

綫性常微分方程組解的穩定性

賀 春 錦

(數力系四年級學生)

設已給予微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

此處 $p_{ik}(t)$ ($i, k=1,2,\dots,n$) 是在區間 $(T_0, +\infty)$ 上的實變量 t 的連續函數, (一般是取復值的; $T_0 \geq 0$), 為了敘述的方便起見, 我們稱方程組

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)\xi_k, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

為組 (1) 的對應系

在文 [1] 中, Н.И. Гаврилов 建立了一個關於組 (1) 的平凡解為 Ляпунов 穩定的有力的判別法, 但此判別法只當組 (1) 的係數函數 $p_{ik}(t)$ 為有界的情況方可能有效; 至於當組 (1) 的係數函數為無界的情形用此判別法則會遇到困難。

本文通過組 (2) 直接引用解的最大值的估計 [2], 推出了一個關於組 (1) 的平凡解為 Ляпунов 穩定的判別準則, 它對於某些係數函數 $p_{ik}(t)$ 為無界的情況亦仍然有效。

為了得到必要的估計, 我們利用 А.В. Костяков 的三角系的辦法 [3], 把組 (1) 寫為如下的形式:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k + f_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

此處 $f_1=0$, $f_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_{ik}(t)x_k$ ($i=2,3,\dots,n$)

此處, 我們暫時把 f_i 看成是時間的已知函數, 來研究組 (1) 的某一解 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 初始條件為 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, 當 $t=t_0 \geq T_0$ 時, 設

$$x_i = \xi_i + \eta_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

其中 ξ_i ($i=1,2,\dots,n$) 為對應系 (2) 具有相同初始條件的解, 而此時 η_i 則滿足下列積分方程組:

$$\eta_i = \int_{t_0}^t \left[\left(f_i + \sum_{k=i+1}^n p_{ik}(\tau)\eta_k \right) \exp\left(\int_{\tau}^t p_{ii}(\tau)d\tau\right) \right] d\tau \quad (3)$$

由Kramer法則解此方程組,得:

$$M_i(T_i) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_{12} & \cdots & -I_{1,i-1} & 0 & + \delta_{1i} & -I_{1,i+1} & \cdots & -I_{1n} \\ -I_{21} & 1 & \cdots & -I_{2,i-1} & \nabla_2 & + \delta_{2i} & -I_{2,i+1} & \cdots & -I_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -I_{n1} & -I_{n2} & \cdots & -I_{n,i-1} & \nabla_n & + \delta_{ni} & -I_{n,i+1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{D_n} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_{12} & \cdots & 0 & \cdots & I_{1n} \\ -I_{21} & 1 & \cdots & \nabla_2 & \cdots & -I_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -I_{n1} & -I_{n2} & \cdots & \nabla_n & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{D_n} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I_{12} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & -I_{1n} \\ -I_{21} & 1 & \cdots & \delta_{2i} & \cdots & -I_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -I_{n1} & -I_{n2} & \cdots & \delta_{ni} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{D_n}$$

在此,如果我們假定:

行列式 $D_n > 0$ (严格为正), 而且所有 2 阶到 $n-1$ 阶对角綫子式都是非負的。

則我們可以断言^[4]: 下列不等式成立:

$$M_i(T_i) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{D_n} \nabla_k A_{ki}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

此处 A_{ki} 为行列式 D_n 的元 (k, i) 的代数余子式。

如是, 即有:

$$|x_i| \leq |\xi_i| + 17_i | \leq |\xi_i| + M_i(T_i) \leq |\xi_i| + \frac{1}{D_n} \sum_{k=2}^n \nabla_k A_{ki}$$

$$(i=1, 2, \dots, n; T_i \in [t_0, T] \subset [t_0, +\infty])$$

这样一来, 如果我們假定对一切 $t \geq t_0$ 有条件 (L):

1°). 对应系 (2) 的一切解有界, 即組 (2) 之平凡解为稳定;

2°). 一切函数 $\frac{1}{D_n} \nabla_k A_{ki}$ 有界 ($i=1, 2, \dots, n; k=2, 3, \dots, n$)

則由上式易知一切解 $|x_i|$ 有界, 从而推知組 (1) 的平凡解稳定。

如是, 我們得到:

定理: 对于組 (1), 如果滿足条件 (L), 并且行列式 D_n 严格为正, 其所有 2 阶到 $n-1$ 阶对角綫子式均为非負, 則組 (1) 的平凡解稳定。

下面我們具体的給出几个例子, 在轉到实例即具体的例子以前, 先証明如下的引理。

引理: 如果函数 $f(t)$ 在区間 $[0, +\infty)$ 上連續, 非負, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $t^m f(t) \rightarrow 0$, 則 $t^m e^{-t} \int_0^t f(t_1) e^{t_1} dt_1 \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时。

