关於保角映射理論中的恒等式及其应用

謝 暉 春

（數 理 系）

1. 应用圍道積分法，Garabedian 和 Schiffer 在其論文[1]中建立了，將有限連通区域映照於某种典型区域的函数之間种种關系式。本文应用类似的方法，導出一些新的關系式以解答 Голузин 在其書中所提出的問題[1]，並且給出了映照 n 連通区域为具有割綫的圓域以及映照 n 連通区域为 n 叶圓片等函数的表示式。

为了以後在叙述上方便起見，引进如下的記號和一些熟知的結果：按照 Голузин 的記法[2]，我們用 $\zeta=j_\theta(z,a)$ 表示这樣的映照函数，它把 z 平面上的 n 連通的区域 B 单叶地映照於具有 n 根割綫的平面，这 n 根割綫对於实軸都成傾斜角 θ；點 $z=a\ (a\in B)$ 对应於 $\zeta=\infty$，並且在 $z=a$ 的環境成立着展开式

$$\frac{1}{z-a}+\alpha_1(z-a)+\cdots\cdots \qquad (a\neq\infty),$$

或 $$z+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots\cdots(a=\infty)$$

同样，我們用 $\zeta=j_\theta(z,a,b)$ 表示这樣的的映照函数，它把 z 平面上 n 連通区域 B 单叶地映照於具有 n 根傾斜角为 θ 的对数螺旋割綫的平面；同时它把 B 中的兩個定點 a,b 變到 ζ 平面的點 o,∞，并且在 $z=b$ 的環境中，成立着展开式

$$\frac{1}{z-b}+\alpha_0+\alpha_1(z-b)+\cdots\cdots(b\neq\infty),$$

或 $$z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots\cdots(b=\infty)。$$

1）見〔2〕第 244 頁註脚。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

为了使建立的關系式更对称起見，用 Голузин 的記法[1]，記

$$P(z,a)=\frac{1}{2}\left(j_{\frac{\pi}{2}}(z,a)-j_0(z_1,a)\right),$$

$$Q(z,a)=\frac{1}{2}\left(j_{\frac{\pi}{2}}(z,a)+j_0(z,a)\right);$$

$$P(z,a,b)=\frac{1}{2}\left(\log j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)-\log j_0(z,a,b)\right),$$

$$Q(z,a,b)=\frac{1}{2}\left(\log j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)+\log j_0(z,a,b)\right)。$$

設 B 是由解析閉曲綫 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_n$ 所圍成的区域，於 B 中固定一點 a，則在 k_v（$v=1,2,\cdots\cdots,n$）上，$\zeta\in K_v$

$$P(\zeta,a)=-\overline{Q(\zeta,a)}+\overline{k_v(a)},$$

与于B中固定兩点 a,b，則在 K_v（$y=1,2,\cdots\cdots,n$）上，$\zeta\in K_v$

$$P(\zeta,a,b)=-\overline{Q(\zeta,a,b)}+\overline{k_v(a,b)}。$$

此地的 $k_v(a)$與 $k_v(a,b)$无關於 K_v 上的點 ζ [1]。

2. 利用 Garabedian 和 Schiffer 已得的恒等式，我們求出在 B 是单連通区域时之映照函数表示式：

I. 如果 B 是圓域 $|z|>1$，那末典型映照函数

$$j_\theta(z,a)=\frac{1}{z-a}+\frac{e^{i2\theta}}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad (1)$$

特别地

$$j_0(z,a)=\frac{1}{z-a}+\frac{1}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad (1)'$$

$$j_{\frac{\pi}{2}}(z,a)=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \qquad (1)''$$

與

$$j_\theta(z,a,b)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}\cdot\left(\frac{1-|b|^2}{1-a\bar{b}}\cdot\frac{1-\bar{a}z}{1-\bar{b}z}\right)^{e^{i2\theta}} \qquad (2)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

特别地

$$j_0(z, a, b)=\frac{1-|b|^2}{(b-a)(1-\bar{a}b)}\cdot\frac{(z-a)(1-\bar{a}z)}{(z-b)(1-\bar{b}z)}, \qquad (2)'$$

$$j_{\frac{\pi}{2}}(z, a, b)=\frac{1-\bar{a}b}{(b-a)(1-\bar{a}b)}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot\frac{1-\bar{b}z}{z-b} \qquad (2)''$$

其中 $a, b\in B$, $a, b\neq\infty$; $0\leqslant\theta<2\pi$.

