

关于稳定性行列式判定法的某些問題

胡 金 昌

本文論 Н. И. Гаврилов 文 [1], [2], [3] 的方法, 究竟包括 В. П. Басов 文 [4], [5], [6] 的結果达到什么程度。当然它不能直接达到所期望的条件。但若从此再施用本文的方法, 也可間接推得 Басов 的积分式 $\psi(t)$ 及其稳定性的充分必要条件的証明; 跟着推得 $\psi(t)$ 的某些性质, 一如 $\psi(t)$ 可作为广义特征方程微小根的近似值; 又如下文 § 3 指出 $\psi(t)$ 的不变式性质。最后, 在 §§ 5, 6 推論到非綫性組, 所得結果与許涇庆文 [9] 的結果一致, 更且显出这稳定的“型”。但本文所用的方法和推演的过程, 与上述各文献, 迥然不相同。

§ 1. 討論下列微分方程組:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{t^\nu} \sum_{j=1}^n q_{1j}(t) x_j \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{t^\nu} q_{i1}(t) x_1 + \sum_{j=2}^n \left(p_{ij} + \frac{1}{t^\nu} q_{ij}(t) \right) x_j \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

其間 $0 < \nu \leq \frac{1}{2}$, 各 q_{ij} 为 t 的实函数, 在 $t \geq T > 0$ 定义, 連續, 有界。又設方程

$$\det((p_{ij}) - \lambda E) = 0 \quad (2)$$

的所有根 λ_i 的实部为負。

首先对于 $(x_2, \dots, x_n)$ 作常系数綫性代換, 变为 $(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, 使方陣 (p_{ij}) 化成典型陣。如此, 只有 x_1 及 $q_{i1}(t)$ 不改变, 而其他各系数变为 $\bar{q}_{ij}(t)$, 且各 $\operatorname{Re} p_{ii} = \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $\bar{p}_{i,i+1} = 1$ 或 0 , ($i=2, \dots, n$), 其他的各 $\bar{p}_{ij}$ 皆为 0 。由文 [1], 估計

$$u_1 = \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}(\tau)}{\tau^\nu} d\tau\right), \quad u_j = \exp\left(\int_T^t \operatorname{Re}\left(\bar{p}_{jj} + \frac{q_{jj}(\tau)}{\tau^\nu}\right) d\tau\right), \quad (j=2, \dots, n)$$

則当 $t \rightarrow +\infty$ 估計下列各不定式: 只要考虑 $q_{11} \leq 0$ 。若 $q_{11} < 0$, 則

$$l_{ij} = \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}}{\tau^\nu} d\tau\right) \int_T^t \frac{|\bar{q}_{ij}|}{\tau^\nu} \exp\left(-\int_T^\tau \frac{q_{11}}{\tau^\nu} d\tau\right) d\tau = o\left(\frac{|\bar{q}_{ij}|}{q_{11}}\right),$$

$$l_{i1} = o\left(\frac{|\bar{q}_{i1}|}{t^\nu \operatorname{Re}(\lambda + \bar{q}_{ii})}\right) = o(t^{-\nu}), \quad (i=2, \dots, n),$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0(q_{11}^{-1}l\bar{q}_{12}t) & 0(q_{11}^{-1}l\bar{q}_{13}t) & \cdots & 0(q_{11}^{-1}l\bar{q}_{1n}t) \\ 0(t^{-v}) & 1 & * & & \\ 0(t^{-v}) & & 1 & & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0(t^{-v}) & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

因为各 $\operatorname{Re} \lambda_{ii} < 0$, 在主子式 A_{11} 内(*)位置为 $O(1)$ 或 $o(1)$, 其余空位都是 $o(1)$, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 在 A_{11} 内各阶的主子式 $\approx +1$, 由连续性, 它们在某些区间 (T, ∞) 内有着正号。又由于在 D_n 内第一列除了第一个元素之外都有 $O(t^{-v})$, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 只要要求第一行各元素有界, 则 D_n 及一切主子式也 $\approx +1$ 。由是满足文[1]判定法条件一。

