

一类二阶方程組穩定性的研究*

楊世藩**

§ 1. 对于微分方程組

$$\frac{dx}{dt} = cx + dy + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = ax + by \quad (\bar{\text{I}})$$

不妨假設 $abd \neq 0$, 因为如果 a, b 或 d 有一个为零, 則組 $(\bar{\text{I}})$ 变为可积类型。写

$$cx + dy + f(x) = [ax + by + \alpha(x)] \frac{d}{b}$$

这里

$$\alpha(x) = \frac{bc - ad}{d} x + \frac{b}{d} f(x)$$

故組 $(\bar{\text{I}})$ 总可写为

$$\frac{dx}{dt} = [ax + by + \alpha(x)] \frac{d}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by \quad (\text{I})$$

我們假設其中 $\alpha(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 內連續, 适合解的唯一性条件, 且 $\alpha(x) \neq 0$ 当 $x \neq 0$, $\alpha(0) = 0$ 。因此点 $(0, 0)$ 为唯一的奇点。

本文主要参考 Еругин 的工作^[1]討論組 (I) 的大范围稳定和不稳定, 此討論特別适用于在組 $(\bar{\text{I}})$ 里的

$$bc - ad = 0,$$

此时組 $(\bar{\text{I}})$ 的奇点 $(0, 0)$ 不是簡單奇点, 在定性論书本中也是要特殊考虑的。

我們还假設 $\alpha(x)$ 滿足不等式①

• 承导师胡金昌教授热情指导, 謹此致謝。

• • 本文作者是在我校进修的貴州大学教师。

① 如果 $\alpha(x)$ 滿足: $-r_2 x > \alpha(x) > -r_1 x$ 当 $x \in (0, h)$
 $-r_2 x < \alpha(x) < -r_1 x$ 当 $x \in (-h, 0)$ 則先置变换 $x = -x_1$,

于是 $\alpha_1(x_1) = \alpha(-x_1)$ 將滿足 (1.1)

$$\begin{aligned} r_2 x < \alpha(x) < r_1 x & \quad \text{当 } x \in (0, h) \\ r_2 x > \alpha(x) > r_1 x & \quad \text{当 } x \in (-h, 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

这里 h 为任意小正数, $r_i > 0$ ($i=1,2$), 有时可以 $r_2 = 0$ 或 $r_1 = +\infty$.

为了在条件 (1.1) 下讨论组 (I) 的稳定性, 首先需要观察下二线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \left[ax + by + r_1 x \right] \frac{d}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by \quad (II)$$

和

$$\frac{dx}{dt} = \left[ax + by + r_2 x \right] \frac{d}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by \quad (III)$$

根据书 [2] 第二章 §4 考虑二次方程

$$ab + [b^2 - d(a + r_i)] Z - bdZ^2 = 0$$

它的根为

$$Z_{1,2} = \frac{L_i \pm \sqrt{D_i}}{-2bd} \quad (1.2)$$

这里

$$D_i = L_i^2 + 4ab^2d = M_i^2 - 4db^2r_i = N_i^2 + 4ar_id^2 \quad (1.3)$$

$$L_i = d(a + r_i) - b^2, \quad M_i = d(a + r_i) + b^2,$$

$$N_i = d(a - r_i) + b^2 \quad (i=1,2)$$

并引入

$$K_1 = \frac{-M_i + \sqrt{D_i}}{2\sqrt{D_i}}, \quad K_2 = \frac{-M_i - \sqrt{D_i}}{2\sqrt{D_i}} \quad (1.4)$$

有关系 $K_1 - K_2 = 1$. 于是根据 D_i , K_1 和 K_2 的符号可判别组 (II) 和 (III) 奇点的类型, 并能写出其积分曲线族的方程.

为了简便, 引入记号: $\Gamma^{(I)}$, $\Gamma^{(II)}$ 和 $\Gamma^{(III)}$ 分别表组 (I), (II) 和 (III) 的积分曲线, Γ_H 表直线 $ax + by = 0$, 在其上 $\Gamma^{(I)}$, $\Gamma^{(II)}$ 和 $\Gamma^{(III)}$ 有水平切线, $\Gamma_V^{(I)}$ 表曲线 $ax + by + \alpha(x) = 0$, 在其上 $\Gamma^{(I)}$ 有垂直切线; $\Gamma_V^{(II)}$ 表直线 $ax + by + r_1 x = 0$, 在其上 $\Gamma^{(II)}$ 有垂直切线, $\Gamma_V^{(III)}$ 表直线 $ax + by + r_2 x = 0$, 在其上 $\Gamma^{(III)}$ 有垂直切线, l_1 表直线 $y = Z_1 x$, l_2 表直线 $y = Z_2 x$, 如果 $Z_1 = Z_2 = Z_0$, 则以 l_0 表直线 $y = Z_0 x$.

