

动态规划理論

原作: R. Bellman

編譯: 数学力学系 黎国良 馬麟浚 邓永录

編譯者序

动态规划理論是一門嶄新的数学学科,它是从一系列技术和經濟問題中产生的,在不同的理論和实践活动的領域中常常会出现这样的情况,即在采取决定时应当是逐步的而不是一步就馬上决定的,因此决定的采取不是看作单一的行动而是看作由若干阶段(步)組成的过程来討論。这样的方法在相当早以前在研究某些特殊問題时已曾被利用过,特别是A. Wald在他的序貫統計分析理論中最完全地体现了这种思想。通过大量类似問題的系統化研究获得一种适宜于处理这类問題的数学方法——这就产生了由 R. Bellman 等人所建立起来的动态规划理論。

动态规划是研究在某种意义下最优的多步决定問題,在这理論中最主要的一点是用解决基于所謂“最优性原則”所建立起来的泛函方程来代替解决多变量函数的极值問題。因为前者的解常可利用现代的数学方法——計算数学而得到,后者却常因維数太多而使到在实际上要得到解答变成差不多是不可能的。

几乎在所有的科学、技术和經濟部門中都会碰到最优化問題。在工业工艺、生产組織、經濟計劃、水庫調度和各种不同的物理、生物和軍事活动的問題都必須涉及它,因此动态规划的应用是很广泛的。

应当指出,动态规划本質上是一种数学理論,但是在把它应用到某个实际問題时应根据相应的科学的特点来决定在这問題中应用动态规划的方法和理論是否适合,特别是在应用中,还要注意到当时当地的社会环境和政治因素。不能孤立片面地強調动态规划的作用和盲目地搬用其它国家(特别是資本主义国家)的結果。

我們几个人都是刚刚开始学习动态规划。前些时我們学习了由R. Bellman所写汇编在“工程师用现代数学”(英文原本,有俄文譯本)一书中有关动态规划理論这一章以后,觉得这篇文章篇幅不多,但能把理論的基本原理和主要内容扼要地介紹出来,也很有启发性。这对于有意学习或希望懂得一些动态规划知識的人来说都是会有一些帮助的,而且据我們所知,国内有关这方面的文章发表得很少。因而我們就大胆的把这一文章譯出并作了一些刪改和說明。由于水平很低,錯漏之处在所难免,希讀者发觉后严加指正。此外,由于篇幅所限,我們准备把全文分两次刊登。

1. 引言

在这一篇文章中将要概略地描述由于多步选择过程而产生的一类新的而且又是困难的数学問題,同时也闡明某些为了解决这类問題而产生的数学方法。

我們所討論的是屬於“規劃問題”中的一類特別的問題。為了強調在問題中時間所起的作用和它具有一系列重要的選擇，我們特別稱這類問題為“動態規劃”問題。加以正確解釋時，這種動態觀點能幫助我們對這個問題在數學上作更深入的理解。

我們將要研究的多步過程是由一系列的行動所組成的，在這些行動的序列中從前的行動結果可以利用來指導將來的行動。下面將引進兩類顯然不同的行動的例子：一類是行動的結果是完全確定的，另一類是行動的結果沒有確定，但是可以借助於某一個概率分布給出預報。我們將前者稱為確定的，而將後者稱為隨機的。