至于检查该判定法条件二: 则因一切 u_j , ($j = 2, \dots, n$), 的特征数为 $-\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, 故各 $u_j A_{ji} D_n^{-1}$, ($j = 2, \dots, n$; $i = 1, \dots, n$), 皆为有界, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 0。只值得考虑者为各 x_{1i} 。

因 $|x_{1i}| \leq \sup(u_i A_{1i} D_n^{-1})$, 且由假设, 当 $t = T$ 时, x_{1i} 达到 1, 而在 T 取充分大值时有

$$x_{11} = 0 \left(\exp \int_T^t \frac{q_{11}}{\tau^v} d\tau \right); \quad (4)$$

$$x_{1i} = 0 \left(\frac{1}{t^v} \exp \int_T^t \frac{q_{1i}}{\tau^v} d\tau \right), \text{ 可能是 } o(\dots), \quad (i = 2, \dots, n)$$

依同理, 若 $q_{11} = 0$, 则在(3)式的第一行改写为

$$1, \quad 0 \left(\int_T^t \frac{l\bar{q}_{12}}{\tau^v} d\tau \right), \quad 0 \left(\int_T^t \frac{l\bar{q}_{13}}{\tau^v} d\tau \right), \dots, \quad 0 \left(\int_T^t \frac{l\bar{q}_{1n}}{\tau^v} d\tau \right)$$

因每一个 $\bar{q}_{1j}$ 为原方程的系数 $q_{12}, q_{13}, \dots, q_{1n}$ 的线性组合, 由上结果, 故方程组(1)的零解为稳定的充分条件为:

$$\text{或 } q_{11} < 0; \text{ 且各 } \frac{q_{1j}}{q_{11}}, \quad (j = 2, \dots, n) \text{ 有界, 当 } t \rightarrow +\infty \quad (5)$$

$$\text{或 } q_{11} = 0; \text{ 且各 } \frac{q_{1j}}{t^v}, \quad (j = 2, \dots, n) \text{ 绝对可积, 当 } t \rightarrow +\infty$$

又因每一个 x_{1i} ($i = 2, \dots, n$) 为 $x_{21}, x_{31}, \dots, x_{n1}$ 的线性组合, 故由(4)得

$$\frac{x_{1i}}{x_{11}} = 0 \left(\frac{1}{t^v} \right), \text{ 可能为 } o(\dots), \quad (i = 2, \dots, n) \quad (6)$$

[附记]、在文[7], [8]的一致稳定性的充分条件为:

$$q_{11} < -C_0 < 0$$

在文[8]中强调 $-C_0$ 的必要性, 曾举一反例(即现在(1)式中的

$$q_{11} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{4}}, \quad q_{12} = t^{-\frac{1}{4}}, \quad q_{13} = 1, \quad q_{22} = 0, \quad p_{22} = -1, \quad v = \frac{1}{4}) \text{ 说明在 } q_{11} < 0 \text{ 时,}$$

得到不稳定情形。但此反例不能反駁上列条件(5)当 $q_{11} < 0$, 甚至 $q_{11} = 0$,

§ 2. 方程組(1)的解, 在 $t = +\infty$ 邻域的性质。前款条件(5)在实用上已經相当好了。但为着把所得这充分条件再行深入一步, 則只須研究組(1)的第一个列解在 ∞ 邻域的性质。其他各个列解在前款已經說明: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时它們都趋于0。茲取 T 足够大, 則由(6)式使在 $[T, \infty)$ 有漸近表示式[文10]:

$$\frac{x_{i1}}{x_{11}} = \frac{a_i^{(1)}(t)}{t^v} + \frac{a_i^{(2)}(t)}{t^{2v}} + \dots + \frac{a_i^{(k)}(t)}{t^{kv}}, \quad (i=2, \dots, n) \quad (7)$$

