几类微分方程組解的全局稳定性

陈伟廉　黄友川　周毓仁

（数力系四年級学生）

本文在A.M.Ляпунов第二方法[1]的基础上，应用Барбашин—Красовский定理[2]来研究几类微分方程組零解的全局稳定性。

§1.二阶方程組

考虑一般形式的二阶方程組：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\Phi_1(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=\Phi_2(x,y)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中$\Phi_1(x,y)$，$\Phi_2(x,y)$在$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$内連續，并且滿足保証解的存在唯一性之条件※1。且$\Phi_i(0,0)=0$，$(i=1,2)$

定理1　若可找到这样的連續函数$H_1(X)$和$H_2(y)$使得：

1，　$xH_1(x)>0,(x\neq 0),yH_2(y)>0,(y\neq 0),H_1(0)=H_2(0)=0$，

2，　$\int_0^{\pm\infty}H_1(x)dx=\infty\qquad\int_0^{\pm\infty}H_2(y)dy=\infty$，

3，　$H_1(x)\Phi_1(x,y)+H_2(y)\Phi_2(x,y)<0,\quad(x^2+y^2\neq 0)$，

則（1）之平凡解为全局漸近稳定。

証明：作$V(x,y)=\int_0^x H_1(x)dx+\int_0^y H_2(y)dy$，

則
$$\frac{dv}{dt}=H_1(x)\Phi_1(x,y)+H_2(y)\Phi_2(x,y)$$

根据条件，$V(X,y)$为有无穷小上限与无穷大下限的定正函数，而$\frac{dv}{dt}$为定負，故由文〔2〕的定理知（1）的平凡解全局漸近稳定。

推論1　若$x\Phi_1(x,y)+y\Phi_2(x,y)<0\ (x^2+y^2\neq 0)$，則（1）的平凡解为全局漸近稳定。

考慮如下形式的方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=g(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=f(x)+\varphi(y)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

其中 $g(0,0)=f(0)=\varphi(0)=0$,

*以后討論的方程組的右端函数均滿足这些条件，討論时不再提。

定足2　若(2)滿理下列附加条件:

1)　$xf(x)>0\quad(x\neq 0),\ y\varphi(y)<0\ (y\neq 0)$,

2)　$\int_0^{\pm\infty} f(x)\,dx=\infty\qquad \int_0^{\pm\infty}\varphi(y)\,dy=-\infty$,

3)　$f(x)[g(x,y)-\varphi(y)]-\varphi^2(y)<0\quad(x^2+y^2\neq 0)$

則(2)的平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x,y)=\int_0^x f(x)\,dx-\int_0^y\varphi(y)\,dy$.立即得到証明。

現在考虑較为广泛的一类方程:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x,y)\varphi_1(x,y)+g_1(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x,y)\varphi_2(x,y)+g_2(x,y)\end{aligned}\qquad(3)$$

其中 $f_i(0,0)=g_i(0,0)=0$,（$i=1.2$）

定理3　若(3)滿足下列附加条件:

1)　$\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$，且連續。

2)　$xf_1(x,y)>0$、$(x\neq 0)$，　$yf_2(0,y)>0$、$(y\neq 0)$,

3)　$\varphi_i(x,y)<0$，　$f_i(x,y)g_i(x,y)\leqslant 0\,(i=1,2)(x^2+y^2\neq 0)$

4)　$\int_0^{\pm\infty} f_1(x,y)\,dx=\infty\qquad\int_0^{\pm\infty} f_2(0,y)\,dy=\infty$

則(3)的平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x,y)\overset{*2}{=}\int_0^x f_1(x,y)\,dx+\int_0^y f_2(0,y)\,dy$

則

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=f_1(x,y)[f_1(x,y)\varphi_1(x,y)+g_1(x,y)]+\left[\int_0^x\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}dx\right][f_2(x,y)\varphi_2(x,y)\\&\quad+g_2(x,y)]+f_2(0,y)[f_2(x,y)\varphi_2(x,y)+g_2(x,y)]\\&=\sum_{i=1}^{2}[f_i^2(x,y)\varphi_i(x,y)+f_i(x,y)g_i(x,y)]\end{aligned}$$

