

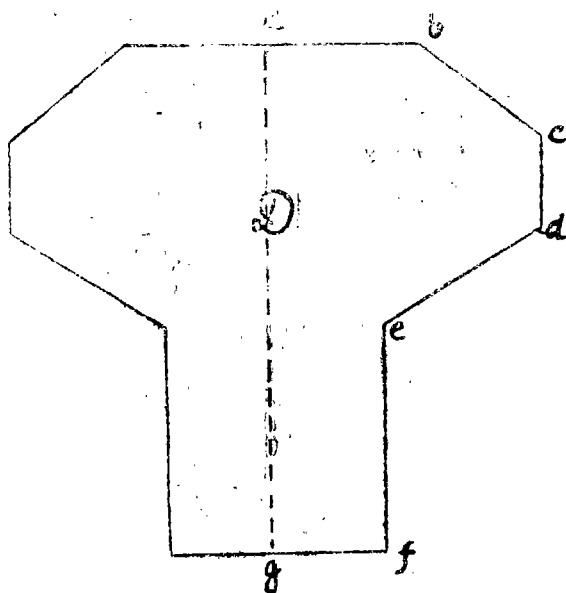
双調和方程数值解中 “松弛——消元法”的应用

傅凱新

我們知道对大头坝体进行应力分析, 将迂到如下数学問題:

$$\begin{cases} \nabla^4 \phi = 0 & \text{在 } D \text{ 內} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\Gamma} = R(x, y), \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\Gamma} = S(x, y), \quad \phi|_{\Gamma} = T(x, y) \end{cases}$$

其中 Γ 为区域 D 的边界。



(图一)

問題的近似解借助于网格法, 当确定步长 h 后在区域 D 上引直綫族:

$$X = X_i = X_0 + ih, \quad Y = Y_k = Y_0 + Kh \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$$

兩族平行直綫构成正方形网格, $X = X_i, Y = Y_k$ 的交点称为結点. 若以 p_{ik} 表結点 (i, k)

与边界之最短距离,而结点 $(i, k) \in D$ 。则当 $0 < p_{ik} < h$ 时 (i, k) 称为临近边界点,而当 $p_{ik} \geq h$ 时 (i, k) 则称之为内结点。

于任何内结点上皆可建立一如次形的方程:

$$\nabla^4 \phi = \frac{1}{h^4} \left[20\phi_0 - 8 \sum_{i=1}^4 \phi_i + 2 \sum_{j=5}^8 \phi_j + \sum_{K=9}^{12} \phi_K \right] = 0 \quad (\text{图二})$$

因为写相容方程时要用到一点上、下、左、右两格各点的 ϕ 值,故对临近边界点要分别进行处理(处理办法参看文献(1)),将处理结果代入内结点公式使得方程的个数和内点的数目一致。

数值解法——“松弛——消元法”

用网格法解双调和方程,使用松弛法较为方便,对于具体问题,我们提出全局松弛、局部引用消元法解方程组的方案。兹将所采用的方法作以下一般性的叙述。

我们知道线性代数方程组可以写为如下形式:

$$AX - b = 0$$

当用其他办法确定了原始向量 $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})'$ 代入方程右边即产生一偏差向量 R ,

$$AX^{(0)} - b = R$$

其中 $R = (R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, \dots, R_n^{(0)})'$ 。松弛法的目的即是要消灭这些偏差。

我们称任何内点所建立的方程

$$20\phi_0 - 8 \sum_{i=1}^4 \phi_i + 2 \sum_{j=5}^8 \phi_j + \sum_{k=9}^{12} \phi_k = 0$$

为十三点公式。皆点所建立方程的余差称为皆点的余差。

I. 十三点公式的余差分布:若选择好初始向量 $\phi_0 = (\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \dots, \phi_n^{(0)})$, 代入十三点公式,则在0点(参见图二)我们有

$$20\phi_0 - 8 \sum_{i=1}^4 \phi_i + 2 \sum_{j=5}^8 \phi_j + \sum_{k=9}^{12} \phi_k = R_0^{(0)}$$

其他的点可以进行类似计算,当 $R_0^{(0)}$ 向量确定后即可进行松弛。

我们知道如果任意一点 ϕ 值改变了一个单位,则该点的余差增加20(我们称 R_i 为第 i 点的余差),因此适当的调整一点的 ϕ 值,可使该点的余差消灭。但这一点余差消灭对其他点有影响,影响如图(图三)所示。即是,改变一点的 ϕ 值,将牵动上下左右共十二点上的余差。

(图三)