其間只要求各 $a_i^{(h)}$ 有界[构造见下 § 3]。則由[文1]的Volterra方程推得:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i1}}{u_1} &= 1 + \int_T^t \sum_{j=2}^n \frac{q_{ij}}{t^v} \sum_{h=1}^k \frac{a_j^{(h)}(t)}{t^{hv}} \frac{x_{j1}}{u_{11}} dt \\ &= \exp \left(\int_T^t \sum_{j=2}^n \frac{q_{ij}}{t^v} \sum_{h=1}^k \frac{a_j^{(h)}(t)}{t^{hv}} dt \right) \end{aligned} \quad (8)$$

茲取 $kv \leq 1 < (k+1)v$, 則最后的一项经过积分之后为无效, 当 $t \rightarrow +\infty$ 。因此設

$$\psi(t) = \int_T^t \frac{1}{t^v} \left(q_{11} + \sum_{h=1}^{k-1} \sum_{j=2}^n q_{1j} \frac{a_j^{(h)}(t)}{t^{hv}} \right) dt$$

另行估計

$$\exp \left(\int_T^t \sum_{j=2}^n q_{1j} \frac{a_j^{(h)}(t)}{t^{(k+1)v}} \right) = C \left(1 + \frac{w(t)}{t^{(k+1)v-1}} \right), \quad \text{当 } t \rightarrow +\infty.$$

其間 $w(t)$ 为 t 的有界函数, 当 $t \rightarrow +\infty$ 。代入(8)式得結果如下:

$$\begin{aligned} x_{i1} &= e^{\psi(t)} [1 + t^{1-(k+1)v} W(t)] \\ x_{j1} &= t^{-v} e^{\psi(t)} v_j(t), \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

这里各有界函数 $v_i(t)$ 形如

$$v_i(t) = \sum_{h=1}^k \frac{a_i^{(h)}(t)}{t^{(h-1)v}} [1 + \dots] \quad (10)$$

如是則与文[5], [4]的結果完全一致。由此(并参看 § 4)得

$$\sup_{t \geq T} \psi(t) < +\infty \quad (11)$$

为这稳定性的充分条件, 因为如此便会使(1)的基解陣 $(x_{ij}(t))$ 內一切元素有界。再者, 条件(11)为这稳定的必要条件, 因为如果 $\psi(t)$ 无上界, 則在第一列解中 x_{11} 便无界当 $t \rightarrow +\infty$ 。更且这稳定为漸近稳定当且只当 $t \rightarrow +\infty$ 时有 $\psi(t) \rightarrow -\infty$ 。

按所得結果用广义特征方程的观点來說, 文[7], [8]对于其微小根的綫性近似值为 $t^{-v} q_{11}(t)$ 。由此, 这函数 $\psi'(t)$ 从某个角度來說, 可視作这微小根的第 $k-1$ 次迫近值。至于第 k 次以上的迫近項, 則对于 $t \rightarrow +\infty$ 时, 经过积分之后无效。

§ 3. 函数 $\psi(t)$ 的构成。前节各 $a_i^{(h)}$ 用如下方法求之。很自然地把(7)代入原方程組(1)。先把組(1)写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_i}{x_1} \right) + \frac{x_i}{x_1^2} \frac{dx_1}{dt} = \frac{q_{i1}}{t^v} + \sum_{j=2}^n \left(p_{ij} + \frac{1}{t^v} q_{ij} \right) \frac{x_j}{x_1}, \quad (i=2, \dots, n) \quad (12)$$

$$\frac{x_i}{x_1^2} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_i}{x_1} \left(\frac{q_{11}}{t^v} + \sum_{j=2}^n \frac{q_{1j}}{t^v} \frac{x_j}{x_1} \right) \quad (13)$$

以(7)代入(13)的右边得

$$\frac{x_i}{x_1^2} \frac{dx_1}{dt} = \varphi(x) \sum_{h=1}^k \frac{a_i^{(h)}(t)}{t^{hv}}$$

这里

$$\varphi(x) \equiv \frac{q_{11}}{t^v} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^k \frac{a_i^{(h)}(t)}{t^{hv}} = \psi'(t) + \sum_{i=2}^n \frac{a_i^{(k)}(t)}{t^{kv}} \quad (14)$$