根据条件 $V(x,y)$ 为有无穷小上限与无穷大下限的定正函数，而 $\dfrac{dv}{dt}$ 为定負，故(3)的平凡解为全局漸近稳定。

推論1　若(3)中的 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 分别只为 X 和 Y 的函数，此时方程有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x)\varphi_1(x,y)+g_1(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(y)\varphi_2(x,y)+g_2(x,y)\end{aligned}\qquad(3')$$

其中$f_i(0)=g_i(o,o)=0\quad(i=1,2)$可得到$(3')$的平凡解也是全局渐近稳定的。

*2这里积分过程中 y 看作常数。以下的此类积分均作这一假設。

此时定理的第一个条件沒有了，而其他条件分别变为：

$$x\cdot f_1(x)>o\quad(x\neq o)\qquad yf_2(y)>o\quad(y\neq o)$$

$$\varphi_i(x,y)<o_{(i=1,2)}f_1(x)g_1(x,y)\leqslant o,\quad f_2(y)g_2(x,y)\leqslant o\qquad(x^2+y^2\neq o)$$

$$\int_0^{\pm\infty}f_1(x)dx=\infty\qquad\int_0^{\pm\infty}f_2(y)bx=\infty$$

而所作的 v 函数則变为：$V(x,y)=\int_0^x f_1(x)\,dx+\int_0^y f_2(y)dy$

从此可见$(3')$的平凡解为全局渐近稳定。

类似于(3)的方程：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x,y)\varphi_1(x,y)+g_1(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x,y)\varphi_2(x,y)+g_2(x,y)\end{aligned}\qquad(3'')$$

其中$\varphi_i(o,o)=g_i(o,o)=o$，$f_i(x.y)\neq o$，$_{(i=1,2)}$有如下定理：

定理4　若$(3'')$滿足下列附加条件：

1)　$x\cdot\dfrac{\varphi_2(x,y)}{f_1(x,y)}>o\quad(x\neq o)$，$y\cdot\dfrac{\varphi_1(o,y)}{f_2(o,y)}<o\quad(y\neq o)$，

2)　$x\cdot g_1(x,y)<o$，$g_2(x,y)\dfrac{\varphi_1(x,y)}{f_2(x,y)}\geqslant o\quad(x^2+y^2\neq o)$

3)　$\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{\varphi_2(x,y)}{f_1(x,y)}dx=\infty$，$\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{\varphi_1(o,y)}{f_2(o,y)}dy=-\infty$

4)　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\varphi_2(x,y)}{f_1(x,y)}\right)=\dfrac{-\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi_1(x,y)}{f_2(x,y)}\right)$且連續。

則$(3'')$的平凡解为全局渐近稳定。

証明：作 $V(x,y)=\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi_2(x,y)}{f_1(x,y)}dx-\int_0^y\frac{\varphi_1(o,y)}{f_2(o,y)}dy$

易见函数 V 滿足[2]之一切条件，故定理成立。

附注1,若方程$(3'')$中的$f_1(x,y)=\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x,y)=h_2(x)$，$f_2(x,y)=\varphi_2(y)$，$\varphi_1(x,y)=h_1(y)$，

則定理4就变成梁中超在文[3]中的定理3。

附注2,若方程$(3'')$中的$f_1(x,y)\equiv1$，$f_2(x,y)\equiv-1$，$\varphi_1(x,y)=\Phi_1(y)$，

$\varphi(x,y)=-F_2(x)$，$g_1(x,y)=F_1(x)$，$g_2(x,y)=\Phi_2(y)$,

則定理4就变成张炳根在文[4]中的定理1。

再考虑另一类方程：

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y)\varphi_1(x,y)+g_1(x,y)h_1(x,y) \qquad (4)$$

$$\frac{dy}{dt}=f_2(x,y)\varphi_2(x,y)+g_2(x,y)h_2(x,y)$$

其中$f_i(o,o)=g_i(o,o)=o$；$(i=1,2)$，

定理5 若(4)滿足下列附加条件：

1) $\dfrac{\partial f_1(x,y)g_1(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2(x,y)g_2(x,y)}{\partial x}$ 且連續