証明：显然积分 $\int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1$ 是存在的。

1°. 如果积分 $\int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1 \rightarrow K = \text{Const}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时。

則引理自然为真。

2°. 如果积分 $\int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1 \rightarrow \infty$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时。

則利用Лопиталь法則求极限即得証。

$$\begin{aligned} \text{事实上, } \lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{-t} \int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1}{t^{-m} e^t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)e^t}{t^{-(m+1)} e^t (1-m)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^m f(t) = 0 \end{aligned}$$

証毕。

例 1、考虑二阶微分方程組：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + tx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f(t)x_1 - x_2 \end{cases}$$

其中 $tf(t) \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, ($f(t)$ 为区間 $[0, +\infty)$ 上的非負連續函数)。

$$\text{解: 对应系} \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = -\xi_1 + t\xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_1 - \xi_2 \end{cases}$$

的基本解系为：

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2}{2} e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

显然对应系的一切解均有界。对于第一个解易得：

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \int_0^t f(t_1)e^{-t_1} e^{-t+t_1} dt_1 = e^{-t} \int_0^t f(t_1) dt_1 \leq te^{-t}$$

$$I_{12} = \int_0^t t_1 e^{-t+t_1} dt_1 = e^{-t} \int_0^t t_1 e^{t_1} dt_1 = (t-1) + e^{-1}.$$

$$I_{21} = \int_0^t f(t_1)e^{-t+t_1} dt_1 = e^{-t} \int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1.$$

$$\text{又} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -I_{12} \\ -I_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 - I_{12}I_{21} = 1 - [(t-1) + e^{-1}]e^{-t} \int_0^t f(t_1)e^{t_1} dt_1.$$

由引理及題設条件得知 $D_2 > 0$ (严格为正)。

至此, 我們完全可以断言对于第一个解 (同样可以断言对于第二个解) 上述定理 (即判別准則) 是滿足的。即組 (7) 之平凡解稳定。

利用所証明的 η 的有界性, 再从方程組 (4) 不难推知所討論的微分方程組 (7)

的平凡解是漸近穩定的。

在文[3]中, A.B. КОЧУБ 以微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + tx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2} x_1 - x_2 \end{cases}$$

為例。并斷言其平凡解是穩定的。其實, 此例不過是上面例 1 的一種具體的特殊情況罷了。

例 2 考慮三階微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + t(x_1 + x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_{21}(t)x_1 - x_2 + tx_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = f_{31}(t)x_1 + f_{32}(t)x_2 - x_3 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $f_{21}(t)$, $f_{31}(t)$ 以及 $f_{32}(t)$ 均為區間 $[0, +\infty)$ 上的非負連續函數, 並且當 $t \rightarrow \infty$ 時, $tf_{21}(t) \rightarrow 0$; $tf_{32}(t) \rightarrow 0$; $t^2f_{31}(t) \rightarrow 0$ 。

我們斷言組 (8) 的平凡解是穩定的。

事實上, 我們容易驗證上面定理的條件是滿足的:

不難求出組 (8) 的對應系

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = -\xi_1 + t(\xi_2 + \xi_3) \\ \frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_2 + t\xi_3 \\ \frac{d\xi_3}{dt} = -\xi_3 \end{cases}$$

的基本解系為:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2\left(1 + \frac{t^2}{4}\right)e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

顯然對應系的一切解是有界的。對於第一個解易得:

$$\Delta_1 = 0; \Delta_2 = \int_0^t f_{21}(t_1)e^{-t_1}e^{-t+t_1}dt_1 = e^{-t} \int_0^t f_{21}(t_1)dt_1 \leq te^{-t};$$

同樣 $V_3 \leq te^{-t}$.

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = \int_0^t t_1 e^{-t+t_1} dt_1 = (t-1)e^{-t} + e^{-t};$$

$$I_{21} = \int_0^t f_{21}(t_1)e^{-t+t_1}dt_1 = e^{-t} \int_0^t f_{21}(t_1)e^{-t_1}dt_1;$$

同樣 $I_{31} = e^{-t} \int_0^t f_{31}(t_1) e^{t_1} dt_1$; $I_{32} = e^{-t} \int_0^t f_{32}(t_1) e^{t_1} dt_1$.

