

π 介子的輻射衰变

郭 碩 鴻

一、引 言

本文的目的是計算 π 介子的衰变过程

$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu + \gamma \quad (1)$$

和 $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu \quad (2)$

的相对几率。以前曾有不少作者討論过这問題 [1] [4] 对这問題的注意主要是和以前实验上没有发现

$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu \quad (3)$$

相联系的。这些工作指出对于 A 和 V 耦合, 过程 (1) 的几率特别小, 不会超过过程 (3) 的几率, 而给出过程 (3) 和 (2) 的相对几率仍然大于当时实验所允许的限制; 至于其他耦合则给出与实验完全不符的结果。不久以前实验上证实了过程 (3) 的存在 [5], 并且所得的结果和费曼、盖尔曼以及馬夏克、森德香 [6], [7] 所提出的 V-A 型普适费米弱作用所预计的结果在数量级上相符, 即过程 (3) 的分枝比 $\sim 10^{-4}$ 。把费曼等人的理论应用于介子和超子的衰变問題上也得出很好的结果 [8], [9]。由于这样, 我們应用这一理论重新計算过程 (1) 与 (2) 的相对几率。

以前的作者对这問題的計算多是利用规范不变性等考虑来确定跃迁矩陣元的形式, 所得的结果依赖于一些与强作用的处理有关的未定参数。由于在 V-A 型弱作用中, 由规范不变性所得的“主要項”变得特别小, 因而强作用的处理的影响就特别重要。本文在微扰論范围内给出这些参数的一个計算, 所得的结果不依赖于截断能量。

以下我們首先从协变性和规范不变性的考虑规定矩陣元的形式, 当光子能量 $\omega \rightarrow 0$ 时, 这部分的計算是可以完全不依赖于强作用的处理的。然后我們計算当 $\omega \neq 0$ 时在矩陣元中出现的附加項。这部分用微扰論計算, 由于所出现的积分是收敛的, 因此和切断无关。这样我們得出过程 (1) 和 (2) 的分枝比, 它是基本上和在計算过程 (2) 时所用的切断方法无关的。最后我們討論計算的结果。

二、衰变几率的計算

在最低次微扰論中, 和 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 相应的费曼图形有三类 (图 1a-c)。在这里我們认为 π 介子的衰变是通过重粒子对来进行的。我們注意到, 当和 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \gamma$ 的费曼图形相比较时 (图 1d), 和图 (1a), (1b) 相应的 S 矩陣部分是不依赖于强作用的处理

理的。这部分的计算可以通过有效耦合常数来进行,即令π介子与轻子对相互作用的 有效哈密顿量为

$$H_I' = \frac{g'}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_e k_\mu \varphi_\pi \quad (4)$$

其中 g' 为有效耦合常数, K_μ 为π介子的动量四维矢量。图(1c)的贡献是依赖于强作用的处理的。但是当光子能量 ω 趋于零时,它的贡献完全由规范不变性的考虑决定,即由(4)式中的 K_μ 改为 $-eA_\mu$ 。当光子能量不为零时,图(1c)给出的附加项低一个 $(m_\pi\omega/m_N^2)$ 的数量级,其中 m_N 为核子质量。下面的微扰论计算具体地验证了这点。首先我们忽略了这附加项,这时跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned} S' = & \frac{i(2\pi)^4}{2\sqrt{E_\pi\omega}} \frac{eg'}{\sqrt{2}} \langle \nu | \left\{ \hat{K} (1 + \gamma_5) (-i) \frac{i(\hat{P} - \hat{k}) - m_e}{(\hat{P} - \hat{k})^2 + m_e^2} \hat{\epsilon} + \right. \\ & + (\hat{K} - \hat{k}) (1 + \gamma_5) (-i) \frac{1}{(K - k)^2 + m_\pi^2} (-i)(2K - k)_\nu \epsilon_\nu + \\ & \left. i \hat{\epsilon} (1 + \gamma_5) \right\} | e \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $K = P + q$, k 分别代表π, e^+ , ν , γ 的动量四维矢量, ϵ 代表光子极化矢量,其他符号和文献[8]中所用的一致。