2) $g_i(x,y)\varphi_i(x,y)<o$，$f_i(x,y)h_i(x,y)\leqslant o\ (i=1,2)\ (x^2+y^2\neq o)$

3) $xf_1(x,y)g_1(x,y)>o\quad(x\neq o)$，$yf_2(o,y)g_2(o,y)>o\quad(y\neq o)$

4) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}f_1(x,y)g_1(x,y)dx=\infty$，$\displaystyle\int_0^{\pm\infty}f_2(o,y)g_2(o,y)dy=\infty$

則(4)的平凡解为全局漸近穩定。

証明：作 $V(x,y)=\displaystyle\int_0^x f_1(x,y)g_1(x,y)dx+\int_0^y f_2(o,y)g_2(o,y)dy$

則V滿足[2]的定理的一切条件，故定理成立。

考虑方程組：

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y) \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dt}=f_2(x,y)$$

其中$f_i(o,o)=o,(i=1,2)$

定理6 若对于(5)有連續可微函数$\varphi_i(x,y)\ (i=1,2)$存在，滿足条件：

1) $xf_1(x,y)\varphi_1(x,y)>o$，$(x\neq o)$，$yf_2(o,y)\varphi_2(o,y)>o$，$(y\neq o)$

2) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}f_1(x,y)\varphi_1(x,y)dx=\infty$，$\displaystyle\int_0^{\pm\infty}f_2(o,y)\varphi_2(o,y)dy=\infty$

3) $f_1^2(x,y)\varphi_1(x,y)+f_2^2(x,y)\varphi_2(x,y)<o\qquad(x^2+y^2\neq o)$

4) $\dfrac{\partial f_1(x,y)\varphi_1(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2(x,y)\varphi_2(x,y)}{\partial x}$ 且連續

則(5)的平凡解为全局漸近穩定。

証明：作 $V(x,y)=\displaystyle\int_0^x f_1(x,y)\varphi_1(x,y)dx+\int_0^y f_2(o,y)\varphi_2(o,y)dy$

仿以上方法得到証明。

例：
$$\frac{dx}{dt}=[xy^2e^{x^2}+xy^2e^{x^2y^2}+2x(e^y+e^{-y})+xe^{-y^2}]\frac{-e^{x^4y^2}}{x^2+2y^2+1}$$
$$\frac{dy}{dt}=[ye^{x^2}+x^2ye^{x^2y^2}+x^2(e^y-e^{-y})-x^2ye^{-y^2}]\frac{-e^{x^2y^4}}{x^2+y^2+1} \qquad (A)$$

只要取 $f_1(x,y)=xy^2e^{x^2}+xy^2e^{x^2y^2}+2x(e^y+e^{-y})+xe^{-y^2}$

$f_2(x,y)=ye^{x^2}+x^2ye^{x^2y^2}+x^2(e^y-e^{-y})-x^2ye^{-y^2}$

就能看出滿足定理 3 当 $g_i(x,y)\equiv 0$（$i=1.2$）的情形，故（A）的平凡解为全局漸近稳定。

§2.三阶方程組

考慮方程組：

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x)+\varphi_1(x.y.z)$$
$$\frac{dy}{dt}=f_2(y)+\varphi_2(x.y.z) \qquad (6)$$
$$\frac{dz}{dt}=f_3(z)+\varphi_3(x.y.z)$$

其中 $f_i(0)=\varphi_i(0,0,0)=0$，（$i=1,2,3$）

定理 7　若（6）滿足下列附加条件：

1) $xf_1(x)>o.(x\neq o);yf_2(y)>o,(y\neq o);zf_3(z)>o.(z\neq o)$

2) $\int_o^{\pm\infty}f_1(x)dx=\infty$，$\int_o^{\pm\infty}f_2(y)dy=\infty$，$\int_o^{\pm\infty}f_3(z)dz=\infty$