§2. 设 $d < 0$

在假设条件 (1.1) 中, 我们取 $r_2 = 0$. 由 (1.3), (1.4) 和 (1.2) 有

$$D_1 > 0, \quad K_1 > 0, \quad K_2 < 0$$

$$K_1 Z_1 - K_2 Z_2 = \frac{b}{d}, \quad K_2 Z_1 - K_1 Z_2 = \frac{a + r_1}{b}, \quad Z_1 Z_2 = -\frac{a}{d} \quad (2.1)$$

1)若 $a > 0$, $b > 0$.

由(1.2)和(1.3)有 $Z_1 < 0$, $Z_2 < 0$, $Z_1 + \frac{a}{b} > 0$, $Z_2 + \frac{a}{b} < 0$. 因此 l_1 , l_2 和 Γ_H 的相关位置如图1.

考虑函数

$$V(x, y) = \begin{cases} (-y + Z_1 x)^{mK_1} (y - Z_2 x)^{-mK_2} & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases} \quad (2.2)$$

这里 $H = \left\{ -y + Z_1 x > 0, y - Z_2 x > 0 \right\}$, m 为这样的正常数, 使 $mK_1 > 1$, $-mK_2 > 1$.

利用(2.1)计算 V 的偏导数得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} \frac{m}{d} (-y + Z_1 x)^{mK_1-1} (y - Z_2 x)^{-mK_2-1} (ax + by) & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \begin{cases} \frac{m}{b} (-y + Z_1 x)^{mK_1-1} (y - Z_2 x)^{-mK_2-1} [-(a+r_1)x - by] & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases}$$

于是通过组(I)计算 V 的导数有

$$\frac{dV}{dt} = \begin{cases} \frac{m}{b} (-y + Z_1 x)^{mK_1-1} (y - Z_2 x)^{-mK_2-1} (ax + by) [\alpha(x) - r_1 x] & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases}$$

在 H 内作 $G \equiv \left\{ ax + by < 0, y - Z_2 x > 0 \right\}$, 如图1, 由方程组(I)的通过 Γ_H

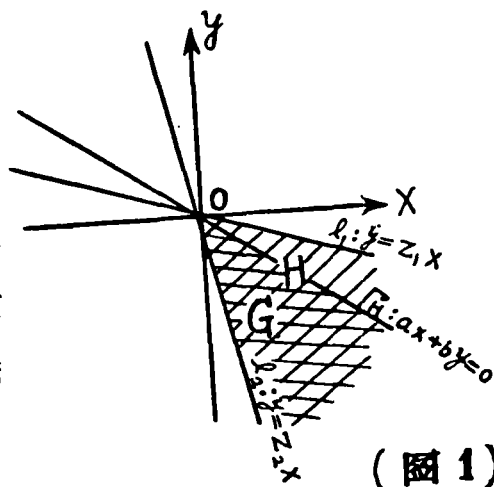
右半直线的一切运动当 t 增大时都进入域

G 内。故 $\frac{dV}{dt} > 0$ 当 $(x, y) \in G$, 根据 Четаев

定理(3)组(I)零解不稳定。

〔注〕 在这里 Четаев 定理中的域 $V > 0$ 为 G 。我们把 Четаев 所定义的以曲线 $V = 0$ 为边界的域 $V > 0$ 缩小为以 $V = 0$ 的一支 $y - Z_2 x = 0$ 和 Γ_H 的右半直线 (通过它组(I)的一切运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时都进入 G 内) 为边界的域 G 。

类似地, 2)若 $a > 0$, $b < 0$, 作



(图1)

$$V(x, y) = \begin{cases} (y - Z_1 x)^{mK_1} (-y + Z_2 x)^{-mK_2} & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases}$$

这里 $H = \{y - Z_1 x > 0, -y + Z_2 x > 0\}$.

3) 若 $a < 0, b < 0$, 作

$$V(x, y) = \begin{cases} (-y + Z_1 x)^{mK_1} (-y + Z_2 x)^{-mK_2} & \text{当 } (x, y) \in H \\ 0 & \text{当 } (x, y) \notin H \end{cases}$$

这里 $H = \{-y + Z_1 x > 0, -y + Z_2 x > 0\}$.

4) 若 $a < 0, b > 0$, 作函数 V 与 (2.2) 相同.

同理可证得 (I) 的零解为不稳定, 相应地也可在另一半平面内选择某域 H , 并在其上作函数 V 证明不稳定的结论. 因此得定理

定理 2.1 对于组 (I) 如果 $d < 0$ 且 $\alpha(x)$ 满足不等式

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(x) < r_1 x & \quad \text{当 } x \in (0, h) \\ \text{或} \quad 0 > \alpha(x) > r_1 x & \quad \text{当 } x \in (-h, 0) \end{aligned}$$

这里 r_1 和 h 为某正常数, 则组 (I) 的零解不稳定.

§ 3. 设 $d > 0, a > 0$.