事实上，函数 $j_\theta(\zeta, \infty)=\zeta+\frac{e^{i2\theta}}{\zeta}$ 就是把圓域 $|\zeta|>1$ 映射为具有割綫的平面，割綫與实軸的交角为 θ，利用熟知的綫性分式 $L(z)=\frac{\bar{a}z-1}{z-a}$，它把圓域 $|z|>1$ 變为本身（$L(a)=\infty$, $L'(a)>0$）。所以函数

$$j_\theta(L(z), \infty)=\frac{|a|^2-1}{z-a}+\bar{a}+e^{i2\theta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1},$$

在就范化（即使其在 $z=a$ 的殘数为 1，并使其在 $z=a$ 環境的 Laurent 級数展开式中，不含有常数項）后，就得到所求的函数

$$j_\theta(z, a)=\frac{1}{z-a}+\frac{e^{i2\theta}}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

現在我們轉到表達式(2)，利用恒等式[1]

$$\frac{d}{dz}p(z, a, b)=\overline{p(b,z)}-\overline{p(a,z)},$$

與

$$\frac{d}{dz}Q(z, a, b)=Q(b, z)-Q(a, z)$$

來証明表達式 (2)′ 和 (2)″。顯然，从表達式 (1)′ 和 (1)″。我們得到

$$\overline{P(b, z)}=-\frac{\bar{b}-\bar{z}}{(1-|z|^2)(1-z\bar{b})}=-\frac{z\bar{b}-z\bar{z}}{z(1-|z|^2)(1-z\bar{b})}=$$

$$=-\frac{z\bar{b}-1+(1-|z|^2)(1-z\bar{b}+z\bar{b})}{z(1-|z|^2)(1-z\bar{b})}=$$

$$=\frac{1}{z(1-|z|^2)}-\frac{1}{z}-\frac{\bar{b}}{1-z\bar{b}},$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

同样

$$\overline{P(a, z)} = -\frac{\bar{a}-\bar{z}}{(1-|z|^2)(1-z\bar{a})} =$$

$$= \frac{1}{z(1-|z|^2)} - \frac{1}{z} - \frac{\bar{a}}{1-z\bar{a}} ;$$

从而

$$\frac{d}{dz}P(z, a, b) = \frac{a}{1-az} - \frac{}{1-bz} ,$$

$$\frac{d}{dz}Q(z, a, b) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} 。$$

由于它們在圓域 $|z|>1$ 中，都是单值解析的，所以積分之得

$$P(z, a, b) = \log A\frac{1-\bar{b}z}{1-\bar{a}z} ,$$

$$Q(z, a, b) = \log B\frac{z-a}{z-b} ,$$

其中 A，B 是兩個常数，从 $P(za, b)$ 和 $Q(z, a, b)$ 的定义，我們有

$$j_0(z, a, b) = \frac{B}{A} \cdot \frac{(z-a)(1-\bar{a}z)}{(z-b)(1-\bar{b}z)} ,$$

$$j_{\frac{\pi}{2}}(z, a, b) = AB \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{1-\bar{b}z}{z-b}$$

从 $j_0(z,a,b)$ 和 $j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)$ 在 $z=b$ 環境的 Laurent 級数展开式的就範化（即使其在 $z=b$ 时的殘数为 1 ）要求，我們得到

$$A = \pm\frac{1-\bar{a}b}{1-|b|^2} , \quad B = \pm\frac{1}{b-a} 。$$

从而

$$j_0(z,a,b) = \frac{1-|b|^2}{(b-a)(1-ab)} \cdot \frac{(z-a)(1-az)}{(z-b)(1-\bar{b}z)} 。$$

$$j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b) = \frac{1-\bar{a}b}{(b-a)(1-|b|^2)} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{1-\bar{b}z}{z-b} ,$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