用此結果代入(12)代替其左边第二項, 用(7)代入其其他項, 所得的結果列成一個表, 可用下陣式表之(t 的幂指数小于 -1 者从略)

$$\begin{pmatrix} q_{11}t^{-v} & q_{12}t^{-v} & \dots & q_{1n}t^{-v} \\ q_{21}t^{-v} & p_{22} + q_{22}t^{-v} & \dots & p_{2n} + q_{2n}t^{-v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}t^{-v} & p_{n2} + q_{n2}t^{-v} & \dots & p_{nn} + q_{nn}t^{-v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sum a_2^{(h)}t^{-hv} \\ \dots \\ \sum a_n^{(h)}t^{-hv} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sum t^{-hv} \frac{d}{dt} a_2^{(h)} \\ \dots \\ \sum t^{-hv} \frac{d}{dt} a_n^{(h)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \sum a_2^{(p)}t^{-hv} \\ \dots \\ \varphi \sum a_n^{(h)}t^{-hv} \end{pmatrix} + \sum [\dots] t^{-1-hv} \quad (15)$$

比較第一行便得(14)式; 比較以後各行, 分別令 t^{-hv} 的系数相等, 取 $h=1, 2, \dots, k-1$, 便得一系列的方程組

$$\frac{da_i^{(h)}}{dt} = \sum_{j=2}^n p_{ij} a_j^{(h)} + R_i^{(h)} \quad (i=2, \dots, n; h=1, \dots, k-1) \quad (16)$$

其間 $R_i^{(h)}$ 包含有各 $a_j^{(h')}(h' < h)$. 按 h 的大小次序逐步可解出 $a_i^{(h)}$. 这(16)式与文[4]完全一致. 因(16)式的系数陣 (p_{ij}) 的特征根的实部为負数, 故保證各 $a_i^{(h)}$ 有界. 再者, 虽然 $a_i^{(k)}$ 不列入計算之內, 但因 $-kv \geq -1$, 故仍然适用上列陣式的比較, 所得的 $a_i^{(k)}$ 的关系式, 与(16)同形, 故 $a_i^{(k)}$ 也有界. 証毕.

由上結果可写出各种 $k-1$ 次漸近表示式如下:

$$\lambda_i(t) \approx \psi'(t),$$

$$\frac{x_{i1}}{x_{11}} \approx \frac{a_i^{(1)}(t)}{t^v} + \dots + \frac{a_i^{(k-1)}(t)}{t^{(k-1)v}}, \quad (i=2, \dots, n)$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{x_{i1}}{x_{11}} \approx t^v \psi'(t) - q_{11}(t)$$

§4. 函数 $\psi(t)$ 的不變性. 上述 §1 用陣 (p_{ij}) 的典型式立論, 但此后 §§ 2, 3 用一般形式, 由此引起 $\psi(t)$ 对于每种表示形式的討論. 設由 $(x_2, \dots, x_n)$ 用

任何线性代换变成 $(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, 所得新方程的各数皆在其上画线以区别之。依照 § 2, 3 完全同样构造方法, 求得各 $\bar{a}_i^{(h)}$, $\bar{\varphi}(t)$ 。注意 x_{11} , q_{11} 是不变的! 由 (1) 式的第一个方程显然有

$$\sum_{i=2}^n q_{1i} x_i = \sum_{i=2}^n \bar{q}_{1i} \bar{x}_i$$

以 x_1 除两边, 用 (7) 式代入得

$$\sum_{h=1}^k \sum_{j=2}^n q_{1j} \frac{a^{(h)}(t)}{t^{hv}} = \sum_{h=1}^k \sum_{j=2}^n \bar{q}_{1j} \frac{\bar{a}^{(h)}(t)}{t^{hv}}$$

故得 $\phi(t) = \bar{\varphi}(t)$ 。 (17)

所得 (17) 式说明 $\phi(t)$ 的不变性。特别是当 $(x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ 为 § 1 的典型式所用的变换, 则 $\phi(t)$ 殊可在这处施用。至此完满 § 2 的论断。

