二次有理分式函數的單葉性

劉俊賢　范　達

(數學系)

大家知道在單位圓內單葉全純的函數族

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

是否以$\dfrac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}$爲大值函數是一問題，換言之是否一般的$|a_n|\leqslant n$? 在$f(z)$的係數$a_n$全是實數或$f(z)$表一星形函數族時這問題已有了肯定的答案$|a_n|\leqslant n$[1]。現在我們攷察二次有理分式函數作爲對於這個問題研究的開始，指出二次有理分式函數在它的最大單葉全純圓內的展開式也得$|a_n|\leqslant\dfrac{n}{R^{n-1}}$，其中$R$表單葉全純半徑。

I. $f(z)$的單葉半徑

設有二次有理分式函數$w=f(z)=\dfrac{az^2+bz+c}{a'z^2+b'z+c'}$。我們稱$z$、$z'$爲一雙同値點如果$z\neq z'$而$f(z)=f(z')$，一雙同値點各畫的兩個曲綫弧稱爲一雙同値弧，一雙同値點所各組成的兩個區域稱爲一雙同値區域、平面上一雙同値點z、z'是在下二次方程式的兩個根：

$$(a-wa')z^2+(b-wb')z+(c-wc')=0。$$

如$a-wa'\neq0$則$z+z'=-\dfrac{b-wb'}{a-wa'}$，$zz'=\dfrac{c-wc'}{a-wa'}$，消去其中的$w$即得一互換關係：

$$Azz'+B(z+z')+C=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中$A=ab'-a'b$，$B=ac'-a'c$，$C=bc'-b'c$，如$a-wa=0$則$z=\infty$和$z'=-(ac'-a'c)/(ab'-a'b)$是一雙同値點同時對應於$w=\dfrac{a}{a'}$〔$a=a'=0$時則$f(z)$變爲一

次分式〕，而這雙同值點也適合在上互換關係，故平面上任何一雙同值點 z, z' 均適合一複數直綫上的互換投射關係如(1)。

令 α，β 表這互換 (z, z') 的兩個重點；α，β 不是 $f'(z)$ 的零點就是 $f(z)$ 的極點，如 $f(z)$ 不是變爲一次分式則必 $\alpha \neq \beta$；因爲 $\alpha = \beta \neq \infty$ 時則 $\frac{B}{A} = \frac{C}{B}$ 而 $f(z)$ 可約去因子 $Az+B$；$\alpha = \beta = \infty$ 時則 $A = B = 0$ 而 $f(z)$ 也爲一綫性函數或一個常數。故除了 $f(z)$ 是一綫性函數情形外在上同值點的互換關係可寫爲：

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} + \frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = 0;$$

或於 $\beta = \infty$ 時寫爲：

$$z - \alpha + z' - \alpha = 0。$$

於是若把直線看做圓之特殊情形時我們可從這調和複比關係得到在下的幾何性質：

1°. 任何一雙同值點 z, z' 和兩重點 α，β 共圓。

2°. 通過 α，β 的圓 Γ 與從 $\alpha\beta$ 弦對 Γ 的極點所引的直綫相交於一雙同值點；通過 α，β 的圓叢與對稱於 α，β 的圓叢相交於一雙同值點。

3°. $f(z)$ 的兩個零點及兩個極點各與 α，β 兩點共圓。

4°. α，β 在 Γ 圓周上劃分 Γ 爲兩段同值弧 $\widehat{\alpha z\beta}$，$\widehat{\alpha z'\beta}$。

5°. 如令 $\alpha_1 = f(\alpha)$，$\beta_1 = f(\beta)$，$w = f(z) = f(z')$ 則 Γ 圓的兩個同值弧 $\widehat{\alpha z\beta}$，$\widehat{\alpha z'\beta}$ 同對應於 w 平面的某一圓弧 $\widehat{\alpha_1 w\beta_1}$。