松弛计算,收敛速度一般不快,因为如果操作的十三个点中在0点变动 ϕ 值一个单位所引起余差的变化代数之和为0,即

$$20 - 4 \times 8 + 2 \times 4 + 1 \times 4 = 0$$

这意味着松弛计算中,有一大部分工作的作用仅在将中央各点的余差推展到边界附近去。因而在范围大内点多的情况下收敛速度也就更慢了。在松弛时必须审慎考虑改变方

式的選擇,一般說中心點余差的符號和上下左右四點余差符號相異時,可以大膽予以改變能使此五點余差降低。

逐個松馳的收斂速度很慢,因而必須集體松馳(幾個未知數一齊改變)或整塊松馳的辦法。我們舉出二、三、四點整塊松馳影響表如下:

(圖四)

II 用解方程的方法加速收斂:

在點數多的情況下收斂速度很慢,余差不易消滅往往此起彼伏。尤其是各點余差同號的情況下很難對付。但我們採取解方程組的辦法來加速收斂。

考慮右邊圖形,設0點有一殘余值 $R_0=20$,如將 ϕ_0 減少一個單位,其餘各點不動,則 R_0 消失而余差將按照圖三所示分配到周圍十二點上。現擬就通過改動 ϕ_0 、 $\phi_1 \sim \phi_4$ 、 $\phi_5 \sim \phi_8$ 的辦法使 R_0 消失後,在1~8點均無新的 R 產生,這樣來達到迅速分布余差的目的。

(圖五)

設: ϕ_0 增加 $\Delta\phi_0$, $\phi_1 \sim \phi_4$ 增加 $\Delta\phi_1$, $\phi_5 \sim \phi_8$ 各增加 $\Delta\phi_5$,

$$\text{則有 } R_0 + 20\Delta\phi_0 - 32\Delta\phi_1 + 8\Delta\phi_5 = 0$$

$$25\Delta\phi_1 - 8\Delta\phi_0 - 16\Delta\phi_5 = 0$$

$$22\Delta\phi_5 - 16\Delta\phi_1 + 2\Delta\phi_0 = 0$$

置 $R_0 = 1$, 解之得 $\Delta\phi_0 = 0.155$, $\Delta\phi_1 = -0.076$, $\Delta\phi_5 = -0.0412$

故如果 R_0 為一時,在 ϕ_0 減去0.155, 1~4點減去0.076和5~8點減去0.0412後, R_0 消失1~8點余差不變,其餘各點影響位如右圖所示。

(圖六)(圖七)

又如圖七所示,設點1~4皆有余差 R_1 , 點5~12皆有余差 R_5 。現改 $\phi_1 \sim \phi_4$ 以 $\Delta\phi_1$, $\phi_5 \sim \phi_{12}$ 以 $\Delta\phi_5$ 。使 R_1 , R_5 消失,則要解方程

$$R_1 + 6\Delta\phi_1 + 10\Delta\phi_2 = 0$$

$$R_5 + 14\Delta\phi_2 - 5\Delta\phi_1 = 0$$

R_1 、 R_5 的選擇可以取1~4和5~12點的平均值。

顯然我們還可以舉出數種類似的辦法這裡不一贅述了。

III. 消元法的应用: 為了加速收斂速度我們提出一個全面松馳, 局部引用精確法解方程組的方案。上面談到引用松馳法解十三點公式, 不論引用何種加速辦法降低一點或數點的余差, 僅是將這些點的余差分配到周圍的點上去。這樣松馳的速度仍然不快, 如果進行得不對當時又是此起彼伏久久得不到進展。

我們是這樣求助於高斯消元法的。當松馳進行到某次時我們停止進行全局松馳, 而在局部範圍內解綫代數方程組。例如: 從S點作 $\overline{St}$ 平行於底邊(見圖八), 當然所取的 $\overline{St}$ 上面布有結點。其次以 $Sfgt$ 作為邊界, 在此邊界限定的範圍內內點已經為數不多了。因而在方程的個數不多的情況下可以借用高斯緊湊方案, 綫段 $\overline{St}$ 、 $\overline{PO}$ 上結點值作為已知(援用某次松馳的結果)來確定帶·號諸點 ϕ 的近似值。(參見圖九)將新確定的 ϕ 值代入 $Sfgt$ 內點的余差方程

$$20\phi_0 - 3\sum_{i=1}^4 \phi_i + 2\sum_{j=5}^8 \phi_j + \sum_{k=9}^{12} \phi_k = R_0.$$

当然此时 R_0 很小。但要注意 S_i 和其上一行 P_0 由于 S_{fgt} 内内点值的变动，其余差将产生变动，不过可以说明一般跳动是不大的。

如：解方程组确定 S_{fgt} 内内点值 ϕ_i 后，假定增量皆为 $\Delta\phi$ 。则B点余差增加了 $\Delta\phi$ ，而A点余差在最坏的情况下只增加 $13\Delta\phi$ 。其他点可以作类似的分析。这样就松弛的观来说还是大大加速了收敛。