容易验证(5)式的规范不变性。为计算简便起见,选取特殊规范 $(K\epsilon) = 0$,即在π介子静止坐标中选取 $\epsilon_4 = 0$ 。这样,(5)式括号中的第二项消去,在剩下的项中,利用动量能量守恒关系式

$$K = q - P + R, \quad (6)$$

罗伦兹条件 $(k\epsilon) = 0$ 以及 $\langle \nu | \hat{q} = 0$, $(i\hat{p} + m) | e \rangle = 0$, $k^2 = 0$, $P^2 = -m_e^2$ 等关系,最后化简为

$$S' = \frac{-i(2\pi)^4}{2\sqrt{E_\pi}\omega} \frac{eg'}{\sqrt{2}} m_e \langle \nu | (1 - \gamma_5) \hat{\epsilon} \frac{\hat{k} + 2(P\epsilon)}{2(Pk)} | e \rangle \quad (7)$$

我们注意到,在V-A耦合的情形下,(7)式中出现一个因子 m_e ,由于这点,衰变几率低了一个 $(m_e/m_\pi)^2$ 的数量级,因此我们原来忽略了的S矩阵中的有 $(\omega m_\pi/m_N^2)$ 因子的项就不合法。下面我们用微扰论计算这项。

图(1c)对S矩阵元的贡献为

$$S_e = -\frac{iegG}{\sqrt{2}} J(k) \langle \nu | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e \rangle \quad (8)$$

其中 g 为π介子与重粒子对的耦合常数, G 为普遍弱作用耦合常数。

$$J(k) = \int Sp \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{P} - \hat{k}) - m_1}{(P - k)^2 + m_1^2} \varepsilon \frac{i\hat{P} - m_1}{P^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i(\hat{P} - \hat{K}) - m_2}{(P - K)^2 + m_2^2} \right] d^4 P \quad (9)$$

首先我們驗證，當 $k=0$ 時，(9) 式可從上圖 (1d) 相應的積分 I 导出，

$$I = \int Sp \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i\hat{P} - m_2}{p^2 + m_2^2} \right] d^4 p \quad (10)$$

這里我們令帶電的那一條重粒子綫的動量為 $p+k$ ，由於恒等式

$$\frac{\partial}{\partial K_\mu} \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} = i \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_\mu \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \quad (11)$$

得

$$\frac{\partial}{\partial K_\mu} I = i \int Sp \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{P} + \hat{K}) - m_1}{(p + K)^2 + m_1^2} \gamma_5 \frac{i\hat{P} - m_2}{p^2 + m_2^2} \right] d^4 p$$

因此

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial I}{\partial K_\mu} = iJ(0) \quad (12)$$

從變換性質可見 I 為一矢量，它必與 K_μ 成正比，即

$$I = C K_\mu \quad (13)$$

故

$$J(0) = -iC \varepsilon_\mu \quad (14)$$

比較 (13) 和 (14) 式，即得當 $k \rightarrow 0$ 時，圖 (1c) 的貢獻相當於圖 (1d) 的矩陣之中把 K_μ 代以 $-eA_\mu$ 。這結論是不依賴於微擾論的，它反映了規範不變性的普遍要求。由此，在 (7) 式中我們已把 $J(0)$ 項計算在內，因此圖 (1c) 的附加貢獻為

$$S'' = -\frac{iegG}{2\sqrt{2E_\pi\omega}} [J(k) - J(0)] \langle \nu | \gamma_\mu (1 + \gamma_5) | e \rangle \quad (15)$$

表式 $J(k) - J(0)$ 經過化簡後為

$$\begin{aligned} J(k) - J(0) = \int Sp \left[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \left\{ \frac{-i\hat{K} \hat{\varepsilon} \gamma_5}{[(p-k)^2 + m_1^2][(p-K)^2 + m_2^2]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-i\hat{K} \hat{\varepsilon} \gamma_5 (i\hat{p} + m_1)(i\hat{K} - m_1 + m_2) - 2(pk) \hat{\varepsilon} \gamma_5 m_2}{(p^2 + m_1^2)[(p-k)^2 + m_1^2][(p-K)^2 + m_2^2]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4i(pk)(p\hat{\varepsilon}) \gamma_5 (i\hat{p} + m_1)(i\hat{K} - m_1 + m_2)}{(p^2 + m_1^2)^2[(p-k)^2 + m_1^2][(p-K)^2 + m_2^2]} \right\} \right] d^4 p \quad (16) \end{aligned}$$