為了使讀者明了在解決這類困難的和嶄新的數學問題所用的數學方法，我們選出下面一些簡單而又能說明問題的例子來討論。

首先我們從一個在購買理論引起——因而它是屬於一般的供應理論的問題開始，這個問題是討論一種以若干年為使用時期而在使用之後可以折舊出售設備的購置問題。

第二個問題是討論在金礦開采中一些容易損壞的開采設備的最有效利用問題，這個問題雖然沒有象第一個問題那樣明顯的應用，但它卻顯示出一系列很重要的數學特徵。

第三個問題是在工業生產中的一個突出問題。它是討論為了生產某種產品而要求某些工業部門的綜合利用問題（下面是這類問題的一個簡單例子，這個例子我們以後還要詳細討論。在汽車的生產中要用到鋼鐵和許多種儀表，因此汽車製造廠能生產多少汽車除了決定於本廠的生產能力以外，還依賴於鋼鐵工廠和儀表工廠所能提供的鋼鐵和儀表的數量。其次因儀表的生產要用到鋼鐵，因此它是依賴於儀表工廠的生產能力和鋼鐵工廠的生產能力。最後，鋼鐵工廠的生產能力的增加需要鋼鐵。在這樣情況下，如何根據現有的鋼鐵，儀表存量和三種工廠的生產能力來組織這三個部門的生產，使經過一定的時間後生產出最多的汽車）。這個問題我們稱之為“狹窄地點問題”（也有人稱之為“交叉路口問題”或“瓶口問題”。）

最後，我們將簡單地指出如何把處理這些問題的數學技巧應用到多步博奕理論，特別是“生存博奕”中去。

2. 預備的討論

在開始討論上述問題之前，我們先用最普通的語言來描述這些問題所固有的公共特徵。

（1）在任何時刻 t ，過程的狀況被一個很小的參數集合所描述。

在購置問題中，最重要的信息是手中所有的款數，可供折舊利用的設備數量，下一周期所需要的設備數量和當前的價格。在金礦問題中我們應當設想已知留在礦山的金礦數量，已經開采的金礦數量和開采的設備情況。在關於生產過程的問題中我們需要知道在給定時刻的生產能力，產品的儲存量和過程剩下的時間。在“生存博奕”中，例如在一種一直繼續到其中一個博奕者破產為止的二人撲克博奕中，博奕的狀況可用博奕者的賭本來描述，如果在博奕中雙方賭本的總和不變時，博奕的狀況只須由一個博奕者的賭本來完全確定。

（2）選擇行動的作用就是把這個參數集合變換為一個簡單的數值集合。

例如在“狹窄地點”問題中選擇行動的作用是用分配給每一種有關的工業部門以不

同的基本资源——在上述例子中就是钢铁的数量来改变各工业部门的生产能力和原料的储存量。

(3) 系统过去的历史对确定将来的行动是不起作用的(马尔可夫性质)。

这性质一般可由引入附加的参数于所描述的过程中而得到。当然,这性质仅当所需的参数数目是很少时才会有用。

在时滞(即有推迟作用)的情形,例如在工业生产过程中,有时必须利用函数而不是利用参数来描述系统。

现在让我们引入某些基本的术语。在所有被讨论的过程中,我们致力于制造一个行动选择的序列,这样一个行动选择的序列被称为一个策略,按照某种预定的准则是最理想的策略称为最优策略。

下面是在“动态规划”的全部理论中起着最基本的作用的一条直观上显明的原则。

最优性原则:最优策略具有这样的性质:无论初始形势和初始选择是怎样,余下的选择对于由第一个选择所造成的形势来说应当组成一个最优策略。

这个原则的数学表示法将导向一类新的具有有趣性质的泛函方程。另一方面,在处理这些问题时所发展起来的数学方法使我们能按新的途径去解决古典的变分法问题。因此,这种数学方法提供了理论和实用上的兴趣。

资源的最优分配

3. 引言

作为与多步过程相联系的第一个例子我们将讨论一个购买问题。开始我们在古典范围来叙述这个问题并且指出这种做法不妥当之处。接着用“动态规划”方法来处理它。

后一方法引进了一些新的和重要的泛函方程类。我们首先以分析观点然后从计算观点简短地讨论它的性质。这两种方法事实上是紧密地联系着的。

最后,我们将以相应于随机情形的处理作为结束。

4. 购买问题

在供应中最经常发生的是购买设备来完成一项指定的工作的问题。因为这些工作常常不是简单的而是由一些具有不同性质的行为所组成,所以可能有适应于某一个行为的设备对于第二个行为起间接的作用而对于第三个行为则是完全没有作用。为了避免这种情况,通常是购买合起来就能满意地完成工作的各种各样的设备。

