

一类线性规划问题——产储销问题的研究

邓永录

(数学力学系)

(一)问题的提出及数学模型的建立

本文是研究通过为琶洲农场解决秋收粮仓选用问题而归纳出的一类线性规划问题。这问题比只有产和销这两个环节的一般调运问题多了一个中间环节——储藏。故称之为产储销问题。例如商业部门从某些地收购一些物资，先入库，然后分发各地销售或集中某些港口、车站输出就属于这一类问题。为讨论方便起见，我们先从建立问题的数学模型入手。然后着重讨论其中的一种特殊情形。从而使这类问题在某些条件下能较易解决。

问题的提出如下：

设某种物资有 m 个产量为 a_i 的产地 A_i ($i = 1, 2 \dots m$)； n 个储量为 b_j 的储地 B_j ($j = 1, 2 \dots n$)； l 个销量为 d_k 的销地 D_k ($k = 1, 2 \dots l$)。这里设 $\sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j$ (若 $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ，则可分为两个一般的调运问题处理)。

又设 A_i 至 B_j 之距离 (或任何一种运力消耗指标) 为 C_{ij} ； B_j 至 D_k 之距离为 C'_{jk} 。问应如何决定由各个 A_i 运到各 B_j 的物资数量 x_{ij} 和由各个 B_j 运到各 D_k 的物资数量 y_{jk} ($i = 1, 2 \dots m$ ； $j = 1, 2 \dots n$ ； $k = 1, 2 \dots l$)，使得总运力消耗

$$S = \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} + \sum_{j,k} C'_{jk} y_{jk} \quad (1)$$

达到最小。

下面就销量的不同情况把问题分为两种情形：

$$1^\circ d_k < \sum_{i=1}^m a_i; \quad k = 1, 2 \dots l', \quad 0 < l' \leq l$$

$$2^\circ d_k > \sum_{i=1}^m a_i \text{ 对所有 } k = 1, 2 \dots l. \quad (\text{注})$$

对于情形 1° ，问题的数学模型是

(注)实际上，在某些特殊的产、储、销地分布情形下，即使有某些 $d_k < \sum_{i=1}^m a_i$ 也可以当作情形 2° 处理。此外须指出，情形 2° 可理解为在问题中可全不考虑 d_k 之约束，情形 1° 则要考虑一部分或全部 d_k 的约束。同时为简单起见，我们不妨假设要考虑前 l' 约束。

$$\left. \begin{array}{l} \text{在約束條件} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j=1 \cdots n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1 \cdots m \\ \sum_{j=1}^n y_{jk} \leq d_k \quad k=1 \cdots l' \\ \sum_{k=1}^l y_{jk} \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \\ x_{ij} \geq 0 \quad y_{jk} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

的限制下, 适当选取 x_{ij} 和 y_{jk} 的值, 使目标函数 (1) 达到最小。

显然, 这是一般的线性规划问题, 把 x_{ij} 和 y_{jk} 看作待定变数, 即可用单纯形法求解。

情形2°的数学模型如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{在約束條件} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j=1 \cdots n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1 \cdots m \\ \sum_{k=1}^l y_{jk} = \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad k=1 \cdots l' \\ x_{ij} \geq 0 \quad y_{jk} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

的限制下, 适当选取 x_{ij} 和 y_{jk} 的值, 使目标函数 (1) 的值达到最小。

我們发现在这情形下问题經变形和把原有的图上作业法加以推广后, 能較簡易地予以解决。现叙述如下:

(二) 表上作业的应用

定理一: 在条件(3)的限制下使目标函数(1)达到最小的问题的解和下述问题的解相同。

$$\left. \begin{array}{l} \text{在約束條件} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j=1 \cdots n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1 \cdots m \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

限制下, 适当选取 x_{ij} 的值, 使目标函数

$$S = \sum_i \sum_j \left[C_{ij} + \min_k \{ C'_{jk} \} \right] x_{ij} \quad (5)$$

达到最小。

設 $C'_{k(j)} = \min_k \{ C'_{jk} \}$ (若对某些 j , 使 $C'_{jk} = \min_k \{ C'_{jk} \}$ 的 k 不止一个时, 可任意选