此地 $j_0(z,a,b)$ 與 $j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)$ 的幾何意义是很明顯的。因为，由二次有理分式函数的幾何性質[3]，函数 $j_0(z,a,b)$ 和 $j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)$ 分別地把圓周 $|z|=1$ 映照为，其延長線通過原點的射綫，和以原點为中心的圓弧。

再利用關系式[2]

$$\log j_\theta(z,a,b)=e^{i\theta}\left(\cos\theta\log j_0(z,a,b)-i\sin\theta\log j_{\frac{\pi}{2}}(z,ab)\right),$$

并且經过簡單的計算，卽得

$$j_\theta(z,a,b)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}\cdot\left(\frac{1-|b|^2}{1-\bar{a}b}\cdot\frac{1-\bar{a}z}{1-\bar{b}z}\right)e^{i2\theta}$$

用同样的方法，我們可以得到 $b=\infty$ 时的映照函数 $(a\neq\infty)$[1)]

$$j_\theta(z,a,\infty)=(z-a)\left(1-\frac{e^{i2\alpha}}{z}\right)e^{i2\theta}, \qquad (3)$$

特別地

$$j_0(z,a,\infty)=(z-a)\left(1-\frac{e^{i2\alpha}}{z}\right), \qquad (3)'$$

$$j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,\infty)=(z-a)\left(1-\frac{1}{1-e^{-i2\alpha}z}\right), \qquad (3)''$$

其中 $\alpha=\arg a$.

注意 表達式(3)并不包含在(2)中。

II. 如果 B 是多於一個境界點的单連通区域，$f(z)$ 单叶映照 B 为圓域 $|\zeta|>1$，並且 $f'(a)>0$, $a\in B$. 从上面所得的結果，我們立卽获得，把区域 B 单叶映照为上述典型区域的映照函数。例如函数 $f(z)=e^{-i\gamma}\frac{(\bar{\alpha}-1)e^{z}-(\bar{\alpha}+1)i}{(1-\alpha)e^{z}-(\alpha+1)i}$ 单叶地映

---

1) 應用 Г. М. Гоузлин 的書“单葉函數論中的一些問題”（有陳建功教授的中譯本）第三章，§17 定理2. 令 $n=1, \gamma_1=1$，$\zeta_1=a$ 與 $\gamma_1=1-$，$\zeta_1=a$ 卽可求得 $j_0(z,a,\infty)$ 和 $j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,\infty)$：从而通過綫性分式 $L(z)=\frac{\bar{b}z-1}{z-b}$ 的變換，和就范化后，亦可獲得映照函數 $j_0(z,a,b)$ 和 $j_{\frac{\pi}{2}}(z,a,b)$，這時 $b\neq\infty$。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

照带域 B: $0<I(z)<\pi$ 於 W 平面的圓域 $|W|>1$。其中 $|\alpha|<1$，並且 $f'(a)>0(|a|<1)$，$\gamma=\frac{\pi}{2}+\arg\frac{e^a}{[(1-\alpha)e^a-(1+i)\alpha]^2}$。通过一番初等的計算，我們卽得典型映照函数

$$j\theta(z,a)=\frac{e^a}{(1-\alpha)e^a-(1+\alpha)i}\times\frac{(1-\alpha)e^z-(\alpha+1)i}{e^z-e^a}-$$

$$-\frac{1}{2}R\left(e^{(1+i)a}\right)e^{i(2\theta-I(a))}\times\frac{e^z-e^a}{I(\alpha)e^z+iI\left((1-\bar{\alpha})(1+\alpha)e^a\right)}-$$

$$-e^{\gamma i}\times\frac{e^a+\frac{1+\alpha}{1-\alpha}i}{e^a-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}i}。$$