让我们考虑这类型的一种情形,这种情形是相当实在的,使能足够令人产生兴趣和简单,并很容易获得分析形式。

问题:在一个 N 年的时期内,每一年开始需要定购某些为了完成指定工作的设备。我们有初始款项为 x ,它分为 y 及 $x-y$ 两部分。 y 用来购买类型A的设备,余下 $x-y$ 用来购买类型B的设备。用于设备A的 y 将产生 $g(y)$ 个有用工时,同样用于设备B的 $x-y$ 将产生 $h(x-y)$ 个有用工时。到年终时可将折旧出售设备A的 ay 元用来购买新的设备之用,这里 $0 < a < 1$,同样可将折旧出售设备B的 $b(x-y)$ 元用来购买新的设备。这样每年重复这个过程直至完结 N 年时期为止。

问题是需要确定款项的逐年分配方法使得经过 N 年期间后,由设备而得到的总的有

用工时数达到最大。

5. 問題的古典提法

設 $y_1, y_2, \dots, y_N$, 是在第一, 第二, $\dots$, 第 N 年开始时购买設備 A 的款項, 相应地經過 N 年期間从两类設備所得的总工时数是:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_N) = g(y_1) + h(x_1 - y_1) + g(y_2) + h(x_2 - y_2) + \dots + g(y_N) + h(x_N - y_N)$$

$$\text{这里 } 0 \leq y_i \leq x_i \quad (1)$$

$$\text{和 } x_1 = x$$

$$x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1)$$

$$\vdots$$

$$x_N = ay_{N-1} + b(x_{N-1} - y_{N-1})$$

在第四节中所提出的問題等价于确定函数 $J(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 的最大值問題, 这个函数是为不等式 (1) 所描述的 N 維区域所約束的。虽然微分学对于这个問題的討論是有用的, 但是应用时必须加以留意, 因为有些最大值可能发生在区域边界上 (正如在下面某些情形所看到的)。

如果 N 是很小的話, 求出問題的解是不困难的。然而对于任意选取的数 N , 例如 $N = 10$, 研究由于方程組 (2) 所定义的 N 維空間区域問題就会变成很困难的了。

更要注意, 从实践观点来看这种办法产生太多信息。当給出 x 和 N 时, 在第一步的开始只需要知道 y_1 而不需要知道 $y_2, y_3, \dots, y_N$ 。因此如果我知道了作为 x 和 N 的函数的 y_1 时, 解就完全确定了。

在这个简单的想法引导下, 我們在下一节用一种新的和与前不同的办法来提出問題。

6. 从动态规划的观点提出問題

容易看出, 当給出不依赖于时间的函数 g 和 h 时, 經過一个 N 年期間后, 由于費用的使用而得到总的有用工时仅仅是款項的初始数 x 和在过程余下步数 (年) N 的函数。对于 $N = 1, 2, \dots$, 我們定义 $f_N(x)$ 为給定了一个款項初始数目 x 和使用一个最优策略經過一个 N 年期間所后得到有用工时的数目。

$$\text{这时有 } f_1(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x - y)\}$$

讓我們引进連結 $f_{N+1}(x)$ 和 $f_N(x)$ 的基本递推关系。考虑 $N + 1$ 步过程。設在第一步将 x 分为 y 和 $x - y$ 。經過 $N + 1$ 年后所得到的工时总数是由第一年所获得的 $g(y) + h(x - y)$ 再加上余下 N 年后所得的工时, 对于后者有初始数 $ay + b(x - y)$ 。

显然, 不管开始的 y 是如何选择, 和数 $ax + b(x - y)$ 应这样利用, 使得經過余下的 N 步后有最优的結果。因此經過后面 N 步所得到的工时数可用 $f_N[ay + b(x - y)]$ 来定义。那末开始分为 y 和 $x - y$ 时总的收入是

$$R_{N+1}(x, y) = g(y) + h(x - y) + f_N[ay + b(x - y)]$$

为了使总的收入最大, y 必須选择得使 $R_{N+1}(x, y)$ 最大。这样就得到了方程

$$f_{N+1}(x) = \max_{0 \leq y \leq x} R_{N+1}(x, y) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x - y) + f_N[ay + b(x - y)]\}$$