利用一些近似，可以把 (16) 式大為化簡。注意到 $m_1 - m_2 \ll m_1$ ，我們忽略去 $m_1 - m_2$ 的一項。這樣 (16) 式最末一項將比其他項低 $m_\pi \omega / m_N^2$ 的數量級，因而可以忽略不計。在其他項中去掉含奇數 γ 矩陣的項之後，最後 (16) 式的被積函數變為

$$\frac{Sp[m \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \hat{K} \hat{\varepsilon} \hat{K} + 2m(pk) \gamma_\mu \hat{\varepsilon}]}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2][(p-K)^2 + m^2]}$$

其中的 m 可取 m_1 和 m_2 的平均值。把 Sp 運算算出後，得

$$J(k) - J(0) = 4m \int d^4 p \frac{\varepsilon_\mu [2(pk) - (\hat{K} \hat{K})] - \varepsilon_\mu \nu_{\lambda\sigma} \varepsilon_{\nu\lambda} \hat{K}_\sigma}{(p^2 + m^2)[(p-k)^2 + m^2][(p-K)^2 + m^2]} \quad (17)$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ 為全反對稱張量，含有它的一項為弱作用中矢量耦合的貢獻，另一項為赝矢

耦合的贡献。

把(17)式用标准方法化为

$$J(k) - J(0) = 8m \int d^4 p \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\epsilon_p [2(pk) - (\hbar K)] + \Delta_p}{[(p-a)^2 + b^2]^3} \quad (18)$$

其中

$$\Delta_p = \epsilon_p \nu_{\lambda\delta} \epsilon_\nu \hbar_{\lambda} K_\sigma \quad (19)$$

$$a = Ky + \hbar(x-y) \quad (20)$$

$$b^2 = m^2 + K^2 y - [Ky + \hbar(x-y)]^2 \simeq m^2 \quad (21)$$

因为 $|K^2| \ll m^2$ 。把积分变数变换后, 得

$$\begin{aligned} J(k) - J(0) &= 8m \int d^4 p \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\epsilon_p (\hbar K) (2y-1) + \Delta_p}{(p^2 + m^2)^3} \\ &= \frac{4\pi^2 i}{m} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\epsilon_p (\hbar K) (2y-1) + \Delta_p \right] \\ &= \frac{2\pi^2 i}{m} \left[-\frac{1}{3} \epsilon_p (\hbar K) + \Delta_p \right] \end{aligned} \quad (22)$$

因为K只有第4分量, 令k方向为第3方向, 即得

$$\Delta_p = i\omega_{m\pi} \epsilon'_p \quad (23)$$

其中

$$\epsilon'^{(1)} = -\epsilon^{(2)} \quad \epsilon'^{(2)} = \epsilon^{(1)} \quad (24)$$

$\epsilon^{(1)}$ 和 $\epsilon^{(2)}$ 分别为光子的两个独立极化矢量, 下面我们将取 $\epsilon^{(1)}$ 在衰变平面内, $\epsilon^{(2)}$ 则和衰变平面正交。

由(15)及(22)式, 得到

$$S' = i \frac{2\pi^2 g G e}{2m \sqrt{2m\pi\omega}} \omega_{m\pi} \langle \nu | (\hat{\epsilon}' - \frac{1}{3} \hat{\epsilon}) (| + r_s) | e \rangle \quad (25)$$

把(25)式和(7)式相加即得 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 的跃迁矩阵元。由于(7)式中 $\langle \nu | \dots | e \rangle$ 内出现偶数个 γ 矩阵, 而(25)式中出现奇数个 γ 矩阵, 因此当在计算 $|S|^2$ 时若在投影算符中忽略去电子质量, 这两部分没有相干项。下面我们分别计算(7)和(25)式对衰变几率的贡献。

经过计算, 得到 $|S'|^2$ 的对终态粒子自旋和光子极化方向求和后的表式,

$$\begin{aligned} \sum |S'|^2 &= (2\pi)^8 \frac{e^2 g'^2}{4m\pi\omega} \frac{m e^2}{E e E \nu} \left\{ -1 - \frac{(\hbar K)}{(\hbar p)} + p^2 \sin^2 \theta \left[\frac{(pq) - (\hbar K)}{(p\hbar)^2} \right] \right\} \\ &= (2\pi)^8 \frac{e^2 g'^2}{m\pi\omega} \frac{m e^2}{E e E \nu} \left\{ -1 + \frac{m\pi}{E e (1 - \alpha \cos \theta)} + \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{(1 - \alpha \cos \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{E e m\pi - m e^2 + \omega [m\pi - E e (1 - \alpha \cos \theta)]}{\omega^2 E e^2} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