3. Голузин 的問題是要找出函数 $P(z,a)$ 和 $\theta(z,a)$ 之間的解析關系。他指出卽使在 B 是圓域 $|z|>1$ 的最簡单情形，这时易知

$$P(z,a)=-\frac{1}{1-|a|^2}\quad\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\quad,\quad Q(z,a)=\frac{1}{a-z}\quad。^{1)}$$

要得到 $P(z,a)$ 與 $Q(z,a)$ 之間的解析關系，就不是容易的了。

作者建立了这样的積分式

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_K P(\zeta,a)\,Q(\zeta,a)\,P'_\zeta(\zeta,z)\,d\zeta,$$

通过它，我們証明了如下的定理：

定理 I 設 B 是以閉解析的若當曲綫 $K_1,K_2,\cdots,K_n\left(K=\sum_{v=1}^{n}K_v\right)$ 为境界的任一 n 連通区域，在其上的函数 $P(z,a)$ 與 $Q(z,a)$ 成立着如下的關系

$$\frac{d}{dz}\left(P(z,a)Q(z,a)\right)=\frac{d}{dz}\left(P(z,a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)\right),\qquad(4)$$

1) 原書誤为

$$P(z,a)=\frac{1}{1-|a|^2}\,,\quad\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\,,\quad Q(z,a)=\frac{1}{1-|a|^2}\cdot\frac{1-\bar{a}z}{z-a}。$$

这从本文第2節的結果卽可知道。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

及
$$Q(z,a)=\frac{P'_z(a,a)}{P(z,a)}+\sum_{v=1}^{n}k_v(a) \tag{5}$$

或
$$\frac{P(z,a)}{P'_z(a,a)}=\frac{1}{Q(z,a)-\sum\limits_{v=1}^{n}k_v(a)}。 \tag{5'}$$

証明　事实上，利用兩种方法計算積分 I_1 的值，卽可获得所要的結果。因为函数 $P'_\zeta(\zeta,z)$與 $P(\zeta,a)Q(\zeta,a)$ 在区域 B 中是单値解析的，如果我們規定函数 $P(\zeta,a)Q(\zeta,a)$ 在 $\zeta=a$ 的値为

$$P(a,a)Q(a,a)=\lim_{\zeta\to a}P(\zeta,a)Q(\zeta,a)=P'_\zeta(a,a)。$$

所以 $I_1=0$。另一方面，注意到在 K_v $(v=1,2,\cdots,n)$ 上

$$P(\zeta,a)=-\overline{Q(\zeta,a)}+\overline{k_v(a)},$$

我們得到

$$I_1=\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_v}\left(-\overline{Q(\zeta,a)}+\overline{k_v(a)}\right)\left(-\overline{P(\zeta,a)}+\overline{k_v(a)}\right)$$

$$d\left(-\overline{Q(\zeta,z)}+\overline{k_v(z)}\right)=$$

$$=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{K}Q(\zeta,a)P(\zeta,a)Q'_\zeta(\zeta,z)\,d\zeta}-$$

$$-\sum_{v=1}^{n}\overline{\frac{k_v(a)}{2\pi i}\int_{k_v}P(\zeta,a)Q'_\zeta(\zeta,z)\,d\zeta}-$$

$$-\sum_{v=1}^{n}\overline{\frac{k_v(a)}{2\pi i}\int_{K_v}Q(\zeta,a)Q'_\zeta(\zeta,z)\,d\zeta}+\sum_{v=1}^{n}\overline{\frac{|k_v(a)|^2}{2\pi i}\int_{K_v}Q'_\zeta(\zeta,z)\,d\zeta}$$

$$=-\overline{\left(P(z,a)Q'_\zeta(z,a)+P'_\zeta(z,a)Q(z,a)\right)}$$

$$+\overline{P'_\zeta(z,a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)}+\overline{\left(Q'_\zeta(a,z)-Q'_\zeta(z,a)\right)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)}\,.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

应用 $Q'_\zeta(z, a) = Q'_\zeta(a, z)$[1]于上式，我們得到

$$-\Big(P(z,a)Q'_\zeta(z,a)+P'_\zeta(z,a)Q(z,a)\Big)+P'_\zeta(z,a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)=0 ,$$