6°. 通過 α，β 的任一圓 Γ 劃分平面爲兩個同值區域，即若 z 在 Γ 圓內時則它的相配同值點 z' 必在 Γ 圓之外。

7°. $f(z)$ 的兩個極點不是同在通過 α，β 的某圓周 Γ 時則必分別在該圓周 Γ 的內外。

8°. z_0 點和近於 z_0 的重點 α 或 β 的距離就是以 z_0 爲心 $f(z)$ 的最大單葉性圓的半徑（我們就稱爲在 z_0 點的單葉半徑）。

以上各點容易證明，茲只就最後一點來說：

設 β 適合 $|\beta - z_0| \leqslant |\alpha - z_0|$ 及 $\alpha \neq \infty$；並令 $\xi = z - z_0$，$\xi' = z' - z_0$，$p = \alpha - z_0$，$q = \beta - z_0$，則同值點的互換關係(1)可寫爲：

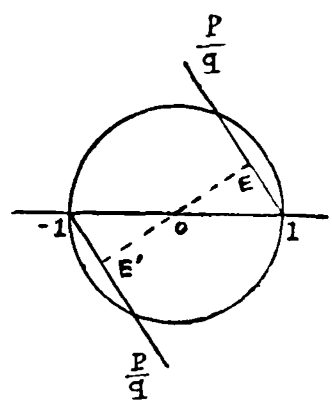
$$\frac{\xi-p}{\xi-q}+\frac{\xi'-p}{\xi'-q}=0$$

或寫如:

$$\frac{\xi-p}{\xi-q}=Z\ ,\quad \frac{\xi'-p}{\xi'-q}=-Z\ ;$$

$$\frac{\xi}{q}=\frac{Z-\frac{p}{q}}{Z-1}\ ,\quad \frac{\xi'}{q}=\frac{Z+\frac{p}{q}}{Z+1}\ 。$$

令從 $Z=O$ 點對連結 $Z=1$ 與 $Z=\frac{p}{q}$的直綫的垂足爲 E；從 $Z=O$ 對連結 $Z=-1$ 與 $Z=-\frac{p}{q}$ 的直綫的垂足爲 E'；則 E,E' 及 $Z=O$ 三點共綫，先察 $\left|\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{\alpha-z_0}{\beta-z_0}\right|>1$ 情形，這時直綫 $\left|\frac{Z-p/q}{Z-1}\right|=1$ 和 $Z=\frac{p}{q}$ 點必同落在直綫 EE' 的一邊而直綫 $\left|\frac{Z+p/q}{Z+1}\right|=1$ 和 $Z=-\frac{p}{q}$ 則落在 EE' 的另一邊(參見圖一)，故當 $\left|\frac{\xi}{q}\right|=\left|\frac{Z-p/q}{Z-1}\right|<1$ 時必然 $\left|\frac{\xi'}{q}\right|=\left|\frac{Z+p/q}{Z+1}\right|>1$。次察 $\left|\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{\alpha-z_0}{\beta-z_0}\right|=1$ 情形，這時 E 點與綫段 $(1,\frac{p}{q})$ 的中點 $\frac{1}{2}+\frac{p}{2q}$ 重合，E' 與綫段 $(-1,-\frac{p}{q})$ 的中點 $-\frac{1}{2}-\frac{p}{2q}$ 重合；因而 $\left|\frac{Z-p/q}{Z-1}\right|=1$ 與 $\left|\frac{Z+p/q}{Z+1}\right|=1$ 都和 EE' 綫重合而 $Z=\frac{p}{q}$ 與 $Z=-\frac{p}{q}$ 两點則分在 EE' 的两邊，故仍得 $\left|\frac{\xi}{q}\right|<1$ 時必使 $\left|\frac{\xi'}{q}\right|>1$。



(圖一)