其中 θ 为电子和光子动量方向的夹角, 而

$$\alpha = p_e / E_e,$$

对于能谱中的大部分的电子, $\alpha \simeq 1$ 。在以下的计算中, 在不引致积分发散的情形下, 都令 $\alpha = 1$ 。对相空间积分后, 得到这部分对衰变几率的贡献为

$$W' = \frac{e^2}{4\pi} \frac{g'^2 m_\pi^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{\pi m_\pi} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{m_\pi}{m_e} + \left(\ln \frac{m_\pi}{m_e} - \frac{1}{2} \right) \left(\ln \frac{1}{2\epsilon} - 1 \right) - \frac{5}{16} - 0.64 \right] \quad (28)$$

其中由于有一项对高能电子发散, 我们在对电子能量积分时的上限取为

$$E_{\text{emax}} = \epsilon m_\pi = \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi} = \epsilon m_\pi$$

这发散来源于电磁场作用的红外发散。 $m_\pi \epsilon$ 亦近似地相当于对低能光子的截断能量。

耦合常数 g' 的值可以从过程 (2) 的衰变几率得出。令 $\pi \rightarrow \nu$ 的相互作用为 (4) 的形式, 得到

$$\frac{g'^2 m_\pi^2}{4\pi} = \frac{2m_\pi \tau^{-1}}{m_\pi^2 \left[1 - \left(\frac{m_\nu}{m_\pi} \right)^2 \right]^2} \quad (29)$$

其中 τ^{-1} 为过程 (2) 的衰变几率, 从实验值 $\tau = 2.56 \times 10^{-8}$ 秒, 得

$$\frac{g'^2 m_\pi^2}{4\pi} = 3.53 \times 10^{-15} \quad (30)$$

取截断能量 $m_\pi \epsilon = m_e$, 得到

$$W' = 4.8 \times 10^2 \text{秒}^{-1} \quad (31)$$

现在回到 S'' 的贡献。在 (25) 式中, ϵ' 项来自矢量耦合, ϵ 项来自赝矢耦合。容易看出, 在计算衰变几率时, 这两项不会干涉。当对光子极化方向求和后, 两项得出的结果形式上完全一致, 而赝矢部分的贡献为矢量部分的 $1/9$ 。我们先计算矢量耦合部分。在计算 $\sum |S''|^2$ 之前, 首先必须对所有可能的重粒子对的贡献求和。这里所用的方法和文献 [9] 所用的一致, 并且采用相同的耦合常数。这样 (25) 式中的 g/m 变为

$$\frac{\sqrt{2} g_1}{m_N} + \frac{2g_2}{m_\Lambda + m_\Sigma} + \frac{\sqrt{2} g_4}{m_\Xi} = 1.92 \frac{g_1}{m_N} \quad (32)$$

其中 g_1, g_2, g_4 分别为 $(\pi NN), (\pi \Lambda \Sigma)$ 以及 $(\pi \Xi \Xi)$ 的耦合常数, $g_1 = g_4 = -13.7$, $g_2 = 8.2$ 。因此

$$S_V'' = \frac{2\pi^2 G}{2\sqrt{m_\pi \omega} \sqrt{2}} \omega m_\pi \times 1.92 \frac{g_1}{m_N} \langle \sqrt{\frac{3}{2}} (1 + \gamma_5) | e \rangle \quad (33)$$

对末态自旋求和后, 得

$$\sum |S_V''|^2 = 2\pi^4 G^2 \frac{m_\pi \omega}{m_N^2} (1.92 g_1)^2 \frac{1}{E_\nu} \left[\frac{M}{2} (1 + \cos \theta) - \frac{M - E_e + E_e \cos \theta}{2} - E_e \sin^2 \theta \right] \quad (34)$$

对相空间积分后, 最后得到 S_V'' 对衰变几率的贡献

$$W_V'' = 1.0 \times 10^1 \text{秒}^{-1} \quad (35)$$

由于 S'' 中赝矢耦合部分对 W 的贡献为矢量部分的 $1/9$, 故 S'' 对衰变几率的贡献为

$$W'' = 1.1 \times 10^1 \text{秒}^{-1} \quad (36)$$

把 (36) 和 (31) 式比较, 可见 W'' 比 W' 的值低一个数量级。由于 W' 完全是来自弱作用的赝矢耦合部分, 而 W'' 主要来自矢量耦合部分, 这也表示在 $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$ 中起主要作用的是赝矢耦合部分。