即得式(6)

$$\frac{d}{dz}\Big(P(z, a)Q(z, a)\Big)=\frac{d}{dz}\Big(P(z, a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)\Big) .$$

再則，由于函数 $\frac{d}{dz}\Big(P(z, a)Q(z, a)\Big)$ 與 $\frac{d}{dz}P(z, a)$ 在区域中是单值解析的，積分之得

$$P(z, a)Q(z, a)=P(z, a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)+C(a), \qquad (6)$$

其中 $C(a)$ 與 B 中的 z 無關。

为了確定 $C(a)$ 的值，我們令 $z\to a$，从而式(6)變为

$$P'_\zeta(a, a)=C(a) .$$

所以式(6)为

$$P(z, a)Q(z, a)=P(z,a)\sum_{v=1}^{n}k_v(a)+P'_\zeta(a, a)$$

即
$$Q(z, a)=\frac{P'_\zeta(a, a)}{P(z, a)}+\sum_{v=1}^{n}k_v(a) .$$

从 $P(z, a)$ 的性質可知 $P'_\zeta(a, a)\neq 0$，因此

$$\frac{P(z, a)}{P'_\zeta(a, a)}=\frac{1}{Q(z, a)-\sum_{v=1}^{n}k_v(a)} . \qquad (5)'$$

注意　公式(5)的好處在于它給出了有限連区域 B 上，函数 $P(z, a)$ 與 $Q(z, a)(z, a\in B)$ 之間的簡明關系。作为例子，設當 $n=1$，B 为圓域 $|z|>1$ 时，易知

$$P(z, a)=-\frac{1}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad P'_\zeta(a, a)=-\frac{1}{(1-|a^2|)^2} ,$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

及

$$k(a)=\frac{\bar{a}}{1-|a|^2}\quad\cdot$$

將它們代入公式（5），卽得

$$Q(z,\ a)=-\frac{1}{(1|a|^2)^2}\Big/-\frac{1}{1-|a|^2}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}+\frac{\bar{a}}{1-|a|^2}=\frac{1}{z-a}$$

这與我們已知的完全一致。

从上面所証得的結果，容易推出，在 n 連通区域 B 中，函数 $P(z,a,b)$ 與 $Q(z,a,b)$ 之間的解析關系

$$\frac{d}{dz}Q(z,\ a,\ b)=\frac{\overline{P'_{\zeta}(z,\ z)}}{\overline{P(b,\ z)P(z,\ a,)}}\cdot\overline{\frac{d}{dz}P(z,\ a,\ b)}\qquad(7)$$

或

$$\frac{d}{dz}P(z,\ a,\ b)=\overline{\left(\frac{P(b,\ z)P(a,\ z)}{P'_{\zeta}(z,\ z)}\cdot\frac{d}{dz}Q(z,\ a,\ b)\right)}\qquad(7)'$$

其中 $a,\ b\in B,\ a,\ b\neq\infty\cdot$

事实上，应用公式（5）和公式[1]

$$\frac{d}{dz}P(z,\ a,\ b)=\overline{P(a,\ z)}-\overline{P(b,\ z)}\quad,$$

$$\frac{d}{dz}Q(z,\ a,\ b)=Q(b,\ z)-Q(a,\ z)\quad,$$

通过簡单的計算，卽得公式（7）。

4．在本節里我們証明兩种半純函数的解析表示式：

定理 II 如果半純函数 $f(z)$ 把以解析的閉若當曲綫 $K_1,K_2,\cdots,K_n\left(K=\sum_{v=1}^{n}K_v\right)$ 为境界的 n 連通区域 B，单叶地映照于有割綫的圓域 $|w|>1$，其中圓周 $|w|=1$ 对应于曲綫 K_1，割綫是以原點为中心的同心圓弧，并且 $f(z)$ 在 B 中有唯一的单極點 a，在境界曲綫 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 上是解析的，那末函数

$$f(z)=e^{-\int k_1(z)dz+\int\left(Q(a,\ z)+\overline{P(a,\ z)}\right)dz}\quad,\qquad(8)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