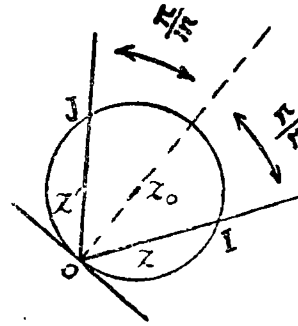
再攷察 $\alpha=\infty$ 時 z,z' 的互換關係可寫爲: $z-\beta+z'-\beta=O$ 的一情形(這時同値點 z 與 z' 對稱於 β 點)。我們得 $\xi-q+\xi'-q=O$ 及 $\frac{\xi}{q}=2-\frac{\xi'}{q}$ 故當 $\left|\frac{\xi}{q}\right|<1$ 時必使 $\left|\frac{\xi'}{q}\right|>1$。

總之，不論 z 點如何若 $|z-z_0|<|\beta-z_0|$ 則必 $|z'-z_0|<|\beta-z_0|$ 其中設

$|\beta-z_0|\leqslant|\alpha-z_0|$. $f(z)$ 在 z_0 點的最大單葉性圓就是以 z_0 爲心及通過最近於 z_0 的 $f'(z)$ 的零點或通過 $f(z)$ 的二級極點的圓。

這是在有理分式函數族中二次分式函數獨有的性質。例如：

$f(z)=z^m$, $m=3,4,\cdots\cdots$。$z=O$ 是 $f'(z)=mz^{m-1}$ 的唯一零點，但 $|z-z_0|=|z_0|$ 不是 $f(z)$ 在 z_0 點的單葉性圓。如圖二，在 $|z-z_0|=|z_0|$ 圓內 OI 弦上的點 z 和 OJ 弦上的點 z' 與 O 等距離者都是使 $z^m=z'^m$ 的點。



（圖二）

9° 通過一個重點 α 及以一雙同值點 z, z' 爲對稱點的圓必同時通過第二個重點 β。

事實上：因爲通過 α 及以 z, z' 爲對稱點的圓 Γ_1 與通過 α 及 z, z' 的圓 Γ 是正交的，並且 Γ 在 α 點的切綫和連結 z, z' 的直綫相交於 Γ_1 的心，故 Γ 與 Γ_1 的第二個交點就是 β。

10° 任與一個以 z_0, z_0' 爲對稱點的圓 C, 它的相配同值圓 C' 也是以 z_0, z_0' 爲對稱點並且 C 和 C' 分別落在 Γ_1 的內外。同樣情形，令 λ 及 μ 表 $f(z)$ 的兩個極點我們得：

$$\left(\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right)^2=\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\cdot\frac{\mu-z_0}{\mu-z_0'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

事實上：因爲由在上互換關係(1)得：

$$\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}=-\frac{\beta-z_0}{\beta-z_0'}=\frac{\alpha+\beta-2z_0}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2z_0'},$$

$$\frac{\alpha-\lambda}{\alpha-\mu}=-\frac{\beta-\lambda}{\beta-\mu}=\frac{\alpha+\beta-2\lambda}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2\mu};$$

兩式相減即得：

$$-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0'}=\frac{\alpha+\beta-2\lambda}{\alpha+\beta-2z_0'};\quad-\frac{\mu-z_0}{\lambda-z_0'}=\frac{\alpha+\beta-2z_0}{\alpha+\beta-2\lambda};$$

故有：
$$\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\cdot\frac{\mu-z_0}{\mu-z_0'}=\frac{\alpha+\beta-2z_0}{\alpha+\beta-2z_0'}=\left(\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right)^2。$$

II. $f(z)$ 的係數模的一般界限

現在我們考察 $f(z)$ 在一個最大單葉全純圓內的展開式中係數模的一般界限。

上文說過 $|z-z_0|<|\alpha-z_0|$ 是在 $z=z_0$ 點 $f(z)$ 的最大單葉性圓，如果 α 是距離 z_0 最近的一個重點。當然可能這個圓包含 $f(z)$ 的一個極點 $z=\lambda$ 在圓內，這時 $f(z)$ 的最大單葉全純圓便是 $|z-z_0|<|\lambda-z_0|$；如果圓 $|z-z_0|<|\alpha-z_0|$ 之內沒 $f(z)$ 的極點則 $|z-z_0|<|\alpha-z_0|$ 是 $f(z)$ 最大單葉全純的圓。