定一个)。当 x_{ij} 选定后再令

$$y_{jk} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} & \text{当 } k=k^{(j)} \text{。对每一 } j=1, \dots, n \\ 0 & \text{当 } k \neq k^{(j)} \text{。} \end{cases} \quad (6)$$

(証)只須証明 $\min_{x,y} S = \min_x S$,

$$\text{我們令 } S^* = \min_{x,y} S \quad S_1^* = \min_x S_1$$

首先,若有一組滿足条件(3)的 x_{ij}^0 和 y_{jk}^0 使(1)中 S 最小值,

則有 $S^* = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^0 + \sum_j \sum_k C'_{jk} y_{jk}^0 \geq \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^0 + \sum_j \sum_k C'_{jk}(j) y_{jk}^{(0)}$ 由条件(3)知有

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = \sum_{k=1}^l y_{jk}^0 \quad \text{对所有 } j=1, 2, \dots, n.$$

$$\therefore S^* \geq \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^0 + \sum_j C'_{jk}(j) \sum_i x_{ij}^{(0)} = \sum_i \sum_j \{C_{ij} + C'_{jk}(j)\} x_{ij}^0 = S_1^0$$

$\therefore x_{ij}^0$ 滿足条件(4)故 $S^* \geq S_1^*$ (A)

反之,若有一組滿足条件(4)的 x_{ij}^0 使(5)中 S_1 取最小值。

$$\text{則令 } x_{ij}^{(1)} = x_{ij}^0$$

$$y_{jk}^{(1)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(1)} & \text{当 } k=k^{(j)} \\ 0 & \text{当 } k \neq k^{(j)} \end{cases}$$

显然这組 $x_{ij}^{(1)}, y_{jk}^{(1)}$ 滿足条件(3)这时有

$$S_1^* = \sum_i \sum_j \{C_{ij} + C'_{jk}(j)\} x_{ij}^0 = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^0 + \sum_i \sum_j C'_{jk}(j) x_{ij}^0 = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^{(1)}$$

$$+ \sum_j C'_{jk}(j) \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(1)} = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}^{(1)} + \sum_j \sum_k C'_{jk} y_{jk}^{(1)} = S^{(1)}$$

$$\therefore S_1^* \geq S^* \quad (B)$$

由(A)及(B)得 $S_1^* = S^*$ 証毕

因为在条件(4)的限制下使目标函数(5)达到最小的問題是一个一般的产销不平衡的調运問題,故直接可用表上作业法[1]求解。根据定理一知这就是求原問題的解。

(三) 图上作业法的推广与应用

由于假設每个銷地的銷量 d_k 是沒有限制的,所以每个儲地所儲存的物資可就近供应与它距离最近的銷地,余下只須把每一产地調运到各个儲地的物資数量决定,問題即告

全部解决。但由于总的运力消耗依赖于产——储和储——销这两个相依的调运环节，故最优方案不能简单地用一般的图上作业法求得。我们现把原有的图上作业法作进一步的推广。

设每一储地 B_j 至与它最近的一个销地的距离为 β_j ，在交通图上每个 B_j 旁注上相应的 β_j 后，即可不考虑销地而就产地和储地间的调运任务在交通图上按常法〔1〕〔2〕作出流向图。现在问题在于如何判别一个流向图是否最优（即相应的调运方案是最优的）。我们给出下面的判别准则：

定理二：在上述情况下，一个流向图是最优流向图的充分必要条件是：

①没有对流；

②交通图上每一个圈的内圈流向长和外圈流向长都不超过该圈长度的一半；

③若每一储地 B_j 至任一缺储地 B_p （即实际储量小于给定的储量 b_j ）的离心流向（背离该缺储地的流向）长度是 H_{jp} ；两地连线长度是 L_{jp} （ $j = 1, \dots, n$ ； $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ ）。则有