証明 我們給出積分

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_K P(\zeta,z)\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta \quad ,$$

注意到，當 $\zeta\in K_v$ ($v=1, 2, \cdots, n$) 时，我們有

$$\log f(\zeta)=-\overline{\log f(\zeta)}+\text{常数},$$

及

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_v}\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta=\begin{cases}-1, & v=1,\\ 0, & v=2, 3, \cdots, n。\end{cases}$$

利用两种不同的方法，計算積分 I_2 的值，即可得到所要的結果。因为 $P(\zeta,z)$ 在区域 B 上是解析的，函数 $\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta$ 在区域 B 中，除去點 $\zeta=a$ 为一次極外，是解析的。所以

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_K P(\zeta,z)\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta=-P(a,z)。\tag{9}$$

另一方面，应用在 B 的境界 K_v ($v=1,2,\cdots\cdots,n$) 上

$$P(\zeta,z)=-\overline{Q(\zeta,z)}+\overline{k_v(z)},$$

我們得到

$$I_2=\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_v}\left(-\overline{Q(\zeta,z)}+\overline{k_v(z)}\right)d\left(-\overline{\log f(\zeta)}+\text{常数}\right)=$$

$$=-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_K Q(\zeta,z)\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta}+\overline{\sum_{v=1}^{n}\frac{k_v(z)}{2\pi i}\int_{K_v}\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta}=$$

$$=-\overline{\left(\left(\log f(z)\right)'_z-Q(a,z)\right)}-\overline{k_1(\zeta)}\tag{10}$$

从式(9)與(10)，經過簡单的計算得表示式(8)。

定理 III 如果半純函数 $f(z)$ 把以解析的閉若當曲綫 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 为境界的 n 連通区域 B，映照於 n 叶的圓域 $|w|>1$，$f(z)$ 在区域 B 中有極點 $a_1, a_2,\cdots\cdots, a_N$ ($N\leqslant n$)，其級依次为 $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_N$ ($n_1+n_2+\cdots\cdots+n_N=n$)，并且函数

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$f(z)$在境界K_v($v=1,2,\cdots\cdots,n$)上是解析的，那末函数

$$f(z)=e^{-\sum\limits_{v=1}^{n}\int k_v(z)dz+\sum\limits_{v=1}^{n}n_v\int\left(Q(a_v,v)+\overline{P(a_v,v)}\right)dz}, \quad (11)$$

證明　與定理I的証明一样，我們給出積分

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_K P(\zeta,z)\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta d\zeta,$$

并且注意到，在区域B中$P(\zeta,z)$與$\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta$是解析的，函数$\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta$在點$\zeta=a_v$($v=1.2,\cdots\cdots,N$)除外，以及$f(\zeta)$在$Kv$($v=1.2,\cdots\cdots,n$)上

$$\log f(\zeta)=-\overline{\log f(\zeta)}+\text{常数},$$

與

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_v}\left(\log f(\zeta)\right)'_\zeta\, \alpha\zeta=-1 \qquad (v=1,2,\cdots,n)。$$

应用殘数的理論，用兩种方法計算積分I_3,，卽得表示式(11)。

注意　當$n=1$时，定理II與定理III是一致的。这兩個定理的重要地方，在於它們給出了上述兩种类型的单純函数$f(z)$的表示式——經过典型函数$j_0(a,z)$與$j_{\frac{\pi}{2}}(a,z)$以及它們所定义的函数$k_v(z)$($v=1,2,\cdots,n$)來表示。

例子，我們考慮$n=1$，B为圓域$|z|>1$时的情形。这时，假設函数$f(z)$把区域B单叶地映照於本身，點a，$a\in B$，是$f(z)$的单極點，那末从定理II或定理III，及第2節里所得的函数

$$P(a,z)=-\frac{1}{1-|z|^2}\cdot\frac{a-z}{1-\bar{z}a},\quad Q(a,z)=\frac{1}{a-z}$$