爲要寫 $f(z)$ 在這樣的圓內的展式：

$$f(z)=z-z_0+a_2(z-z_0)^2+\cdots\cdots=(z-z_0)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

我們可先令：

$$f(z)=\frac{(z_0-\lambda)(z_0-\mu)}{z_0-z_0'}\cdot\frac{(z-z_0)(z-z_0')}{(z-\lambda)(z-\mu)},$$

其中 z, z_0', λ, μ 設爲相異的有限常數。然後再攷察 $\lambda=\mu$ 及 λ, μ, z_0' 等表 ∞ 的情形。

令 C_0, C_λ, C_μ 表以 z_0, λ, μ 爲心互相在外的正向圓，因爲 $z=\infty$ 已設爲 $f(z)$ 的一個常點故得：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$=-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]$$

$$1=a_1=-\frac{R_\lambda}{(\lambda-z_0)^2}-\frac{R_\mu}{(\mu-z_0)^2};\quad R_\lambda=\frac{(\lambda-z_0)^2(\mu-z_0)(\lambda-z_0')}{(z_0-z_0')(\lambda-\mu)},$$

$$R_\mu=\frac{(\mu-z_0)^2(\lambda-z_0)(\mu-z_0')}{(z-z_0')(\mu-\lambda)}.$$

設 $|\lambda-z_0|\leqslant|\mu-z_0|$，可寫：

$$a_n=-\frac{R_\lambda}{(\lambda-z_0)^{n+1}}-\frac{R_\mu}{(\mu-z_0)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(\lambda-z_0)^{n-1}}+\frac{\frac{(\lambda-z_0)(\mu-z_0')}{(z_0-z_0')(\mu-\lambda)}}{(\lambda-z_0)^{n-1}}\left[1-\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^{n-1}\right]$$

以 $\mu-\lambda=\mu-z_0-(\lambda-z_0)=(\mu-z_0)\left(1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)$ 代入則得：

$$(\lambda-z_0)^{n-1}a_n=1+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^2+$$

$$\cdots\cdots+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^{n-1}。\tag{3}$$

其中 $n=2,3,\cdots\cdots$

在特別情形：當 $\lambda=\mu$ 時我們得：

$$f(z)=\frac{(\lambda-z_0)^2}{z_0-z_0'}\cdot\frac{(z-z_0)(z-z_0')}{(z-\lambda)^2}。$$

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{(\lambda-z_0)^{n-1}}\left[1+\frac{(n-1)(\lambda-z_0')}{z_0-z_0'}\right]$$

與取上(3)式 $\lambda=\mu$ 的結果相同

當 $z_0'=\infty$ 時我們得：

$$f(z)=(z_0-\lambda)(z_0-\mu)\frac{z-z_0}{(z-\lambda)(z-\mu)},$$

$$a_n=\frac{1}{(\lambda-z_0)^{n-1}}\left[1+\frac{\lambda-z_0}{\mu-z^0}+\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^{n-1}\right]$$

這也等於取(3)式於 $z_0'\to\infty$ 的極限。

當 $\mu=\infty$ 時我們得：

$$f(z)=\frac{z_0-\lambda}{z_0-z_0'}\cdot\frac{(z-z_0)(z-z_0')}{z-\lambda},$$

$$a_n=\frac{1}{(\lambda-z_0)^{n-1}}\left[1+\frac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right]$$