$$\beta_j + 2H_{jp} \leq \beta_p + L_{jp} \quad (7)$$

$$\text{或 } \beta_j + H_{jp} \leq \beta_p + (L_{jp} - H_{jp}) \quad (7')$$

〔证〕必要性：若一流向图不满足条件①，②，则分别可用消去对流和缩短内（外）圈的方法得到一个运力消耗较小的新流向图（详细证明可参考〔1〕），故条件①②是必要的。

又若条件③不满足，则（7）不成立，即有 $\beta_j + 2H_{jp} > \beta_p + L_{jp}$ 。这时可从 B_j 和 B_p 的连线上的所有离心流向的流量和 B_p 的缺储量中选出一最小值 $Q_0 > 0$ ，然后令连线上所有离心流向的流量都减少 Q_0 ，而在相反方向的流向的流量增加 Q_0 。这样调整对 B_j 和 B_p 连线以外的流向没有影响，故新流向图比原来的流向图对应的运力消耗减少了 $Q_0[\beta_j + H_{jp} - (\beta_p + L_{jp} - H_{jp})] = Q_0[\beta_j + 2H_{jp} - \beta_p - L_{jp}] > 0$ ，这说明原流向图不是最优。

充分性：只须证明若有两流向图甲、乙都满足条件①、②、③，则两图对应的运力消耗相等。

为了叙述简单起见，不妨假设每个产地的产量都是1单位（可把产量为 Q 单位的产地看作是 Q 个产量为1单位的产地）。我们以产地的数目 N 作归纳来证明。

当 $N = 1$ 时，命题显然成立

设当 $N < K$ 时（ K 为 ≥ 2 的整数）命题成立。

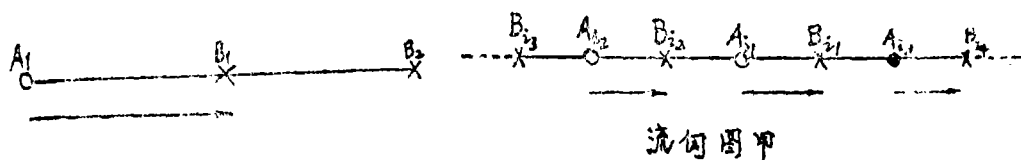
现证当 $N = K$ 时，命题也成立。

如果甲、乙两图有一段流向是相同（如果没有一段具有同一起点、终点和方向的流向时，有同一起点和方向但终点不同的流向也可看作“相同”，因为从图一可看出，在图乙中 B_1 缺储，由条件③得 $\beta_2 + 2\overline{B_1B_2} \leq \beta_1 + \overline{B_1B_2}$ ，即 $\beta_1 > \beta_2 + \overline{B_1B_2}$ ，但实际上恒有 $\beta_1 \leq \beta_2 + \overline{B_1B_2}$ ，故等号成立，即图甲和图乙两流向的运力消耗相等，故可把这两流向看作“相同”。），则可把这一段流向和相应的起点（产地）和终点从两图中取消。设这时图甲变为图甲'，图乙变为图乙'。显然图甲'和图乙'仍满足条件①②③，且产地数目 $N < K$ 。由归纳法假设知图甲'和图乙'对应的运力消耗相等，故图甲和图乙的也相等。

如果图甲和图乙没有一段流向相同, 则可从任一产地 A_{i_1} 出发, 若在图甲中有一流向 $A_{i_1}B_{j_1}$, 则在图乙中必有以相反方向从 A_{i_1} 出发的流向 $A_{i_1}B_{j_2}$, 而在图甲中 B_{j_2} 可能是缺储点。如不是缺储点, 则有另一产地 A_{i_2} 供应物资给它, 即是有流向 $A_{i_2}B_{j_1}$, 在图乙中 A_{i_2} 则朝相反方向供应另一储地 B_{j_2} 。对图乙中的 B_{j_1} 及以后可能出现的 $A_{i_3}, B_{j_3}, A_{i_4}, B_{j_4}, \dots$ 等作完全相似的推论 (参看图二), 由于产地和储地的数目是有限的, 最终必出现下述两种情形之一:

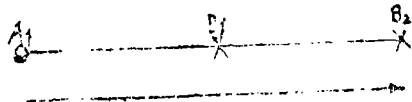
1° 由上述推论在图甲和图乙中所得的流向合起来恰好形成一个圈, 其中属于图甲的流向全为内圈或外圈, 属于图乙的流向则全为外圈或内圈, 由条件②知这两部分所对应的运力消耗相等。从图甲和图乙中分别取消所属上述流向及相应的产地储地后得到新流向图甲' 和图乙', 显然图甲' 和图乙' 仍然满足条件①②③, 且产地数目 $N < K$ 。由归纳法假设知这两图对应的运力消耗相等, 亦即图甲和图乙的相等。