再者 (17) 供给我们一种计算的便利。即先把 (16) 式的系数阵 (p_{ij}) 化为典型式, 以后只计算 $\bar{\varphi}(t)$ 便够, 于此各 $\bar{a}_i^{(h)}(t)$ 由一连串直接积分求得之。

§ 5. 非线性组。与此论题的同时, 可以推广到讨论下列方程组:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t^v} \sum_{j=1}^n q_{1j}(t) x_j + F_1(x_1, \dots, x_n; t) \quad (18)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{t^v} q_{j1}(t) x_1 + \sum_{i=2}^n \left(p_{ij} + \frac{1}{t^v} q_{ij}(t) \right) x_i + F_j(x_1, \dots, x_n; t), (i=2, \dots, n)$$

其间线性部分的系数与 § 1 的假设相同。又设

$$F_i(x_1, \dots, x_n; t) = X_i^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t^v} X_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n; t), (i=1, \dots, n),$$

这里各 $X_i^{(1)}$ 为 $x_1, \dots, x_n$ 的常数正则函数, 其展式不含低于二次项; $X_i^{(2)}$ 为 $x_1, \dots, x_n$ 的一致正则函数: 其展式不含低于二次项, 其系数当 $t \geq t_0 > 0$ 时为 t 的有界连续函数。

此题的解法引用文 [3] 作如下的变分方程, 把这题引到前题依同理解决之。因由公式

$$F_i(x_1, \dots, x_n; t) = F_i(0, \dots, 0; t) + \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1 \tau, \dots, x_n \tau; t) d\tau$$

由题设第一项 $F_i(0, \dots, 0; t) = 0$, 第二项各 x_i 的系数为有界函数。取强稳定的级 $p \geq v$ 。设 $y_i = t^p x_i$ ($i=1, \dots, n$) 则得变分方程:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(t) y_j \quad (i=1, \dots, n) \quad (19)$$

这里 $P_{11}(t) = t^{-v} q_{11}(t) + t^{-p} \theta_{11}(t) + t^{-1} p$; $P_{1i}(t) = t^{-v} q_{1i}(t) + t^{-p} \theta_{1i}(t)$;

$$P_{ii}(t) = p_{ii} + t^{-v} q_{ii}(t) + t^{-p} \theta_{ii}(t) + t^{-1} p; P_{ij}(t) = t^{-v} q_{ij}(t) + t^{-p} \theta_{ij}(t) \quad (20)$$

$$P_{ij}(t) = p_{ij} + t^{-v} q_{ij}(t) + t^{-p} \theta_{ij}(t), (i \neq j), (i, j=2, \dots, n)$$

其间变分函数 $\theta_{ij}(i, j=1, \dots, n)$ 为

$$\theta_{ij}(t) = t^p \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \left(\frac{y_1 \tau}{t^p}, \dots, \frac{y_n \tau}{t^p}; t \right) d\tau \quad (21)$$

由題設 $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}$ 的一般構造, 故 $\theta_{11}(t)$ 在 $t \geq t_0 > 0$ 有界。这里 $\theta_{11}(t)$ 由文 [3] 意味着 $y_1, \dots, y_n$ 已經表成为 t 的函数。

从此以后, 用行列式判定法直接檢驗方程組 (19)。按該法的条件一, 现在所得的行列式与 § 1 所得的行列式 (4) 完全一致, 故可按照前法同一論断。按照判定法条件二考虑各个解 y_{ij} 的有界性, 只要关心的为 y_{11}, y_{1j} 而已。

$$\text{估計 } u_1 = \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}}{t^v} + \frac{1}{t^v} \theta_{11}(\tau) + \frac{p}{t}\right) dt,$$

$$y_{11} = 0(u_1), \quad y_{1j} = 0(t^{-v} u_1)$$

现在取 $p = (k+1)v$, 則当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$y_{11} = 0\left[t^{(k+1)v} \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}}{t^v} dt\right)\right]; \quad y_{1j} = 0\left[t^{kv} \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}}{t^v} dt\right)\right] \quad (22)$$