$(n>1)$ 仍和(3)式于 $\mu\to\infty$ 時的極限相同。

當 $\lambda=\mu=\infty$ 時我們得：

$$f(z)=z-z_0+\frac{(z-z_0)^2}{z_0-z_0'}$$

是一個二次多項式以 ∞ 點爲二級極點，而這時在上(3)式中的 a_n 應根據哥西定理寫爲：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C\infty}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

函數 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 ∞ 點的殘數 R_∞ 於 $n=1$ 時 $R_\infty=-1$，於 $n=2$ 時 $R_\infty=\dfrac{-1}{z_0-z_0'}$，於 $n\geqslant3$ 時 $R_\infty=0$；故上(3)式仍有效。

因此，在上(3)式可視為 $f(z)$ 展開式中係數的一般表達式，它指出展式中各項係數與函數的零點 z_0, z_0' 及極點 λ, μ 的關係。

茲進而討論 a_n 的模的界。

先察最大全純圓小於或等於最大單葉性圓的情形即 $|\lambda-z_0|\leqslant|\alpha-z_0|$。由此我們有在下不等式:

$$\left.\begin{array}{ll}(a)\ \text{當}\left|\dfrac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|\leqslant\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|\text{時則}\left|\dfrac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\dfrac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|<1 \\ (b)\ \text{當}\left|\dfrac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|>\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|\text{時則}\left|1-\dfrac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\dfrac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\dfrac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|<1\end{array}\right\}\ (4)$$

(其中 $z_0'\neq\infty$ 及 $|\lambda-z_0|\leqslant|\alpha-z_0|\leqslant|\beta-z_0|$)

事實上: 由在上(2)式:

$$\left|\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|^2=\left|\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|\cdot\left|\frac{\mu-z_0}{\mu-z_0'}\right|$$

及根據(a)的條件得:

$$\left|\frac{\mu-z_0'}{\mu-z_0}\cdot\frac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right|=\left|\frac{\alpha-z_0'}{\alpha-z_0}\right|^2\cdot\left|\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|\cdot\left|\frac{\lambda-z_0}{z_0-z^{0\prime}}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\alpha-z_0'}{\alpha-z_0}\right|\cdot\left|\frac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right|<\left|\frac{\alpha-z_0'}{z_0-z_0'}\right|,$$

因為 z_0, z_0' 在一個 Γ 圓的兩個同範弧之上而 $|\alpha-z_0|\leqslant|\beta-z_0|$，故 α 點必落在以 z_0, z_0' 為弦的劣弧之上或半圓之上，於是必:

$$\left|\frac{\alpha-z_0}{z_0-\epsilon_0'}\right|<1,$$

而不等式 (a) 得到證明。

又在(b)的條件之下必 $|\lambda-z_0'|<|\alpha-z_0'|$，因為我們已設其中 $|\lambda-z_0|\leqslant|\alpha-z_0|$，故得寫:

$$\left|1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|=\left|1+\frac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right|=\left|\frac{\lambda-z_0'}{z_0-z_0'}\right|<\left|\frac{\alpha-z_0'}{z_0-z_0'}\right|<1\ 。$$

在特別情形 $\lambda=\mu$ 或 $\mu=\infty$ 不等式(a)及(b)仍適用，只當 $z_0'=\infty$ 時才得:

$$\left|1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|=1\ ,$$

及當 $z_0'=\infty$，$|\lambda-z_0|=|\mu-z_0|$ 時才得：$\left|\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|=1$

由不等式(a)及在上(3)式我們察知：　當 $\left|\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|\leq\left|\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|$ 時得

$$\ldots\ldots\ |(\lambda-z_0)^{n-1}a_n|<n\ ;$$

至於 $\left|\frac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|>\left|\frac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|$ 時則令(3)式中的 $n=2,3,\ldots\ldots$ 及計及不等式(b)得：

$$\left|(\lambda-z_0)a_2\right|=\left|1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|<1+\left|\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right|<2。$$

$$\left|(\lambda-z_0)^2a_3\right|=\left|1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}(\lambda-z_0)a_2\right|<1+$$

$$\left|(\lambda-z_0)a_2\right|<3。$$

....