对于 $N = 1, 2, \dots$

在下一节中我们将讨论这个非线性方程的一种重要逼近。

7. 无限步逼近

虽然对于这个问题及其类似问题起着不大重要的作用, 然而在未来却是一个很有用的方法就是假设 N 是无穷的。这个数学的虚构引导出问题的一个重要简化, 因为序列 $\{f_N(x)\}$ 可由一个简单函数

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$$

所代替

代替方程(4), 我们得到方程

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))\} \quad (5)$$

虽然无限步过程的引入使研究大大简化, 但却引进一系列有限过程所完全没有的困难。现在我们必须考虑方程(5)解的存在性与唯一性。

显然易见, 例如在方程(5)的一个解上加上任意常数就给出一个新的解。为明确起见, 条件 $f(0) = 0$ 必须附加到由原来问题所确定的函数上。

在下一节中我们将建立一个存在性与唯一性定理。它将括包这类问题的很大部分。

8. 存在性与唯一性定理

我们将提出一个关于方程(5)的存在性与唯一性定理和它的证明, 以便阐明某些可能应用到的方法。

定理 1: 考虑方程

$$f(x) = \max_R \{a(x_1, x_2, \dots, x_N) + f(b(x_1, x_2, \dots, x_N))\} \quad (6)$$

这里 $R = R(x)$ 是由下式所定义

$$x_k \geq 0 \quad x = \sum_{k=1}^N x_k$$

假如

(a) 对于 $0 \leq x \leq x_0$, $a(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是在 $R(x)$ 上连续和非负的, 而且 $a(0, 0, \dots, 0) = 0$;

(b) $b(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是在 R 上连续和非负的, 而且在 $R(x_0)$ 内 $b(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq c$,

$$\sum_{k=1}^N x_k = cx, \quad 0 < c < 1;$$

$$(c) \sum_{j=0}^{\infty} h(c^j x_0) < \infty,$$

这里 $h(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \left[\max_{R(y)} a(x_1, x_2, \dots, x_N) \right]$,

则对于 $f(0) = 0$ 和 $0 \leq x \leq x_0$, 方程(6)有唯一解。

証明 設 $f_0(x)$ 为选择 $x_1 = x$,

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0 \quad \text{对于 } n = 2, 3, \cdots$$

所得到的值, 于是

$$f_0(x) = a(x) + a(b(x)) + \cdots$$

这里我們令 $a(x) = a(x, 0, \cdots, 0)$, $b(x) = b(x, 0, \cdots, 0)$. 右边級数的优級数是 $\sum_{j=0}^{\infty} R(c^j x_0)$,

因此是一致收斂的。

$$\text{定义 } f_{n+1}(x) = \max_{R(x)} \{a(x_1, x_2, \cdots, x_N) + f_n(b(x_1, x_2, \cdots, x_N))\} \quad (7)$$

由 f_0 的定义得出 $f_1 \geq 0$, 因而 $f_{n+1} \geq f_n$.

$$\text{設 } M_n(x) = \max_{0 \leq y \leq x} f_n(y)$$

于是由方程(7)有 $M_{n+1}(x) \leq h(x) + M_n(cx)$,

$$\text{由此得出 } M_n(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} h(c^j x)$$

因此对于所有 $x \in [0, x_0]$, $f_n(x)$ 收斂于函数 $f(x)$. 容易看出, $f(x)$ 滿足方程

$$f(x) = \sup_R \{a(x_1, x_2, \cdots, x_N) + f(b(x_1, x_2, \cdots, x_N))\}. \quad (8)$$

为了确定連續解的存在性和在这个基础上用最大值代替在方程(8)的上确界, 我們还应做另外一些工作 設 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 为 $R(x)$ 达到最大值的点, 这时

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \{a(x_1, x_2, \cdots, x_N) + f_n(b(x_1, x_2, \cdots, x_N))\} \\ &\geq \{a(y_1, y_2, \cdots, y_N) + f_n(b(y_1, y_2, \cdots, y_N))\} \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ 为 $R(x)$ 內任意的其它点. 特别是如取使对于 $n-1$ 的相应表示式达到最大值的点作为 $(y_1, y_2, \cdots, y_N)$, 那末我們得到补充的关系式