因此只要求 y_{11} 有界便够。故

$$\sup_{t \geq T} t^{(k+1)v} \exp\left(\int_T^t \frac{q_{11}}{t^v} dt\right) < +\infty \quad (23)$$

为 (18) 式的对应綫性組的 $(k+1)v$ 級强稳定的充分的充分条件, 这亦即 (18) 取得 $0(t^{-(k+1)v})$ 型稳定的充分条件。又由 (22) 得

$$\frac{y_{1j}}{y_{11}} = 0(t^{-v}) \quad (24)$$

由 (19), (24) 按照 § 2, 3 同样方法, 构成函数 $\phi(t)$ 。既因已取 $p = (k+1)v$, 故 $\theta_{11}(t)$ 不会影响 $\phi(t)$, 故得

$$y_{11} = t^{(k+1)v} e^{\phi(t)} v_1(t), \quad y_{1j} = t^{kv} e^{\phi(t)} v_2(t) \quad (25)$$

其間 v_1, v_2 当 $t \in (T, \infty)$ 为 t 的有界函数。故組 (18) 的零解为 $0(t^{-(k+1)v})$ 型稳定的充分条件为:

$$\sup_{t \geq T} t^{(k+1)v} e^{\phi(t)} < +\infty. \quad (26)$$

§ 6 若更用 Ляпунов 变换使各 $X_1^{(1)}$ 更为化簡, 見文 [9], 特别是

$$X_1^{(1)}(x_1, 0, \dots, 0) = 0 \text{ 或 } = gx_1^m + \dots, \quad (m > 2) \quad (27)$$

則由于 $X_1^{(1)}$ 不含 x_1^2 这特殊構造, 故用 $y_{11} = 0(t^{-v} u_1)$ 代入 (21) 式更可化为

$$\theta_{11} = t^{p+v} \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \left(\frac{y_1 \tau}{t^p}, \dots, \frac{y_n \tau}{t^p}; t \right) d\tau, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (28)$$

其他各 $\theta_{ij} (j = 2, \dots, n)$ 仍照原 (21) 式。由于 (28) 所引起的变化, 随着 (20) 式也变化:

$$P_{11} = t^{-v} q_{11}(t) + t^{-(p+v)} \theta_{11}(t) + t^{-1} p, \quad P_{1j} = t^{-v} q_{1j}(t) + t^{-(p+v)} \theta_{1j}(t)$$

因而

$$u_1 = \exp\left(\int_T^t \left(\frac{q_{11}}{t^v} + \frac{1}{t^{p+v}} \theta_{11}(\tau) + \frac{p}{t}\right) d\tau\right)$$

现在情形, 只要求 $p = kv$ 已够应付。因而 (25) 式改为

$$y_{11} = t^{kv} e^{\phi_1(t)} v_1(t), \quad y_{1j} = t^{(k-1)v} e^{\phi_1(t)} v_2(t) \quad (29)$$

故組(18)的零解为0 (t^{-kv})型稳定的充分条件为

$$\sup_{t \geq T} t^{kv} \phi_1(t) < +\infty. \quad (30)$$

其間 $\phi_1(t)$ 为經過变换后由新系数构成的(这与原 $\psi(t)$ 有别)。所得結果,(26),(30)与文[9]的結果相符。

結論。方程組(18)在所設条件下,其零解为漸近稳定的充分条件为:

$$\sup_{t \geq T} t^{kv} \exp \psi(t) < +\infty,$$

这里 $S = k + 1$ 或 k 随着 $X(t)$ 含有或不含 x_1^2 这一項而定。

文 献

1. Н. И. Гаврилов. Об устойчивости по Ляпунов систем лнн. дифф. урав. ДАН. LXXXIV. No.3. (1952)
2. Н. И. Гаврилов. Об устойчивости по Ляпунов при наличии характеристических чисел, уравных нулю. мат. сбор. Т.41(83) No.1. (1957)
3. Н. И. Гаврилов. Об устойчивости по Ляпунов нелинейных систем дифф. урав. Труды Одесского госу. универста год ХСII. т.146. сер. матем. наук. вы. 6 (1956)
4. В. П. Басев. О решениях одного класса систем лнн. дифф. урав. ДАН LXXX No.3. (1951)
5. В. П. Басев. Построение решения одного класса систем лнн. Дифф. урав. ПММ XVIII. B.3 (1954)
6. В. П. Басев. Необходимые и достаточные условия устойчивости решений некоторого класса систем дифф. урав. в одном сомнительном случае. ДАН LXXXI No.1 (1951)
7. Б. П. Демидович. Об одном критическом случае устойчивости в смысле Ляпунова. ДАН LXXII. No.6. (1950)
8. Б. П. Демидович. Об устойчивости по Ляпунов систем обнн. Дифф. урав. мат. сбор. 28(70) No.3 (1951)
9. 許淞庆, 一类微分方程組在一个临界情形中的解的稳定条件. 数学学报10卷2期(1960)
10. J. Horn. über die asymptotische Darstellung der Integrale lin. Diff-gl. Acta Math. Bd. 24(1901)

Abstract

Problems on Stability with the Determinant Criterion

Hu Jinchang

In the first part of this paper, consider the linear system.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t^v} \sum_{j=1}^n q_{ij}(t) x_j$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t^v} q_{i1}(t) x_1 + \sum_{j=2}^n \left(p_{ij} + \frac{1}{t^v} q_{ij}(t) \right) x_j \quad (i=2, \dots, n)$$

where $0 < v \leq 1$ and q_{ij} are real functions of t , defined, continuous and bounded for $t \geq T > 0$. Assume that the real parts of the roots λ_i of $\det \|p_{ij} - \delta_{ij} \lambda\| = 0$ are all negative, we proceed with the

determinant criterion for stability cited in the literatures [1] and [2] and obtain the asymptotic behavior of the ratios $x_{i1}:x_{11}$ for the first column-solution of the fundamental matrix of solutions. Then we construct the asymptotic solution of the system and thence derive a necessary and sufficient condition for stability and asymptotic stability of the trivial solution of the system. All the results thus obtained are in harmony with those cited [4] and [6]. However, we point out further that the significance of the BACON's function

$$\Psi(t) = \int_T^t \frac{1}{t^v} \left(q_{11} + \sum_{h=1}^n \sum_{j=2}^n q_{ij} \frac{a_j^{(h)}(t)}{t^{hv}} \right) dt$$

as to its structure; to the feature of approximation to the characteristic number of the solutions; and to its important property of invariant under linear substitutions in the non-critical variables $x_2, \dots, x_n$.

In the second part, consider the non-linear system:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{t^v} \sum_{j=1}^n q_{1j}(t) x_j + F_1(x_1, \dots, x_n; t)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t^v} q_{i1}(t) x_1 + \sum_{j=2}^n \left(p_{ij} + \frac{1}{t^v} q_{ij}(t) \right) x_j + F_i(x_1, \dots, x_n; t), \quad (i=2, \dots, n)$$

$$F_i(x_1, \dots, x_n; t) \equiv X_i^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{t^v} X_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n; t), \quad (i=1, \dots, n)$$

where $X_i^{(j)}$ are holomorphic functions the development series of which begin with the powers in $x_1, \dots, x_n$ of the order at least second or higher. The coefficients of $X_i^{(1)}$ are constants and those of $X_i^{(2)}$ are continuous functions of t , bounded

for $t \geq t_0 > 0$. By proceeding with the method of variation cited in [3] and using our previous method of construction of an asymptotic solution as in the first part of the paper, we conclude that a sufficient condition for the asymptotic stability of the trivial solution of the non-linear system envisaged is, in harmony with [9], that

$$\sup_{t \geq T} t^{\nu} \exp \Psi(t) < +\infty$$

where s equals $k+1$ or k in according with that $X_1^{(1)}$ contains the term x_1^2 or not, while the stability is of the type $O(t^{-(k+1)\nu})$ or $O(t^{-k\nu})$ respectively.

In spite of the conformity with the results of the cited literatures, the two parts of this paper come along with an entirely different mode of procedure.