假设 $\alpha(x)$ 满足不等式

$$\alpha(x) > 0 \quad \text{当 } x \in (0, h), \quad \alpha(x) > 0 \quad \text{当 } x \in (-h, 0) \quad (3.1)$$

即 $x\alpha(x) > 0$ 当 $0 < |x| < h$

我们考虑定正函数 V :

$$V(x, y) = x^2 + \frac{d}{a} y^2$$

通过组 (I) 计算 V 的导数

$$\frac{dV}{dt} = 2 \frac{d}{b} \left[\frac{1}{a} (ax + by)^2 + x\alpha(x) \right] \quad (3.2)$$

1) 如果 $b < 0$, 由 (3.2) 得 $\frac{dV}{dt}$ 为定负函数, 根据已知定理^[4], 组 (I) 的零解为大范围稳定, 其稳定域为 $x^2 + \frac{d}{a} y^2 \leq h^2$, 若 $h = +\infty$ 则得全局稳定.

2) 如果 $b > 0$, 由 (3.2) 得 $\frac{dV}{dt} > 0$ 当 $x \neq 0$. 根据 Четаев 定理, 组 (I) 零解不稳定. 故得下定理

定理3.1 对于組(I)設 $d > 0, a > 0$, 且 $\alpha(x)$ 滿足不等式(3.1). 如果 $b < 0$, 則組(I)零解大範圍穩定, 如果 $b > 0$, 則為不穩定.

§4. 關於討論情形 $d > 0, a < 0$ 的一些預備定理

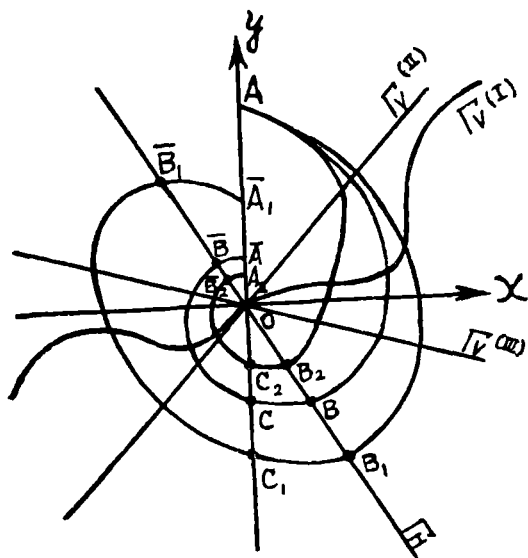
令 $x = 0$ 得 $\frac{dx}{dt} = dy, \frac{dy}{dt} = by$. 因此組(I),(II)和(III)的運動當 t 增大時順時針以同一角(其正切為 $\frac{b}{d}$) 穿過 y 軸. 以下都假設 $\alpha(x)$ 滿足(1.1).

1) 若 $b < 0$

直線 $\Gamma_H, \Gamma_V^{(II)}$ 和 $\Gamma_V^{(III)}$ 的相關位置如圖2, 且組(I),(II)和(III)的方向場有如下不等式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ax+by}{ax+by+\alpha(x)} \frac{b}{d} < \frac{ax+by}{ax+by+r_2x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_V^{(I)} \text{ 上方} \\ > \frac{ax+by}{ax+by+r_2x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_H \text{ 上方且在 } \Gamma_V^{(I)} \text{ 和 } \Gamma_V^{(III)} \text{ 之間} \\ > \frac{ax+by}{ax+by+r_2x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_V^{(III)} \text{ 下方} \\ \frac{ax+by}{ax+by+\alpha(x)} \frac{b}{d} < \frac{ax+by}{ax+by+r_1x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_H \text{ 下方} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ax+by}{ax+by+\alpha(x)} \frac{b}{d} > \frac{ax+by}{ax+by+r_1x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_V^{(II)} \text{ 上方} \\ < \frac{ax+by}{ax+by+r_1x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_H \text{ 上方且在 } \Gamma_V^{(II)} \text{ 和 } \Gamma_V^{(I)} \text{ 之間} \\ > \frac{ax+by}{ax+by+r_1x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_V^{(I)} \text{ 下方} \\ \frac{ax+by}{ax+by+\alpha(x)} \frac{b}{d} > \frac{ax+by}{ax+by+r_2x} \frac{b}{d} \quad \text{在 } \Gamma_H \text{ 下方} \end{array} \right. \quad (4.2)$$



(圖2)

現觀察組(I),(II)和(III)的積分曲線的相關位置:

1° 設從正半 y 軸上任一點 $A(0, y_0)$ 出發的 $\Gamma^{(I)}, \Gamma^{(II)}$ 和 $\Gamma^{(III)}$ 當 $x > 0$ 時順時針在有限時間分別交 Γ_H 於點 $B(x, y), B_1(x_1, y_1)$ 和 $B_2(x_2, y_2)$, 再從點 B, B_1 和 B_2 出發分別引 $\Gamma^{(I)}, \Gamma^{(II)}$ 和 $\Gamma^{(III)}$ 交負半 y 軸於點 $C(0, y_0), C_1(0, y_0^{(1)})$ 和 $C_2(0, y_0^{(2)})$, 即弧 $ABC \subset \Gamma^{(I)}, \widehat{AB_1} \subset \Gamma^{(II)}, \widehat{AB_2} \subset \Gamma^{(III)}, \widehat{B_1C_1} \subset \Gamma^{(II)}, \widehat{B_2C_2} \subset \Gamma^{(III)}$. (在這里我們假定 $\Gamma^{(III)}$ 與 $\Gamma_V^{(III)}$ 的交點的橫坐標 $\leq h$)