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \{a(y_1, y_2, \cdots, y_N) + f_{n-1}(b(y_1, y_2, \cdots, y_N))\} \\ &\geq \{a(x_1, x_2, \cdots, x_N) + f_{n-1}(b(x_1, x_2, \cdots, x_N))\} \end{aligned} \quad (10)$$

由不等式(9)和(10)得出重要的不等式

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \max \left\{ \begin{aligned} &f_n(b(x_1, x_2, \cdots, x_N)) - f_{n-1}(b(x_1, x_2, \cdots, x_N)) \\ &f(b(x_1, x_2, \cdots, x_N)) - f_{n-1}(b(y_1, y_2, \cdots, y_N)) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

现在假設 $M_0(x) = \max_{0 \leq y \leq x} f_0(y)$

$$M_{n+1}(x) = \max_{0 \leq y \leq x} |f_{n+1}(y) - f_n(y)| \quad n \geq 0$$

因为按照假設, $b(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leq cx$ 对于所有的 $(x_1, x_2, \cdots, x_N) \in R(x)$. 都成立, 那么当 $n > 0$ 时, 从不等式(11)得到

$$M_{n+1}(x) \leq M_n(cx)$$

因此 $M_n(x) \leq M_0(c^n x) = h(c^n x)$. 由假設, 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(c^n x_0)$$

是收敛的, 所以级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

于 $0 \leq x \leq x_0$ 一致收敛。由此得出

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

是 $[0, x_0]$ 区间上的连续函数和 $f(x)$ 是方程 (6) 的解。

因为 $M(x)$ 连续和 $M(0) = 0$, 那么就得到 $M(x) \leq 0$, 这意味着 $M(x)$ 恒等于零。定理证明。

9. 分析结果

在上一节中证明了最一般的存在性和唯一性定理。现在我们再给出一些可以得到的毕显分析结果的例子。在这里不打算给出证明了。

定理 2: 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是 x 的严格凸函数, 那末最优策略要求 $y = 0$ 或 $y = x$ 。

当 g 和 h 都是凹函数时情况将更为复杂:

定理 3: 设

$$(a) \quad g(0) = h(0) = 0$$

$$(b) \quad g'(x) \geq 0 \quad h'(x) \geq 0 \quad \text{对于 } x \geq 0$$

$$(c) \quad g''(x) \leq 0 \quad h''(x) \leq 0 \quad \text{对于 } x \geq 0$$

和讨论方程序列

$$f_1(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y)\}$$

$$f_{n+1}(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_n[ay + b(x-y)]\} \quad n = 1, 2, \dots,$$

则对于每一个 n , 存在唯一的给出最大值的 $y_n = y_n(x)$ 。如 $b < a$ 那末有 $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots$; 如果 $b > a$ 那末不等式反方向。特别地; 如果 $b = a$ 和对某一 n 有 $y_n(x) = x$, 则对于所有 $m \geq n$, $y_m(x) = x$ 。

这结果对于近似计算是有用的。因为 y_1, y_2 甚至 y_3 也能相当快地用手摇计算机求出。

甚至 g 和 h 是凸的和我們知道或者 $y = 0$ 或者 $y = x$, 也不是容易来确定 y 的正确值。

下列结果对于近似计算是有用的:

定理 4: 方程 $F(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [cx^d + F(ax), ex^f + F(bx)]$ 的解由公式

$$y = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq x_0 \\ 0, & \text{当 } x_0 \leq x \end{cases} \quad \text{给出,}$$

$$\text{这里 } x_0 = \left[\frac{c/(1-a^d)}{e/(1-b^d)} \right]^{1/(f-d)}$$

另外一个特别情形是当 g 和 h 都是关于 x 二次的情形也能容易地求出解。

10. 计算技术

在建立任何實際問題的數學模型時，常常在要求充分正確地刻畫實際現象與要求相應模型的分析簡單化之間發生矛盾。因此，應當想到，表達實際愈正確，則僅僅用分析工具解決問題的機會就愈少。