(图九)

上面所叙述的办法当然还可以应用于图形的其他部分。如我们在某次松弛进行以后发现A B C D部分(参见图八)内点余差很大(一般说是由于内点本身不准确所引起的)，或很难以进行松弛(如余差符号一致……)，则可以在区域内部按上面同样的解方程组办法处理。这样将大大加快收敛速度。

结束语：我们最近参加了一次坝头应力分析计算遇到的是九十三阶线性方程组，在开始时曾用普通迭代法进行，但结果表明用普通迭代法解双调和方程一般来说是行不通的，而采用松弛法和以上加速方案后，余差下降将很快。若每次有五人参加计算(四人算，一人主要考虑 $\Delta\phi_i$ 的选取)一周内即可得出满意的结果。当然上面方法很不成熟，仅供参考。

此外由于所与问题边界条件的对称性，所以我们以上列举的图形只是原来的一半。

文献：(1) Allen: Relaxation method, Book P.118.

(2) 潘家铮：重力坝的应力计算

双调和方程数值解中"松驰也"消元法"的应用附备

		10		
	6	2	5	
11	3	0	1	9
	7	4	8	
		12		

备二

		+1		
	+2	-8	+2	
+1	-8	+20	-8	+1
	+2	-8	+2	
		+1		

备三

		1	1	
	2	6	-6	2
1	-7	12	12	-7
	2	-6	-6	2
		1	1	

备四

		1	1	
	2	-6	-4	-6
1	-7	13	14	-7
	2	-6	-4	-6
		1	1	

备四

		1	1	
		-5	-5	2
1	-5	16	16	-5
	-5	16	16	-5
	2	-5	-5	2
		1	1	

备四

		10		
	6	2	5	
11	3	0	1	9
	7	4	8	
		12		

备五

2

		-0.0412	-0.016	-0.0412		
	-0.0824	0.1016	0.2882	0.1016	-0.0824	
-0.0412	0.1016	0	0	0	0.1016	-0.0412
-0.016	0.2882	0	-1	0	0.2882	-0.016
-0.0412	0.1016	0	0	0	0.1016	-0.0412
	-0.0824	0.1016	0.2882	0.1016	-0.0824	
		-0.0412	-0.016	-0.0412		

图 6

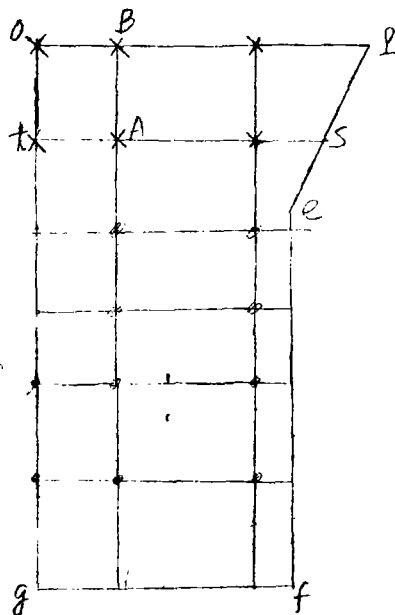


图 9

		7	6	
8		2	1	5
9		3	4	12
		10	11	

图 7

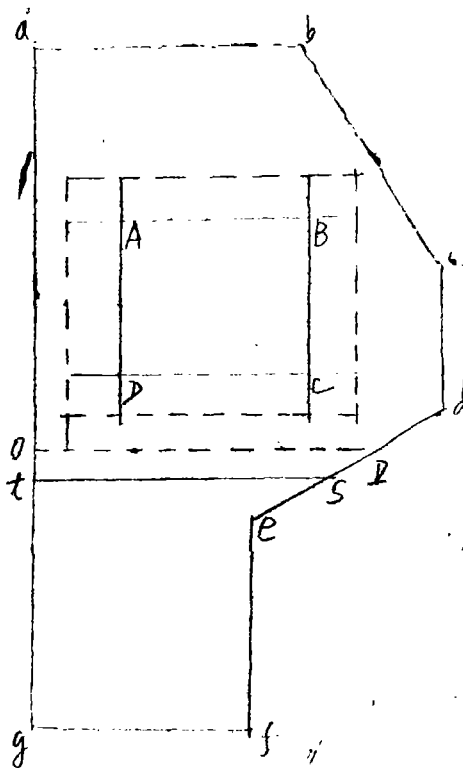


图 8