由不等式(4.1)和(4.2)知 $\Gamma^{(I)}$ 的弧 ABC 被夾在弧 AB_2C_2 和 弧

$\overline{AB_1C_1}$ 之間, 且有

$$|y_0^{(2)}| < |\bar{y}_0| < |y_0^{(1)}| \quad (4.3)$$

由于方程组的对称性(以 $-x$, $-y$ 分别代替 x , y 方程不改变), 对于 $x < 0$ 有同样的结果。

如果 $|y_0^{(1)}| \leq y_0$, 我们从 C_1 出发在 $x < 0$ 半平面内作 $\Gamma^{(III)}$ 交 Γ_H 于点 $\bar{B}_1$, 再过 $\bar{B}_1$ 作 $\Gamma^{(II)}$ 交正半 y 轴于 $\bar{A}_1$, 那么 $\bar{A}_1$ 必在 A 下方(如图2)。由上所述, 知从域 $\overline{AB_1C_1\bar{B}_1\bar{A}_1A}$ 出发的组(I)的一切运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时都停留在该域内, 且它们之中不可能存在除奇点 $(0,0)$ 外的周期解(因为如果存在不包围原点的周期解, 它必包围另一奇点, 这与奇点唯一性违背; 如果存在包围原点的周期解, 它必交 y 轴, 则与上述论证的结果违背)。根据 Bendixson [5] 定理 IV 这一切运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于原点, 故组(I)零解大范围稳定。

同理, 如果 $|y_0^{(2)}| \geq y_0$, 我们从 C_2 出发在 $x < 0$ 半平面内作 $\Gamma^{(III)}$ 交 Γ_H 于点 $\bar{B}_2$, 再过 $\bar{B}_2$ 作 $\Gamma^{(II)}$ 交正半 y 轴于 A_2 , 那么 A_2 必在 A 上方。则从 A 出发的组(I)的运动被排除在有限域 $\overline{AB_2C_2\bar{B}_2A_2A}$ 之外, 故组(I)零解不稳定。

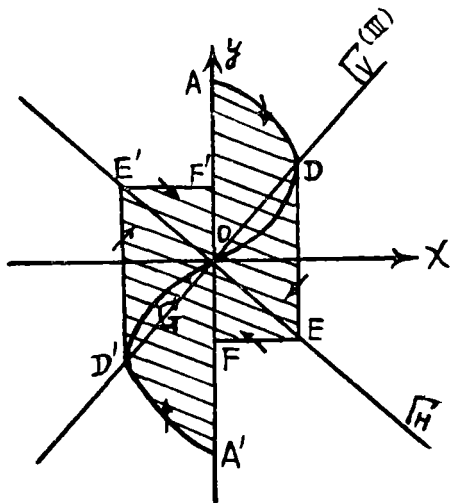
2) 若 $b > 0$ 。依同样的方法得相同的结论。

定理 4.1 在条件 $d > 0$, $a < 0$ 和(1.1)下又设当 t 增大时从正半 y 轴出发的组(II)和(III)的运动与 Γ_H 相交, 且从 Γ_H 出发的运动与负半 y 轴相交, 如果 $|y_0^{(2)}| \geq y_0$, 则组(I)零解不稳定; 如果 $|y_0^{(1)}| \leq y_0$, 则为大范围稳定, 其稳定域 G 为 $\overline{AB_1C_1\bar{B}_1\bar{A}_1A}$ 。

2° 如果组(III)过 A 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方趋于原点, 这时该运动从点 A 出发离开 y 轴后又转回趋于 y 轴上的原点, 必在某一点 D 处其横坐标达到最大。这点 D 即为直线 $\Gamma_V^{(III)}$ 的点, 因此在 $x > 0$ 半平面 $\Gamma_V^{(III)}$ 在 Γ_H 上方(如图3)。在此情形下必然 $b < 0$ (因为若 $b > 0$, 则 $\Gamma_V^{(III)}$ 在 Γ_H 的下方, 矛盾)。

由不等式(4.1)和奇点唯一性, 从域 $\overline{ADOA}$ 出发的组(I)的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于原点。过 D 点作 y 轴的平行线交 Γ_H 于 E , 过 E 作 x 轴的平行线交负半 y 轴于轴 F' 。同样从负半 y 轴上点 A' (取 $|OA'| = |OA|$)出发在 $x < 0$ 半平面中作 $A'D'O$, $D'E'$ 和 $E'F'$, 如果 $|OF| \leq |OA'|$, 按照组(I)的方向场: 在 DE 上有 $\frac{dx}{dt} < 0$,

$$\frac{dy}{dt} < 0, \text{ 在 } EF \text{ 上有 } \frac{dx}{dt} < 0, \frac{dy}{dt}$$