2° 若在上述推论过程中出现一缺储的储地, 此时在图甲和图乙中所得的流向合起来不成圈, 但充满了图甲的某一缺储地 B_{j_1}' 和图乙的某一缺储地 B_{j_2}' 间的连线。由条件③得



流向图甲

流向图甲



流向图乙

流向图乙

(图一)

(图二)

$$\left. \begin{aligned} \beta_{j_1}'' + 2H_{\text{甲}} &\leq \beta_{j_1}' + L_{j_1}'' \quad (\text{由图甲}) \\ \beta_{j_1}'' + 2H_{\text{乙}} &\leq \beta_{j_1}' + L_{j_1}'' \quad (\text{由图乙}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式中 $H_{\text{甲}}$ 是 B_{j_1}' 和 B_{j_1}'' 连线上属于图甲部分的流向长, $H_{\text{乙}}$ 是图乙部分的流向长。因为 $L_{j_1}'' = H_{\text{甲}} + H_{\text{乙}}$, 由 (8) 可得

$$\left. \begin{aligned} \beta_{j_1}'' + H_{\text{甲}} &\leq \beta_{j_1}' + H_{\text{乙}} \\ \beta_{j_1}'' + H_{\text{乙}} &\leq \beta_{j_1}' + H_{\text{甲}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由 (9) 得 $\beta_{j_1}'' + H_{\text{甲}} = \beta_{j_1}' + H_{\text{乙}}$, 仿 1° 可从图甲和图乙中分别取消 $H_{\text{甲}}$ 和 $H_{\text{乙}}$ 部分流向及相应的产储地而得到图甲' 和图乙', 这两图显然仍满足条件①, ②, ③, 且产地数目 $N < K$, 由归纳法假设知两图对应的运力消耗相等, 故图甲和图乙的也相等。定理全部证完。

可以指出, 条件①②是一般产销平衡情况图上作业法中最优流向图的充要条件。如在定理二中令所有的 $\beta_j = 0$ ($j = i \cdots n$), 即储地就是销地, 条件③就变成 $H_{ij} \leq \frac{1}{2} L_{ij}$, 它和条件①, ②一起就是产销不平衡图上作业法中最优流向图的充要条件〔2〕。所以我们說, 本文所討論的图上作业法是一般图上作业的推广。

最后, 以本文开始时提过的琶洲农场粮仓选用問題作为上述方法应用的例子。

〔例〕农场收获的谷子先从晒谷场运到已有的粮仓储存起来, 然后陸續送往碾米厂加工后供各食堂用, 現調查得到农场各晒谷场的晒谷量, 粮仓容量和晒谷场、粮仓与碾米厂間的交通图如表一和图三。問应如何合理选用粮仓使运力消耗最小。

〔解〕: 把晒谷场看作产地, 粮仓看作储地, 碾米厂看作銷地。

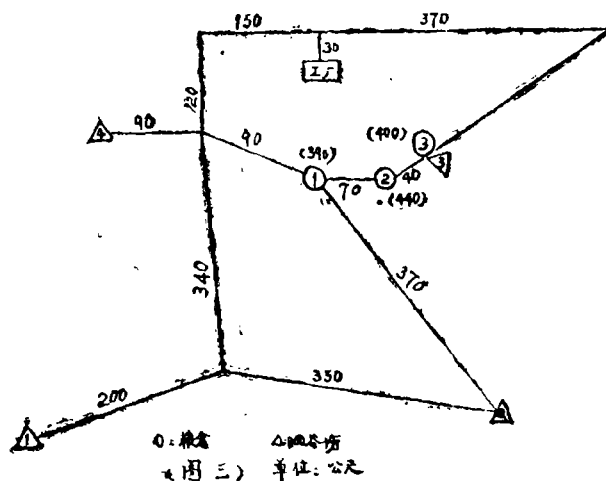
因谷子可以陸續运往工厂加工, 直至存谷全部碾完为止而沒有严格時間限制, 故在問題中可把工厂生产能力認為沒有限制。应用上述图上作业法求解。从交通图查得 $\beta_1 = 390$; $\beta_2 = 440$; $\beta_3 = 400$ 。注于相应的粮仓旁之后, 繪出初始流向图(图四)。