與$k_1(z)=\frac{\bar{z}}{1-|z|^2}$，我們，我們应用$f(z)$的表示式(8)，得到

$$f(z)=e^{-\int k_1(z)dz+\int\left(Q(a,z)+\overline{P(a,z)}\right)dz}=$$

$$=e^{\int\left(-\frac{\bar{z}}{1-|z|^2}+\frac{1}{a-z}+\frac{1}{z(1-|z|^2)}-\frac{1}{z}-\frac{\bar{a}}{1-z\bar{a}}\right)dz}=$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= e^{\int \left(-\frac{1}{z-a} - \frac{\bar{a}}{1-\bar{a}z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\right) dz} =$$

$$= e^{\log \frac{1}{z-a} + \log (1-a\bar{z}) + \log A} =$$

$$= A \cdot \frac{1-\bar{a}z}{z-a}。$$

此地 A 是一個常数，如果我們給出 $f(z)$ 的就範條件，那末 A 可以確定。就是說，$f(z)$ 是唯一的。这個結果與我們通常所熟知的綫性分式變換理論中，把圓變为本身的結論一致。

本文系在中山大学刘俊賢教授指導和鼓勵下完成的，謹此致謝。

参 考 文 獻

1. Garabedian, P. R.and Schiffer, M. Identities in the theory of Confovmal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949) 187—238。

2. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменото （有陳建功教授的中譯本）(1952). стр., 233－242.

3. 刘俊賢，范遠 二次有理分式函數的单业性，中山大學學报（自然科學版）1 (1956)。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

ON THE IDENTITIES IN THE THEORY OF CONFORMAL MAPPING

Shieh Hui-chun

ABSTRACT

Let B be a domain of connectivity n bounded by n closed analytic curves $K_1, K_2, \cdots\cdots K_n$. Let $j_0(z, a)$ and $j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)$ be two functions which are both univalent and regular in B except for a simple pole at $z=a$ with rasidue 1; $j_0(z, a)$ maps B upon the complex plane slit along rectilinear segments parallel to the real axis, while $j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)$ maps B upon the complex plane slit along rectilinear segments parallel to the imaginary axis.

Put
$$P(z, a)=\tfrac{1}{2}[j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)-j_0(z, a)]$$
$$Q(z, a)=\tfrac{1}{2}[j_{\frac{\pi}{2}}(z, a)-j_0(z, a)]$$

It is known that foh $z a$ K_v, $v=1, 2, \cdots\cdots n$,

$$\overline{P(z, a)}+Q(z, a)=k_v(a)$$

$\overline{P(z, a)}$ being conjugate of $P(z, a)$, $k_v(a)$ independent of z.

By the method of countor integration the author obtains the following results:

I. $$\frac{d}{dz}[P(z, a)\, Q(z, a)]=\frac{d}{dz}[P(z, a)\sum_{v=1}^{n} k_v(a)]$$

$$Q(z, a)=\frac{P_z'(z, a)}{P(z, a)}+\sum_{v=1}^{n} k_v(a)$$

II. If $f(z)$ maps B upon the outer circle $|w|>1$ slit along circullar arcs having the origin for center, and is alalytic on the boundary curves $K_1, K_2, \cdots\cdots K_n$, with $|w|=1$ corresponding to K_1, we have

$$f(z)=e^{-\int k_1(z)dz+\int [Q(a, z)+\overline{P(az)}]dz}$$

III. If $f(z)$ maps B upon n sheets of the outer circle $|w|>1$ and has in B $a_1, a_2, \cdots\cdots a_N$ $(N\leqslant n)$ for poles of order $n_1, n_2, \cdots\cdots n_N$ $(n_1+n_2+\cdots n_N=n)$; and if $f(z)$ is analytic also on the boundary curves, then we have

$$f(z)=e^{-\sum_{v=1}^{n}\int k_v(z)dz+\sum_{v=1}^{N} n_v\int [Q(a_v, z)+\overline{P(a_v, z)}]dz}.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net