(图 3)

> 0 。故从域 $0DEF0$ 内出发的組 (I) 的运动必或者进入域 $AD0A$ 后趋于原点, 或者穿过 $0F$ 进入 $A'D'0'A'$ 后趋于原点。对于域 $0D'E'F'0$ 也有同样的情况。所以从域 $G \equiv ADEFA'D'E'F'A$ 出发的組 (I) 的一切运动都趋于原点, 即組 (I) 零解大范围稳定, 其稳定域为 G 。注意, 我們选定 A 使 D 的横坐标 $\leq h$ 。如果 $|0F| > |0A'|$ 仍得大范围稳定, 但須将 G 的作法略加修改。故得定理:

定理 4.2 在条件 $d > 0$, $a < 0$ 和 (1.1) 下如果通过正半 y 軸的組 (III) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方趋于原点, 則組 (I) 零解大范围稳定。

3° 如果組 (II) 过点 A 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方趋于无穷远, 根据不等式 (4.2) 則組 (I) 过点 A 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时走出任何指定的有限域外, 因此得下定理

定理 4.3 在条件 $d > 0$, $a < 0$ 和 (1.1) 下如果通过正半 y 軸的組 (II) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方趋于无穷远, 則組 (I) 零解不稳定。

类似地有

定理 4.4 在条件 $d > 0$, $a < 0$ 和 (1.1) 下如果通过 Γ_H 的組 (III) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 $x < 0$ 半平面往下趋于无穷远, 則組 (I) 零解不稳定。

§ 5. 在条件 $d > 0$, $a < 0$ 和 (1.1) 下討論組 (I) 的稳定性。

$$\text{令 } \Delta_i \equiv [d(a+r_i) - b^2]^2 + 4ab^2d = 0$$

得两根

$$r_i = \frac{1}{d} [b^2 - ad \pm 2\sqrt{-adb^2}] = \frac{1}{d} [b \pm \sqrt{-ad}]^2 \geq 0$$

$$\text{記 } A = \frac{1}{d} [b^2 - ad - 2\sqrt{-adb^2}], \quad B = \frac{1}{d} [b^2 - ad + 2\sqrt{-adb^2}], \quad 0 \leq A < B < +\infty$$

当 $0 < r_i < A$ 或 $r_i > B$ 时有 $\Delta_i > 0$, 当 $A < r_i < B$ 时有 $\Delta_i < 0$, 当 $r_i = A$ 或 B 或有 $\Delta_i = 0$ ($i=1, 2$)。

我們將就 r_i 取上述三类不同值进行討論, 当应用 § 4 定理判定大范围稳定时, 按相应定理中所述方法作稳定域, 本节不另贅述。如果 $h = +\infty$ 則得全局稳定。

(甲). 在 (1.1) 中設 $r_2 = 0$, $r_1 = A > 0$ 。

因 $\Delta_1(r_1) = 0$, 由 (2) 組 (II) 的奇点 $(0, 0)$ 为退化焦点, 且一切积分曲綫切直

綫 $l_0: y = Z_0 x$ 于原点, 这里 $Z_0 = Z_1 = Z_2 = \frac{\sqrt{-adb^2}}{bd}$ 且

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b} - Z_0 &= \frac{ad + \sqrt{-adb^2}}{-bd} > 0 & \text{当 } b(ad + b^2) < 0 \\ &< 0 & \text{当 } b(ad + b^2) > 0. \end{aligned}$$

1) 如果 $b(ad + b^2) < 0$, 显然組 (III) 通过 A 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时必与 Γ_H 相交。又由 [6] 第二篇第一章 § 3 $p = \frac{d}{b} (\sqrt{-adb^2} - b^2) > 0$, 故組 (II) 的奇

点为稳定退化焦点, 而当 $x > 0$ 时 l_0 位于 Γ_H 下方, 于是从 Γ_H 出发的组 (II) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时往 Γ_H 下方沿 l_0 趋于原点, 即有 $|y_0^{(1)}| = 0 < y_0$. 根据定理 4.1 得组 (I) 零解大范围稳定.

2) 如果 $b(ad+b^2) > 0$, 这时当 $x > 0$ 时 Γ_H 位于 l_0 下方, 又由 [6] $p < 0$, 故组 (II) 有不稳定退化焦点, 于是从正半 y 轴上出发的组 (II) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方趋于无穷远. 根据定理 4.3 得组 (I) 零解不稳定, 因此得

定理 5.1 对于组 (I) 设 $d > 0$, $a < 0$ 且 $0 < \alpha(x) < Ax$ 当 $x \in (0, h)$, $0 > \alpha(x) > Ax$ 当 $x \in (-h, 0)$. 那么, 如果 $b(ad+b^2) < 0$, 组 (I) 零解为大范围稳定, 如果 $b(ad+b^2) > 0$, 为不稳定.

[附注] 在此 $ad+b^2 \neq 0$. 因为 $ad+b^2 = 0$ 则 $A = 0$, 与假设不符.

(乙). 在 (1.1) 中设 $r_2 = B$, $r_1 > B$.