這樣一來，就很明顯，數學的應用應追求兩個目標：

- a. 尋找出解決低維問題一致的方法；
- b. 提供高維問題近似解法的充分廣闊的基礎，包含依靠附加時間與勞力的耗費來提高近似值的精確度的方法。

引用其它領域的一個例子，我們討論確定炮彈彈道的問題。

我們知道，必須考慮炮彈的空氣動力學的特性，看作速度的函數的空氣阻力，風速，地球曲率，看作以前射擊次數的函數的炮筒特性的變化，以及許多其它的因素。雖然如此，就我們所知，討論還是從僅僅是重力起作用的空間質點的拋物綫彈道開始。

由此得出結論，研究具有一定的原有性質的簡單模型的整個目的是找尋以後研究更複雜的模型的出發點。

在研究動態規劃問題時，我們擁有在分析的泛函方程的大量研究中是不採取的逼近法。這個工具就是存在於泛函方程的解與最優策略之間的對偶性。

借助方程(5)，我們就可看到，對於給定的函數 $f(x)$ ，可以不僅確定一個最大化的 y ，而且可以確定全部最大化的 y 。反之，如果我們知道了作為 x 的函數的 y ，就可以用簡單的疊代得到 $f(x)$ 。於是，函數 $f(x)$ 確定了全部最優策略 y ，而一個最優策略 y 就確定了函數 $f(x)$ 。

由此得出，在企圖找出作為主要目標的最優策略時，我們可以在函數空間或在策略空間中選取初始近似。

在大多數情形，選取初始策略是較為上算的，因為實踐的經驗給問題的試驗性質的解提供了堅實的基礎。在具有三個或更多參加者的撲克博奕中，情形就是如此。雖然沒有指導正確地博奕的數學理論，但博奕的多年實踐提供了許許多多很好的博奕規則，違反它就會吃虧。順便指出，兩個參加者的撲克博奕，可由數學分析達到。

恰好在被作為一系列近似的第一個的初始近似的選取時，討論簡單的模型時所得到的實際經驗與理論的洞察力就能夠最有效地結合。

此外，借助於策略逼近的方法較之借助於函數逼近的方法有很大的優越性，借助於策略的逐次逼近將自動地得出較好的結果。

讓我們討論方程(5)來確証這些意見。如果開始選取 $f_0 = f_g$ ，那末以後的近似就由遞推關係

$$f_{N+1}(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{ g(y) + h(x-y) + f_N(ay + b(x-y)) \}, \quad N=0, 1, 2, \dots$$

得到。在定理1的同樣條件下，倘若 f_g 是區間 $0 \leq x \leq x_0$ 上的連續函數，且 $f_g(0)=0$ ，則可証 f_N 收斂于解。

值得指出的是，一般來說，對於任意的 f_g ，收斂不一定是單調的。然而，如果選取由方程(3)所確定的單步的最大收入 f_1 作為初始近似，則收斂一定是單調的，但通常

是很慢。可是，由于函数 $f_N(x)$ 常常同样是有兴趣的，所以这个方法还是十分有用的。

现在我們較詳細地討論借助于策略逼近的方法。若干合理的近似是：

a) 在每一步，我們可以选取使单步收入 $g(y) + h(x-y)$ 达到最大的 y 。

b) 我們可以用凸函数，凹函数，二次函数或者形如 ax^b 的函数来逼近 $g(x)$ 和 $h(x)$ 同时使用从这些較简单的情形所得到的策略作为近似策略。

c) 我們可采用单位成本作为标准与选取使得单位成本相等，即

$$\frac{g(y)}{(1-a)y} = \frac{h(x-y)}{(1-b)(x-y)},$$

的 y 。

d) 我們可以采用边沿单位成本作为标准与选取使得

$$\frac{g'(y)}{(1-a)} = \frac{h'(x-y)}{1-b}$$

的 y 。

最后的一个实际上是最好的近似。

在上面所有討論的情形，我們有了确定作用为 x 的函数的 y 的近似表示式的一系列方法。利用这些方法的某一种，我們就可以递推地計算近似解。我們用 $F_g(x)$ 表示所得的函数。它滿足方程

$$F_g(x) = g(y) + h(x-y) + F_g(ay + b(x-y)), \quad y = y_g(x).$$

现在討論由下面关系所确定的第二近似：

$$f_2(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + F_g(ay + b(x-y))\}.$$