把 (36) 和 (31) 相加, 即得 $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$ 的衰变几率

$$W_T \cong W' + W'' = 4.9 \times 10^2 \text{秒}^{-1} \quad (37)$$

与 $\pi \rightarrow \mu + \nu$ 的几率 $W = 3.9 \times 10^7 \text{秒}^{-1}$ 比較, 得到过程 (1) 的分枝比

$$P_T = W_T / W = 1.3 \times 10^{-5} \quad (38)$$

三 討 論

我們得出的結果和以前一些作者 [1]—[4] 所得的結果大致上符合, 但是也有一些差別。在 [1] 中完全忽略了电子质量, 而对 W'' 只作数量級的估計, 得到 $P_T \sim 10^{-8}$, 这結果可能是太低的。其他作者也只是把 W'' 估計出来。我們現在的計算虽然是建立在微扰論的基础上, 但是它对于衰变几率的問題仍有一定的参考价值; 特别是由于在計算过程中不用切断, 它是可以較好地反映出数量級来的。而且由于依赖于强作用处理的一项 W'' 相对地不大, 可以預期, 当把强作用作更精确的处理时, 我們所得的結果不会有太大的改变。虽然目前关于过程 (1) 的衰变几率还没有准确的实验数据 [10], 我們的結果和现有的实验材料也是沒有矛盾的。这一点也进一步驗明了 V-A 型普适費米弱作用是可以应用到介子的衰变现象中的。

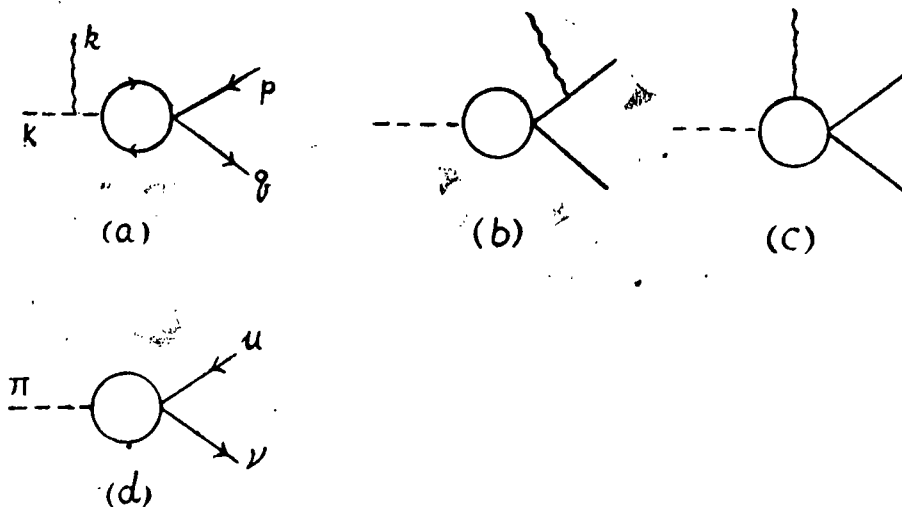


图 (1)

参 考 文 献

- ① S.B.Treiman & H.W.Wyld Phys. Rev. 101, 1552, (1956)
- ② Tetsuo Eguchi Phys. Rev. 102, 879, (1956)
- ③ Kerson Huang & F.E.Low Phys. Rev. 109, 1400, (1958)
- ④ E.Ferrari Nuo. Cim. 8, 155, (1958)
- ⑤ T.Fazzini et. al. Phys. Rev. Let. 1, 247, (1958)
- G.Impeduglia et. al. Phys. Rev. Let. 1, 249, (1958)

- ⑥ R.P.Feynman & M.Gell-mann, Phys. Rev. 109, 193, (1958)
- ⑦ G.Sundershan & R.Marshak Phys. Rev. 109, 1860, (1958)
- ⑧ 李文鐸、冼鼎昌、何祚床、朱洪元, 物理學報15, 32, (1959)
- ⑨ 陳中謨、何祚床、冼鼎昌、朱洪元, 物理學報15, 63, (1959)
- ⑩ J.M.Cassels, et. al. Proc. Phys. Soc. A, 70, 729 (1957)

THE RADIATIVE DECAY OF π -MESONS

Kwok Shek-hung

ABSTRACT

The relative probability of the radiative decay of π -meson to the $\pi-\mu$ decay was calculated, assuming a universal Fermi interaction of V-A type. Matrix elements were write down following the consideration of covariance and gauge in variance. The results though partly made use of perturbation were cut-off independent. A V-A interaction gave results not contradict With experiment.