因 $\Delta_2(r_2) = 0$, 组 (III) 有退化焦点 $(0, 0)$ 且一切积分曲线切 l_0 于 $(0, 0)$,

这里 $Z_0 = \frac{\sqrt{-adb^2}}{-bd}$ 且

$$-\frac{a}{b} - Z_0 = \frac{ad - \sqrt{-adb^2}}{-bd} < 0 \quad \text{当 } b < 0$$

$$> 0 \quad \text{当 } b > 0$$

1) 如果 $b < 0$, 因 $p = -\frac{z}{b} (\sqrt{-adb^2} + b^2) > 0$, 则组 (III) 有稳定退化焦点, 又

当 $x > 0$ 时 l_0 在 Γ_H 上方, 于是从正半 y 轴出发的组 (III) 的运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时在 Γ_H 上方沿 l_0 趋于 $(0, 0)$, 根据定理 4.2 得组 (I) 零解大范围稳定.

2) 如果 $b > 0$, 则组 (III) 有不稳定焦点, 当 $x > 0$ 时 Γ_H 在 l_0 上方, 于是过 Γ_H 的组 (III) 的一切运动当 $t \rightarrow +\infty$ 时往下趋向无穷远. 根据定理 4.4 得组 (I) 零解不稳定, 故得

定理 5.2 对于组 (I) 设 $d > 0$, $a < 0$ 且 $\alpha(x) > Bx$ 当 $x \in (0, h)$; $\alpha(x) < Bx$ 当 $x \in (-h, 0)$. 那么, 如果 $b < 0$, 组 (I) 零解大范围稳定, 如果 $b > 0$, 为不稳定.

(丙), 设在 (1.1) 中的 r_i 适合: $A < r_i < B$

因 $\Delta_i(r_i) < 0$, 故 $(0, 0)$ 为组 (II) 和 (III) 的焦点, 其积分曲线族方程为

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\Delta_i}}{-2bd}\right)^2 x^2 + \left(y - \frac{J_i}{-2bd} x\right)^2} =$$

$$= C_i \exp \left[\frac{M_i}{\sqrt{-\Delta_i}} \arctg \frac{y - (J_i / -2bd)x}{(\sqrt{-\Delta_i} / -2bd)x} \right] \quad (5.1)$$

现按 § 4 的记号建立 $y_0^{(2)}$, $y_0^{(1)}$ 与 y_0 之间的关系式, 首先表示 $\Gamma^{(III)}$ 通过点 $A(0, y_0)$

和直线 Γ_H 上的点 $B_1(x_1, y_1)$, 这里 $y_1 = -\frac{a}{b} x_1$, $x_1 > 0$. 我们有

$$y_0 = C_2 \exp \left(\frac{M_2}{\sqrt{-\Delta_2}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

和

$$\sqrt{\frac{-ar_2}{b^2}} x_1 = C_2 \exp \left(\frac{M_2}{\sqrt{-A_2}} \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right)$$

从上两式消去 C_2 得

$$y_0 = x_1 \sqrt{\frac{-ar_2}{b^2}} \exp \left[\frac{M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \quad (5.2)$$

其次表明 $\Gamma^{(2)}$ 通过 $B_1(x_1, y_1)$ 和 $(0, y_0^{(1)})$, 我們有

$$\sqrt{\frac{-ar_1}{b^2}} x_1 = C_1 \exp \left[\frac{M_1}{\sqrt{-A_1}} \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right]$$

$$\text{和 } -y_0^{(1)} = C_1 \exp \left[\frac{M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

消去 C_1 得

$$-y_0^{(1)} = x_1 \sqrt{\frac{-ar_1}{b^2}} \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right) \right] \quad (5.3)$$

由(5.2)和(5.3)消去 x_1 得 $y_0^{(1)}$ 与 y_0 之間的关系式:

$$\begin{aligned} |y_0^{(1)}| &= y_0 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

同理建立 $y_0^{(2)}$ 与 y_0 之間的关系式

$$\begin{aligned} |y_0^{(2)}| &= y_0 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

根据定理4.1有如下定理

定理5.3 对于組(I)設 $d>0, a<0$ 且 $\alpha(x)$ 滿足不等式(1.1), 其中 r_i 适合 $A < r_i < B, (i=1, 2)$

1) 如果

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \leq 1 \end{aligned}$$

則組(I)零解大范围不稳定,

2) 如果

$$\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-A_1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-A_1}} \right) \right] \geq 1$$

則組 (I) 零解不稳定,

(丁), 設在 (1.1) 中的 r_i 适合: $A < r_1 < B, (< r_2 < B$.