3) $f_1(x)[f_1(x)+\varphi_1(x.y.z)]+f_2(y)[f_2(y)+\varphi_2(x.y.z)]+f_3(z)[f_3(z)+\varphi_3(x.y.z)]<o\ (x^2+y^2+z^2\neq o)$

则（6）之平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x,y,z)=\int_o^x f_1(x)dx+\int_o^y f_2(y)dy+\int_o^z f_3(z)dz$

仿以上方法得証。

考慮方程組：

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x)+\varphi_1(x.y.z)$$
$$\frac{dy}{dt}=f_2(z)g(y)+\varphi_2(x.y.z) \qquad (7)$$
$$\frac{dz}{dt}=f_3(y)h(z)+\varphi_3(x.y.z)$$

其中 $f_i(o)=\varphi_i(o,o,o)=0$，$g(y)\neq o$，$h(z)\neq o$

定理 8　若（7）滿足条件：

1) $xf_1(x)>0$, $(x\neq 0)$, $y\dfrac{f_3(y)}{g(y)}>0$, $(y\neq 0)$, $z\dfrac{f_2(z)}{h(z)}<0$, $(z\neq 0)$

2) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty} f_1(x)dx=\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{f_3(y)}{g(y)}dy=\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{f_2(z)}{h(z)}dz=-\infty$.

3) $f_1(x)[f_1(x)+\varphi_1(x.y.z)]+\dfrac{f_3(y)\varphi_2(x.y.z)}{g(y)}-\dfrac{f_2(z)\varphi_3(x.y.z)}{h(z)}<0$

$(x^2+y^2+z^2\neq 0)$

則(7)之平凡解为全局漸近稳定。

証明：作$V(x.y.z)=\displaystyle\int_0^x f_1(x)dx+\int_0^y\frac{f_3(y)}{g(y)}dy-\int_0^z\frac{f_2(z)}{h(z)}dz$

仿以上方法得証。

考慮方程組：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=X(x.y.z)+f_1(x)[g_2(y)+g_3(z)]\\ \frac{dy}{dt}&=Y(x.y.z)+f_2(x)\varphi_2(y)\\ \frac{dz}{dt}&=Z(x,y,z)+f_2(x)\varphi_3(z)\end{aligned}\tag{8}$$

其中$X(o.o.o)=Y(o.o.o)=Z(o,o,o)=f_2(o)=g_2(o)=g_3(o)=o$, $f_1(x)\neq o$, $\varphi_2(y)\neq o$, $\varphi_3(z)\neq o$,

定理9 若(8)滿足条件：

1) $x\cdot\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}>0$ $(x\neq 0)$, $y\dfrac{g_2(y)}{\varphi_2(y)}<0$ $(y\neq o)$, $z\cdot\dfrac{g_3(z)}{\varphi_3(z)}<0$ $(z\neq o)$

2) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx=\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{g_2(y)}{\varphi_2(y)}dy=-\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pm\infty}\frac{g_3(z)}{\varphi_3(z)}dz=-\infty$

3) $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}X(x.y.z)-\dfrac{g_2(y)}{\varphi_2(y)}Y(x.y.z)-\dfrac{g_3(z)}{\varphi_3(z)}Z(x,y,z)<0$, $(x^2+y^2+z^2\neq 0)$

則(8)的凡解为全局漸近稳定。

証明：作$V(x.y.z)=\displaystyle\int_0^x\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx-\int_0^y\frac{g_2(y)}{\varphi_2(y)}dy-\int_0^z\frac{g_3(z)}{\varphi_3(z)}dz$

仿以上方法得証。

§3. n阶方程組

考慮方程組：

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(i=1,\cdots,)\tag{9}$$

其中$F_i(o,\cdots,o)=o(i=1,\cdots,n)$

定理10　若有連續可微函数 $\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ 使得:

1) $\frac{\partial}{\partial x_p}[F_1(x_1\cdots,x_n)\Phi_1(x_1,\cdots,x_n)] = \frac{\partial}{\partial x_1}[F_p(x_1,\cdots,x_n)\Phi_p(x_1,\cdots,x_n)]$ $(p=2,\cdots,n)$

且連續

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[F_1(o,\cdots o,x_m,\cdots x_n)\Phi_1(o,\cdots o,x_m,\cdots,x_n)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_m}[F_k(o,\cdots o,x_m,\cdots x_n)\Phi_k(o,\cdots o,x_m,\cdots x_n)]$$

$(m<k; k=3,\cdots n; m=2,3,\cdots n-1)$ 且連續

2) $\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)<0$ $(i=1,\cdots,n)$

3) $x_1\cdot F_1(x_1,\cdots,x_n)<0$, $(x_1\neq o)$ $x_pF_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)<0$ $(x_p\neq o)$ $(p=2,\cdots,n)$

4) $\int_o^{\pm\infty}F_1(x_1,\cdots,x_n)\Phi_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1=\infty$, $\int_o^{\pm\infty}F_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)$

$\Phi_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)dx_p=\infty$ $(p=2,\cdots,n)$

則(9)的平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x_1,\cdots,x_n)=\int_o^{x_1}F_1(x_1,\cdots,x_n)\Phi_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1+\sum_{p=2}^{n}\int_o^{x_p}F_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)$

$\Phi_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)dx_p$

則 $$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_1,\cdots,x_n)\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)$$

故(9)的平凡解为全局漸近稳定。

考慮方程組:

$$\frac{dx_i}{dt}F_i(x_1,\cdots,x_n)\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)\quad (i=1,\cdots,)\qquad (10)$$

其中 $F_i(o, \cdots, o)=o$ $(i=1, \cdots n)$

定理11. 若(10)滿足条件:

1) $\frac{\partial F_1(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_p}=\frac{\partial F_p(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1}$ $(p=2,\cdots,n)$ 且連續

$$\frac{\partial}{\partial x_k}F_m(o,\cdots,o,x_m,\cdots,x_n)=\frac{\partial}{\partial x_m}F_k(o,\cdots,o,x_m,\cdots,x_n)$$

$(m<k;\ m=2,3,\cdots,n-1;\ k=3,\cdots,n)$ 且連續

2) $\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)<o$ $(i=1\cdots,n)$

3) $x_1F_1(x_1,\cdots,x_n)>o$ $(x_1\neq o)$, $x_pF_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)>o$ $(x_p\neq o)$ $(p=2,\cdots,n)$

4) $\int_o^{\pm\infty}F_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1=\infty$, $\int_o^{\pm\infty}F_p(o,\cdots,o,x_p\cdots x_n)dx_p=\infty$, $(p=2,\cdots,n)$

則(10)的平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^{x_1}F_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1+\sum_{p=2}^{n}\int_0^{x_p}F_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)dx_p$

即得証明。

考慮方程組：

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i(x_1,\cdots,x_n)\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)+G_i(x_1,\cdots,x_n)H_i(x_i,\cdots,x_n)\quad(i=1\cdots,n)\qquad(11)$$

其中 $F_i(o,\cdots,o)=G_i(o,\cdots,o)=o$, $(i=1,\cdots,n)$

定理12　若(11)滿足条件：

1) $\dfrac{\partial F_1(x_1,\cdots,x_n)G_1(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_p}=\dfrac{\partial F_p(x_1,\cdots,x_n)G_p(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1}$　且連續 $(p=2,\cdots,n)$

$\dfrac{\partial}{\partial x_k}[F_m(o,\cdots,o,x_m\cdots,x_n)G_m(o,\cdots,o,x_m,\cdots,x_n)]=\dfrac{\partial}{\partial x_m}[F_k(o,\cdots,o,x_m,\cdots,x_n)$