在此, 如果我們注意到引理, 那末, 不難相信行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & 1 & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

是嚴格為正的, 其 2 階對角線子式亦為正。

函數 $\frac{1}{D_3} \Delta_k A_{ki}$ (其中 $k=2, 3$; $i=1, 2, 3$) 為有界則是顯然的事。

這樣一來, 即驗證了對於第一個解 (同樣對於第二、第三個解) 上述定理的條件是滿足的。即組 (8) 的平凡解為穩定。

利用所證明 η_i 的有界性, 再從組 (4) 容易推得所討論的組 (8) 的平凡解是漸近穩定的。

最後, 我們指出, 上面所討論的幾個例子, 如用 Н. И. Гаврилов 的行列式準則 [1, 4] 進行判斷, 則將會遇到不可克服的困難, 用 А. В. Костин 在文 [3] 中所建立穩定性判別準則進行判斷, 無可否認, 仍有相當的效力, 但當 $n > 3$ 時, 用此判別法在估計 A_i 及 B_i 時是很不方便的。本文所得到的定理不需要進行這些估計, 因此它對一般的 $n (> 3)$ 階方程組亦仍然方便。作為例子, 我們指出 n 階微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + t(x_2 + x_3 + \dots + x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_{21}(t)x_1 - x_2 + t(x_3 + x_4 + \dots + x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1,1}(t)x_1 + f_{n-1,2}(t)x_2 + \dots + f_{n-1,n-2}(t)x_{n-2} - x_{n-1} + tx_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f_{n1}(t)x_1 + f_{n2}(t)x_2 + \dots + f_{nn-1}(t)x_{n-1} - x_n \end{cases}$$

的平凡解是穩定的。如果 $f_{ik}(t)$ ($i > k$; $i = 1, 2, \dots, n$) 滿足下列條件的話。

- 1° $f_{ik}(t)$ ($i > k$; $i = 1, 2, \dots, n$) 在區間 $(0 + \infty)$ 非負連續;
- 2° 當 $t \rightarrow \infty$ 時, 函數 $t^{-k} f_{ik}(t) \rightarrow 0$ 。 ($i > k$; $i = 1, 2, \dots, n$)

驗證上述定理的條件是否滿足, 完全可以仿例 3 那樣進行。(從略)

本文作者向其導師許滋庚教授以及胡金昌教授和黎百恬老師致謝。

參 考 文 獻

- (1) Н. И. Гаврилов., Об устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений. ДАН., 84 (1952) 425—428.
- (2) Б. П. Демидович., Об устойчивости в смысле Ляпунова линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сб., 28 (70) (1951), 659—684.

- (3) А. В. Костен., К устойчивости по Ляпунову линейных систем дифференциальных уравнений Труды Одесского Госу университета Год хсп, Том. 146 сер, Матем. Наук. Вып 7 (1956).
- (4) Н. И. Гаврилов., Об устойчивости по Ляпунову при наличии характеристических чисел, равных нулю. Матем. сб., 41 (83) (1957), 7—22.
- (5) А. В. Костин., К устойчивости по Ляпунову линейных систем дифференциальных Уравнений. Труды Одесского Госу университета Год Хсп том 146 сер, Матем. Наук. вып 6. (1956)
- (6) Н. И. Гаврилов., Об устойчивости по Ляпунову при наличии характеристических чисел, равных нулю. Матем. сб., 41 (83) (1957), 7—22.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хэ чунь-цзинь

(Конспект)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\frac{dgi}{dt} = \sum_{k=i}^n p_{ik}(t)x_k \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где $p_{ik}(t)$ — непрерывные (вообще говоря, комплекснозначные) функции при всех $t \geq t_0$

Введем обозначения:

$$\Delta_k = \int_{t_0}^t \left| \sum_{l=1}^{k-1} p_{kl}(t_1)g_l(t_1) \right| \exp\left(\int_{t_1}^t \operatorname{Re} p_{kk}(t_1) dt_1\right) dt_1$$

$$\Delta_1 = 0. \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

$$I_{ik} = \left| \int_{t_0}^t p_{ik}(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^t p_{ii}(t_1) dt_1\right) dt_1 \right| \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -I_{12} & \dots & -I_{1n} \\ -I_{21} & 1 & \dots & -I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I_{n1} & -I_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Теорема: Если система (1) удовлетворяет условию при $t \geq t_0$:

1. решение системы (2) ограничено;
2. основной определитель D_n положителен, а все его диагональные миноры

ры порядков от $n-1$ до 2-го включительно неотрицательны;

3. функции $\frac{1}{D_n} \nabla_k A_{ki} \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots,n \\ k=2,3,\dots,n \end{smallmatrix} \right)$ ограничены, где A_{ki} — алгебраическое дополнение элемента (k,i) определителя D_n ,

то нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) устойчиво по Ляпунову при $t \geq t_0$.