因 $d(r_1) < 0$, 故組 (II) 的奇点 $(0, 0)$ 为焦点, 其积分曲线族方程为 (5.1), 其中 $i=1$, 对于組 (III) 有 $d(r_i) < 0$, 其积分曲线族方程为

$$|y - Z_1 x|^{-K_1} |y - Z_2 x|^{K_2} = C. \quad (5.6)$$

因

$$\begin{aligned} M_2 = d(a + r_2) + b^2 \quad & \begin{cases} < 2(b^2 - \sqrt{-adb^2}) < 0 \\ > 0 \end{cases} & \begin{aligned} & \text{当 } ad + b^2 < 0 \\ & \text{当 } ad + b^2 > 0 \end{aligned} \\ N_2 = d(d - r_2) + b^2 \quad & \begin{cases} > 2(ad + \sqrt{-adb^2}) > 0 \\ < 0 \end{cases} & \begin{aligned} & \text{当 } ad + b^2 > 0 \\ & \text{当 } ad + b^2 < 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

由 (1.3) 和 (1.4) 有

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K_2} > 0 \text{ 和 } p = \frac{-M_2}{b} \quad & \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} & \begin{aligned} & \text{当 } b(ad + b^2) < 0 \\ & \text{当 } b(ad + b^2) > 0 \end{aligned} \\ -\frac{a}{b} Z_{1,2} = \frac{1}{-2bd} [N_2 \mp \sqrt{d_2}] \quad & \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} & \begin{aligned} & \text{当 } b(ad + b^2) < 0 \\ & \text{当 } b(ad + b^2) > 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

1) 若 $b(ad + b^2) < 0$, 則当 $x > 0$ 时 Γ_H 在 l_1 和 l_2 上方, 且原点为組 (III) 的稳定結点, 因此通过正半 y 軸的組 (III) 的运动当 t 增大时必与 Γ_H 相交, 照 § 4 作优曲线 $\widehat{AB_1C_1}$, 这里 $\widehat{AB_1} \subset \Gamma^{(III)}$, $\widehat{B_1C_1} \subset \Gamma^{(II)}$. 首先表明 $\Gamma^{(III)}$ 通过点 $A(0, y_2)$ 和 $B_1(x_1, y_1)$, 这里 $y_1 = -\frac{a}{b} x_1$, $x_1 > 0$, 由 (5.6) 和 $K_1 - K_2 = 1$ 有

$$x_1 = y_0 \left(\frac{N_2 - \sqrt{d_2}}{-2bd} \right)^{-K_1} \left(\frac{N_2 + \sqrt{d_2}}{-2bd} \right)^{K_2} \quad (5.7)$$

其次表明 $\Gamma^{(II)}$ 通过点 B_1 和 $C_1(0, y_0^{(1)})$ 有 (5.3), 从 (5.7) 和 (5.3) 消去 x_1 得 $y_0^{(1)}$ 与 y_0 的关系式

$$\begin{aligned} |y_0^{(1)}| &= y_0 \sqrt{\frac{-4ad^2r_1}{b^2}} \left[\frac{1}{-b} (N_2 - \sqrt{d_2}) \right]^{-K_1} \times \\ &\times \left[\frac{1}{-b} (N_2 + \sqrt{d_2}) \right]^{K_2} \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{d_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-d_1}} \right) \right] \end{aligned}$$

2) 若 $b(ad + b^2) > 0$, 則当 $x < 0$ 时 Γ_H 在 l_1 和 l_2 下方, 且原点为組 (III) 的不稳定結点, 因此从 Γ_H 的右半段出发的組 (III) 的运动当 t 增大时必截負半 y 軸, 照 § 4 作 $\widehat{AB_2C_2}$, 这里 $\widehat{AB_2} \subset \Gamma^{(III)}$, $\widehat{B_2C_2} \subset \Gamma^{(II)}$, 用同样的方法得 $y_0^{(2)}$ 与 y_0 的关系式

$$|y_0^{(2)}| = y_0 \sqrt{\frac{b^2}{-4ad^2r_1}} \left[\frac{1}{b} (N_2 - \sqrt{d_2}) \right]^{K_1} \times \\ \times \left[\frac{1}{b} (N_2 + \sqrt{d_2}) \right]^{-K_2} \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-d_1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-d_1}} \right) \right]$$

根据定理4.1得下定理

定理5.4 对于組(I)設 $d > 0$, $a < 0$, $\alpha(x)$ 滿足(1.1), 这里 r_i 适合: $0 < r_2 < A$, $A < r_1 < B$.

1) 如果 $b(ad + b^2) < 0$ 且

$$\sqrt{\frac{-4ad^2r_1}{b^2}} \left[\frac{1}{-b} (N_2 - \sqrt{d_2}) \right]^{-K_1} \left[\frac{1}{-b} (N_2 + \sqrt{d_2}) \right]^{K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-d_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-d_1}} \right) \right] \leq 1$$

則組(I)零解大范围稳定,

2) 如果 $b(ad + b^2) > 0$ 且

$$\sqrt{\frac{b^2}{-4ad^2r_1}} \left[\frac{1}{b} (N_2 - \sqrt{d_2}) \right]^{K_1} \left[\frac{1}{b} (N_2 + \sqrt{d_2}) \right]^{-K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_1}{\sqrt{-d_1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_1}{\sqrt{-d_1}} \right) \right] \geq 1$$

則为不稳定。

(戌). 設在(1.1)中的 r_i 适合 $A < r_2 < B$, $r_1 > B$.