$G_k(o,\cdots,o,x_m,\cdots,x_n)]$　$(m<k;m=2,\cdots,n-1;k=3,\cdots,n)$且連續

2) $\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)G_i(x_1,\cdots,x_n)<0$, $F_i(x_1,\cdots,x_n)H_i(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0$

$(x_1^2+\cdots+x_n^2\neq o)$ $(i=1,\cdots,n)$

3) $x_1F_1(x_1,\cdots,x_n)G_1(x_1,\cdots,x_n)>o,(x_1\neq o)$,

$x_pF_p(o\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)G_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)>o$ $(x_p\neq o)$　$(p=2,\cdots,n)$

4) $\int_0^{\pm\infty}F_1(x_1,\cdots,x_n)G_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1=\infty$,

$\int_0^{\pm\infty}F_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)G_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)dx_p=\infty$　$(p=2,\cdots,n)$

則(11)的平凡解为全局漸近稳定。

証明：作 $V(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^{x_1}F_1(x_1,\cdots,x_n)G_1(x_1,\cdots,x_n)dx_1$

$$+\sum_{p=2}^{n}\int_0^{x_p}F_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)G_p(o,\cdots,o,x_p,\cdots,x_n)dx_p$$

即可証明。

为了看看这些关于高阶方程組的定理的实际价値，我們举出定理11当 $n=3$ 时的例子。

例：
$$\frac{dx}{dt}=[2x(e^{yz}+e^{-yz})+xy^2z^2e^{x^2z^2}+xy^2z^2e^{x^2}+xe^{-y^2z^2}]\frac{-e^{x^4y^2z^2}}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$\frac{dy}{dt}=[x^2z(e^{yz}-e^{-yz})+ye^{x^2z^2}+yz^2e^{x^2}-x^2yz^2e^{-y^2z^2}]\frac{-e^{x^2y^4z^2}}{x^2+2y^2+3z^2+1}\qquad(B)$$

$$\frac{dz}{dt}[x^2y(e^{yz}-e^{-yz})+x^2y^2ze^{x^2z^2}+y^2ze^{x^2}+z-x^2g^2ze^{-y^2z^2}]\frac{-e^{x^2y^2z^4}}{4x^2+3y^2+2z^2+1}$$

只要取:

$$f_1(x,y,z)=2x(e^{yz}+e^{-yz})+xy^2z^2(e^{x^2z^2}+e^{x^2})+xe^{-y^2z^2}$$

$$f_2(x,y,z)=x^2z(e^{yz}-e^{-yz})+ye^{x^2z^2}+yz^2(e^{x^2}-x^2e^{-y^2z^2})$$

$$f_3(x,y,z)=x^2y(e^{yz}-e^{-yz})+x^2y^2z(e^{x^2z^2}-e^{-y^2z^2})+y^2ze^{x^2}+z$$

就满足定理11当$n=3$时的一切条件，故(B)的平凡解为全局漸近稳定。

本文作者对許淞庆教授、胡金昌教授和黎百恬先生的指导和鼓励表示衷心的感謝。

参 考 文 献

〔1〕 А.М.Ляпунов. ОБ задача ОБ устойчивости движения.М.Л, гостехиздт.1950.

〔2〕 Е.А. Барбашин и Н.Н.Красовский : ОБ устойчивости движения в целом.ДАН86, No.3(1952), 453—456

〔3〕 梁中超; 几类非綫性微分方程組解的全局稳定性。山东大家学报，1960年第1期，数学版。

〔4〕 张炳根: 二阶常微分方程組解的全局稳定性。数学学报，vol. 9 No4.1959。

ON THE PROBLEM OF STABILITY IN THE LARGE FOR SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Chan Wai-Lan, Wong You-Chang and Chou Yu-Rhen

Abstract

In this paper we present certain typess of systems of differential equations the trivial solution of which is stable in the large. On the basis of Barbasin-Krasovskii's method of infinite large V-function, we derive a series of sufficient conditions for such a stability. 1 deals with plane-system, 2 space-system and 3 n-dimensional system. The contents consists of twelve theorems under each of which the conditions are so formulated in symbolical expressions that one can read them directly from the text.