$$\left|(\lambda-z_0)^{n-1}a_n\right|=\left|1-\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\mu-z_0'}{z_0-z_0'}\cdot\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}(\lambda-z_0)^{n-2}a_{n-1}\right|$$

$$<1+\left|(\lambda-z_0)^{n-2}a_{n-1}\right|<n。$$

這樣，我們證明了當全純圓（$|z-z_0|\leq|\lambda-z_0|\leq|\alpha-z_0|$）不大於最大單葉性圓時如 $z_0'\neq\infty$ 亦卽如 z_0 點不是重點 α,β 的中點，則 $f(z)$ 在以 z_0 點爲心的單葉全純圓內的展式的係數 a_n 常適合 $|(\lambda-z_0)^{n-1}a_n|<n$。

當 $z_0'=\infty$ 時如 $|\lambda-z_0|<|\mu-z_0|$ 從(3)式仍得 $|(\lambda-z_0)^{n-1}a_n|<n$，只有於 $z_0'=\infty$ 及 $|\lambda-z_0|=|\mu-z_0|$ 時才可能得 $|(\lambda-z_0)^{n-1}a_n|\leq n$，亦卽只有在 $z_0'=\infty$，$\lambda=\mu$ 時才能得 $|(\lambda-z_0)^{n-1}a_n|=n$。

再察 $f(z)$ 在 z_0 點最大全純圓大於在該點的最大單葉性圓的情形，設 $|\alpha-z_0|\leq|\lambda-z_0|=|\mu-z_0|$，得寫：

$$(\alpha-z_0)^{n-1}a_n=\left(\frac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\right)^{n-1}(\lambda-z_0)^{n-1}a_n$$

$$=\left(\frac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\right)^{n-1}\cdot\left[1+\frac{\mu-z_0}{z_0-z_0'}\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(\frac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}\right)^k\right]。$$

而上文不等式 (a) 與 (b) 可改爲如下的不等式:

$$\left.\begin{array}{ll}(a') & 當\left|\dfrac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}\right|\leq\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|時則\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\cdot\dfrac{\mu-z_0'}{\mu-z_0}\cdot\dfrac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right|<1\\ (b') & 當\dfrac{\lambda-z_0}{\lambda-z_0'}>\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\alpha-z_0'}\right|時則\left|\dfrac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\right|\cdot\left|1-\dfrac{\lambda-z_0}{\mu-z_0}+\dfrac{\mu-z_0'}{\mu-z_0}\cdot\dfrac{\lambda-z_0}{z_0-z_0'}\right|<1\end{array}\right\}(4')$$

我們仿照上文的證法同樣地可以證明:

$$\left|(\alpha-z_0)^{n-1}a_n\right|=\left|\left(\frac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\right)^{n-1}(\lambda-z_0)^{n-1}a_n\right|\leq\left|\frac{\alpha-z_0}{\lambda-z_0}\right|^{n-2}\cdot n<n。$$

這樣就一般地證明了二次有理分式函數在最大單葉全純圓內的展式的係數 a_n 總適合不等式:

$$R^{n-1}|a_n|\leq n。$$

其中 R 表單葉全純半徑。

從在上 (3) 式推知 $f(z)$ 於 $z_0'=\infty$ 及 $z_0=\dfrac{\lambda+\mu}{2}$ 時爲一對稱函數,換言之 z_0 爲以綫段 $\alpha\beta$ 爲直徑的圓的心時則 $f(z)$ 在 z_0 的展式的係數 $a_{2k}=0$,這時我們得:

$$(\lambda-z_0)^{2k}a_{2k+1}=1。\qquad k=1,2,\cdots\cdots。$$

1° 参攷 И. И. ПРИВАЛОВ: ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

(本文於1956年4月5日收到)