这流向图三个储地都缺儲。容易驗證这图滿足定理二的条件①②, 現检查它是否滿足条件③: 一号仓缺儲, 一号仓和二号仓的連綫长 $L_{21} = 70$, 在其上离心

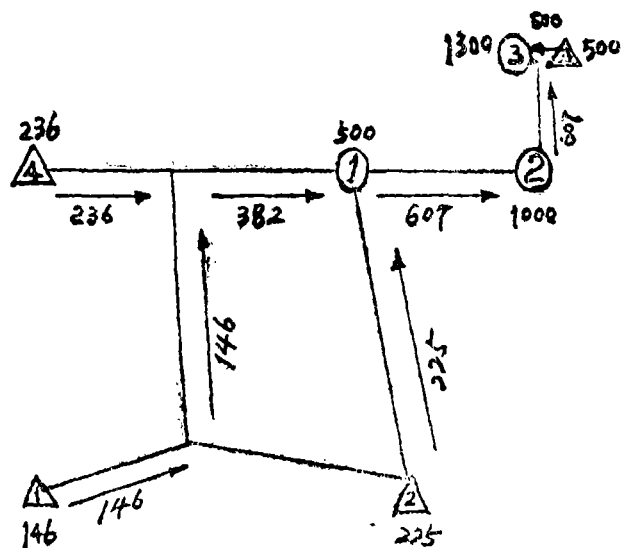
流向长 $H_{21} = 70$ 。故 $\beta_2 + 2H_{21} = 440 + 140 = 580$; $\beta_1 + L_{12} = 390 + 70 = 460$ 。即 $\beta_2 + 2H_{21} > \beta_1 + L_{12}$, 不滿足条件③, 所以这不是最优流向图。經調整后, 得到一个新流向图(图五), 同样容易看出它滿足条件①、②, 再来检查条件③是否滿足, 这时二、三号仓缺儲, 經過与前面类似的計算后, 知滿足条件③, 故这就是最优流向图。按此图容易确定粮仓选用和調运方案。

(表一) 单位: 担

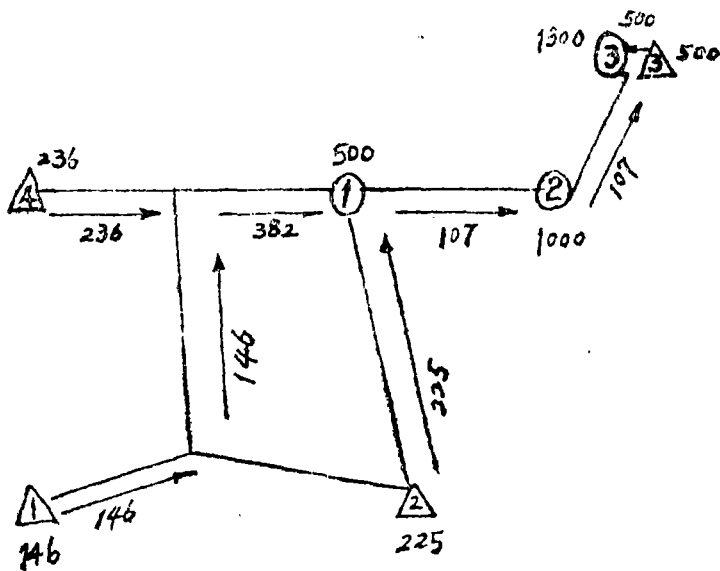
谷 场 粮 仓	一号	二号	三号	四号	容量
一 号	146	225		129	500
二 号					1000
三 号			500	107	1300
晒谷量	146	225	500	238	



图三) 单位: 公尺



(图 四)



(图 五)

参 考 文 献

- 〔 1 〕中国科学院数学研究所运筹学研究室，綫性规划的理論及其应用。
- 〔 2 〕朱永津：大搞群众运动以来在綫性规划方面的理論收获，科学通报一九六〇年第十五期。