显然，对于所有 $y \in (0, x)$ ，我們有

$$f_2(x) \geq \{g(y) + h(x-y) + F_g(ay + b(x-y))\}. \quad (12)$$

因而

$$f_2(x) \geq F_g(x) = g(y) + h(x-y) + F_g(ay + b(x-y)) \quad y = y_g(x)$$

因为

$$f_3(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{g(y) + h(x-y) + f_2(ay + b(x-y))\} \quad (13)$$

則因为 $f_2 \geq F_g$ ，由比較方程(12)与(13)便得 $f_3 \geq f_2$ 。因此，由归纳法，可见

$$f_{N+1} \geq f_N \geq \dots \geq F_g$$

除了某些使 $F_g = f$ 的 x 之外，不等式是严格的。

11. 不确定性

在前面几节里，我們假定每一次消耗的结果由一定的工时与收入而完全确定。但事实上我們仅仅可以预料由购买 y 元设备A或B所得到的平均工时数，以及估計在年終时废品折旧的收入，这是依赖于經濟中的价格起落与年終设备的可能状况的。

于是，馬上就产生这样的問題，在作为任何活动的结果的不确定性的面前，如何才能作出最优策略的形式的确断言呢？

首先，很明显，我們不可能找出经过 N 年期间后所得到的总工时数的最大值，因为

这个量是一个受許多因素所影响的随机量,而这些因素中有很多是完全不能为我们所控制的。因此,我们必须约定使用这个量的某类型的平均值。无论在理论上或实用上,最简单的是采用通常的平均值,在数学上,这意味着我们应集中注意力于有用的工时的期望之上。

其它的一个很重要的量是得到有用工时不小于 h 的概率。在很多情形中,这是一个较之直接的平均值更重要得多的标准。

然而,我们这里仅仅讨论与平均或期望值相联系的问题的数学提法。

为了在这一阶段不致于产生非分析本质的困难,我们假设:如果用 y 元购买设备A,则仅仅存在两种可能:

- a) 我们将得到 $g_1(y)$ 个工时与有折旧费 a_1y 元的概率为 p_1 .
- b) 我们将得到 $g_2(y)$ 个工时与有折旧费 a_2y 元的概率为 $p_2 = 1 - p_1$.

类似地,我们假设:如果用 $x-y$ 元购买设备B,则也仅仅存在两种可能:

- a) 我们将得到 $h_1(x-y)$ 个工时与有折旧费 $b_1(x-y)$ 元的概率为 q_1 .
- b) 我们将得到 $h_2(x-y)$ 个工时与有折旧费 $b_2(x-y)$ 元的概率为 q_2 .

上面牵涉到的常数均满足条件 $0 < a_1, a_2, b_1, b_2 < 1$ 。为简单起见,仅仅讨论无限的过程,假如我们定义 $f(x)$ 为由于使用初始的 x 元与最优购买策略而得到的工时的期望总数。则正如上面的一样, $f(x)$ 满足泛函方程

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \{ p_1 q_1 \{ g_1(y) + h_1(x-y) + f(a_1 y + b_1(x-y)) \} \\ + p_1 q_2 \{ g_1(y) + h_2(x-y) + f(a_1 y + b_2(x-y)) \} \\ + p_2 q_1 \{ g_2(y) + h_1(x-y) + f(a_2 y + b_1(x-y)) \} \\ + p_2 q_2 \{ g_2(y) + h_2(x-y) + f(a_2 y + b_2(x-y)) \} \}.$$

这个方程实质上属于如在确定情形中所出现的同一类型,且有极相似的结果。值得指出的是,在引入期望值的概念之后,为了所有数学目的,我们已经转向研究确定的过程。

(未完,待續)