}\xi^{*i}_{(k)}\ \xi^{i}_{(l)}$ 簡寫成 $\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}$。

再根據(5)式，則得

$$(8)\qquad -\left(K_{k-1}^{*}ds^{*}\right)a_{k-1,\,l}+\left(K_{k}^{*}ds^{*}\right)a_{k+1,\,l}=(K_{l-1}ds)\,a_{k,\,l-1}-(K_{l}ds)\,a_{k,\,l+1}$$

從上式中挑出 $(2n-3)$ 個獨立的式子如下:

$$(9)\qquad (K_{1}^{*}ds^{*})\,a_{2l}=(K_{l-1}ds)\,a_{1,\,l-1}-(K_{l}ds)\,a_{1,\,l+1},\qquad (k=1,\ l=1,2,\cdots,n-1)$$

$$(10)\qquad -\left(K_{k-1}^{*}ds^{*}\right)a_{k-1,\,l}+\left(K_{k}^{*}ds^{*}\right)a_{k+1,\,1}=-(K_{1}ds)\,a_{k,\,2},$$

$$(l=1,\ k=2,3,\cdots,n-1)$$

假定 $a_{k,1}$ 和 a_{1l} $(k,l=2,3,\cdots n)$ 不等於零，換言之，在 C 和 C^{*} 的對應點的切向量都不垂直於另一曲線的各法向量，則我們可以解出 $K_{p}^{*}ds^{*}$ 和 $K_{p}ds$ $(p=1,2,\cdots,n-1)$ 如下:

(9) 式中當 $l=1$ 時我們有

$$(11)\qquad K_{1}ds=-\frac{a_{21}}{a_{12}}(K_{1}^{*}ds^{*})=C_{1}(K_{1}^{*}ds^{*}),\ K_{1}^{*}ds^{*}=-\frac{a_{12}}{a_{21}}(K_{1}ds)=C_{1}^{*}(K_{1}ds).$$

式中 C_{1} 和 C_{1}^{*} 表示相應的常數。

(9) 式可以改寫爲

$$a_{1,\,l+1}(K_{l}ds)=a_{1,\,l-1}(K_{l-1}ds)-a_{2l}(K_{1}^{*}ds^{*}),$$

這是一個循環方程式，從(11)式已求出 $K_{1}ds$，於是可以循環地求出 $K_{2}ds$，$K_{3}ds$，…，如下:

$$(12)\qquad K_{l}ds=\frac{K_{1}^{*}ds^{*}}{a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1,\,l+1}}\left(a_{21}\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1,\,l-1}+a_{12}\,a_{22}\,a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1,\,l-1}\right.$$
$$+\cdots+a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1r}\,a_{2r}\cdots a_{1,\,l-1}+\cdots+a_{12}\,a_{13}\cdots a_{1,\,l-1}\,a_{2,\,l-1}\,a_{1,\,l-1}+a_{12}$$
$$\left.a_{13}\cdots a_{1l}\,a_{2l}\right)=C_{l}(K_{1}^{*}ds^{*})$$

其中 C_{l} 代表相應的常數。

同樣地，從(10)式中能環地解出 $K_{k}^{*}ds^{*}$，注意(10)式和(9)式的差別祇是 a_{k}^{l} 的上下指標相反，因此很容易從(12)式推出(10)式的解:

$$(13)\qquad K_{k}^{*}ds^{*}=\frac{K_{1}ds}{a_{21}\,a_{31}\cdots a_{k+1,\,1}}\left(a_{12}\,a_{11}\,a_{21}\,a_{31}\cdots a_{k-1,\,1}+a_{21}\,a_{22}\,a_{21}\,a_{31}\cdots\right.$$

$$a_{k-1,1}+\cdots+a_{21}a_{31}\cdots a_{r1}a_{r2}a_{r1}\cdots a_{k-1,1}+\cdots a_{21}a_{31}\cdots a_{k-1,1}a_{k-1,2}$$

$$a_{k-1,1}+a_{21}a_{31}\cdots a_{k1}a_{k2})=C_k^*(K_1ds).$$

其中 C_k^* 代表相應的常數。

根據(11)，(12)和(13)，可知

$$K_1:K_2:\cdots:K_{n-1}=C_1:C_2:\cdots:C_{n-1},$$

$$K_1^*:K_2^*:\cdots:K_{n-1}^*=C_1^*\ C_2^*:\cdots:C_{n-1}^*.$$

這說明 C 和 C^* 都是 Syptak 型的 Generalized 螺旋曲線。於是則下定理:

定理 1: E_n 中兩條曲線 C 和 C^*，它們不是極小曲線，並且都不包含於 E_n 的任何子空間中，如果它們之間存在這樣的點對應使對應點的 Frenet 標架的相關位置不變，並且每曲線在對應點的切線不垂直於另一曲線的各法線，則 C 和 C^* 必須是 Syptak 型的 Generalized 螺旋曲線。

如果 C 和 C^* 重合，則導出下面的推論:

推論: E_n 中一曲線 C，它不是極小曲線，也不包含在 E_n 的任何子空間中，如果在它上面能找出這樣的點對應，使對應點的 Frenet 標架的相關位置不變，且對應點的切線不垂直於他一對應點的各法線，則 C 必須是 Syptak 型的Generalized 螺旋曲線。

反過來，給出 E_n 中兩條 Syptak 型的 Generalized 螺旋曲線 C 和 C^*，它們的曲率 K_k 和 K_k^* 分別適合下列等式:

(14)　$K_1:K_2:\cdots:K_{n-1}=C_1:C_2:\cdots:C_{n-1},$

(15)　$K_1^*:K_2^*:\cdots:K_{n-1}^*=C_1^*:C_2^*:\cdots:C_{n-1}^*.$

其中 C_k 和 C_k^* 是已知常數。在 C 和 C^* 上分別給出一對對應定點 P_0 和 P_0^*，它們的對應參數值分別為 S_0 和 S_0^* 點的 Frenet 標架的各向量分別表為

$$\underset{o}{\xi}{}^{i}_{(k)} \text{ 和 } \underset{o}{\xi}{}^{*i}_{(k)} \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

我們考察下面的微分方程

(16) $K^{*}_{1}\, ds^{*} = k\, K_1 ds$

其中 k 是待定常數。給出一對對應點 $(P_o\,,\,P^{*}_{o})$ 這微分方程唯一決定 C 和 C^{*} 間的一對應關係

(17) $S^{*} = S^{*}(s)$

其中函數 $S^{*}(s)$ 當 $S=S_o$ 時的值爲 S^{*}_{o} (即 $S^{*}_{o} = S^{*}(s_o)$)。

現在我們要適當地選擇常數 k，使在對應關係(17)下，C 和 C_{*} 的 Frenet 標架的相關位置不變，換言之，$\xi^{*i}_{(k)} \cdot \xi^{i}_{(l)} = Const.$

將 $\xi^{*i}_{(k)} \cdot \xi^{i}_{(l)}$ 對 S 微分之，根據 Frenet 公式(2),(3)和(14),(15)易知

$$\frac{d}{ds}\left(\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}\right) = \frac{k^{*}_{1}\, ds^{*}}{k_1\, ds}\left(-C^{*}_{k-1}\,\xi^{*i}_{(k-1)}\cdot\xi^{i}_{(l)} + C^{*}_{k}\,\xi^{*i}_{(k+1)}\cdot\xi^{i}_{(l)}\right) +$$

$$+\left(-C_{l-1}\,\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l-1)} + C_{l}\,\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l-1)}\right).$$

根據(16)式，上式又可寫成

$$\frac{d}{ds}\left(\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}\right) = k\left(-C^{*}_{k-1}\quad\xi^{*i}_{(k-1)}\cdot\xi^{i}_{(o)} + C^{*}_{k}\quad\xi^{*i}_{(k+1)}\,\xi^{i}_{(l)}\right)$$

$$+\left(-C_{l-1}\,\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l-)} + C_{l}\,\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l+1)}\right)$$

因此，$\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)} = \text{const.}$ 的充分和必要條件就是

$$\left(-K\,C^{*}_{k-1}\right)\left(\xi^{*i}_{(k-1)}\cdot\xi^{i}_{(l)}\right) + \left(K\;C^{*}_{k}\right)\left(\xi^{*i}_{(k+1)}\cdot\xi^{i}_{(l)}\right) + \left(-C_{l-1}\right)$$

$$\left(\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l-1)}\right)+\left(C_l\right)\left(\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l+1)}\right)=0.$$

這是以 $\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}$ 爲未知數的線性齊次方程組，要從它解出 $\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}$ 必須使係數行列式爲零，這是待定常數 k 的 n^2 次方程，這兒，我們不詳列出它的形式，而祇用下式來表示：

(18)　　$D(k)=0.$

對於方程(18)的每一實根 k，給出一對應關係

$$K_1^*\,ds^*=k\,K_1 ds$$

或　　$S^*=S^*(S)$ ，（但 $S_0^*=S^*(S_0)$）

在這對應關係下，

$$\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}=\text{const}$$

但是 P_0 和 P_0^* 是一對對應點，所以有

$$\xi^{*i}_{(k)}\cdot\xi^{i}_{(l)}=\xi^{*i}_{0(k)}\cdot\xi^{i}_{0(l)}.$$

於是得下定理：

定理 2. E_n 中給出兩條 Srptak 型的 Generalized 螺旋曲線 C 和 C^*，在 C 和 C^* 上分別給出一對對應定點 P_0 和 P^*_0，則我們能在 C 和 C^* 的點之間最多找出 n^2 個對應關係，使對應點的 Frenet 標架的相關位置相同於 P_0 和 P^*_0 點的 Frenet 標架的相關位置。

推論：E_n 中給一出條 Srptak 型的 Generalized 螺旋曲線 C，在 C 上給出一對對應定點 P_0 和 P^*_0，我們能在 C 的點之間最多找出 n^2 個對應關係使對應點的 Frenet 標架的相關位置相同於 P_0 和 P^*_0 點的 Frenet 標架的相關位置。

---

* 梅同志在這論文的結果僅根據所假設得來沒有指出假設的現實性。在 $n=3$ 時問題已非簡單還可解決，梅同志對於所得的方程組沒有詳細分析；但，我們對梅同志提出論文認爲可以引起對 n 維幾何研究者進一步的探討——數學系編輯負責人。