因 $d_2(r_2) < 0$, 則原点为組(III)的焦点, 对于組(II)有 $L_1 > 0$, $M_1 > 0$, $N_1 < 0$, 由(1.2)–(1.4)有 $0 < K_1/K_2 < 1$, 由此原点为其結点, 其积分曲綫族除 l_2 外都切 l_1 于原点, 当 $b > 0$ 时 $p = \frac{-M_1}{b} < 0$, $Z_{1,2} = (L_1 \pm \sqrt{d_1}) / -2bd < 0$, $Z_1 - Z_2 < 0$,

$-\frac{a}{b} - Z_{1,2} > 0$, 而当 $b < 0$ 时一切相反。

1) 若 $b < 0$, 則組(II)的奇点为稳定結点, 且 $l_{1,2}$ 在第I, III象限, 当 $x > 0$ 时 Γ_H 在 $l_{1,2}$ 下方, l_1 在 l_2 上方, 于是从 Γ_H 上出发的組(II)的运动当 t 增大时必往下截負半 y 軸, 照§4作优曲綫 $\widehat{AB_1C_1}$, 与(丁)2)相仿, 得 $y_0^{(1)}$ 与 y_0 的关系式

$$|y_0^{(1)}| = y_0 \sqrt{\frac{b^2}{-4ad^2r_2}} \left[\frac{1}{b} (N_1 - \sqrt{d_1}) \right]^{K_1} \left[\frac{1}{b} (N_1 + \sqrt{d_1}) \right]^{-K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-d_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{N_2}{\sqrt{-d_2}} \right) \right]$$

2) 若 $b > 0$, 則組(II)有不稳定結点, 且 $l_{1,2}$ 在第II, IV象限, 当 $x > 0$ 时 Γ_H 在 $l_{1,2}$ 上方, l_1 在 l_2 下方, 于是从正半 y 軸出发的組(II)的运动当 t 增大时

必截 Γ_H 。照§4作曲线 $\widehat{AB_2C_2}$ ，与(丁)1)相仿，得 $y_0^{(2)}$ 与 y_0 的关系式

$$|y_0^{(2)}| = y_0 \sqrt{\frac{-4ad^2r_2}{b^2}} \left[\frac{1}{-b} (N_1 - \sqrt{A_1}) \right]^{-K_1} \left[\frac{1}{-b} (N_1 + \sqrt{A_1}) \right]^{K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right]$$

根据定理4.1故得下定理

定理5.5 对于组(I)设 $d > 0$ ， $a < 0$ ， $\alpha(x)$ 满足(1.1)，这里 $A < r_2 < B$ ， $r_1 > B$ 。

1) 如果 $b < 0$ 且

$$\sqrt{\frac{b^2}{-4ad^2r_2}} \left[\frac{1}{b} (N_1 - \sqrt{A_1}) \right]^{K_1} \left[\frac{1}{b} (N_1 + \sqrt{A_1}) \right]^{-K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \leq 1$$

则组(I)零解大范围稳定，

2) 如果 $b > 0$ 且

$$\sqrt{\frac{-4ad^2r_2}{b^2}} \left[\frac{1}{-b} (N_1 - \sqrt{A_1}) \right]^{-K_1} \left[\frac{1}{-b} (N_1 + \sqrt{A_1}) \right]^{-K_2} \times \\ \times \exp \left[\frac{-M_2}{\sqrt{-A_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{N_2}{\sqrt{-A_2}} \right) \right] \geq 1$$

则为不稳定。

§6. 设 $d > 0$ ， $ad + b^2 = 0$ ， $\alpha(x)$ 满足，

$$\alpha(x) > 0 \quad \text{当 } x \in (0, h), \quad \alpha(x) < 0 \quad \text{当 } x \in (-h, 0)$$

于是组(I)写为

$$\frac{dx}{dt} = -bx + dy - \frac{b}{a}\alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = ax + by$$

引入新变量 Y ， $Y = dy - bx$ 即 $y = \frac{b}{d}x + \frac{1}{d}Y$

那么组(I)变为

$$\frac{dx}{dt} = Y - \frac{b}{a}\alpha(x), \quad \frac{dY}{dt} = \frac{b^2}{a}\alpha(x) \quad (I')$$

在讨论中引进曲线 $Y = \frac{b}{a}\alpha(x)$ ，从(I')得到

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\frac{b^2}{a}\alpha(x)}{Y - \frac{b}{a}\alpha(x)} \quad (I'')$$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)\Big|_{Y=0} = -b$$

容易看出，組(I')定义如下的方向场，所有的运动按一定角交 x 轴，在曲线 $Y = \frac{b}{a}\alpha(x)$ 上一切运动横坐标 x 当 $x > 0$ 时达到极大，而当 $x < 0$ 时达到极小，在 Y 轴上纵坐标 Y 当 $Y > 0$ 时达到极大，而当 $Y < 0$ 时达到极小。

1) 若 $b > 0$ 。由(I'')有

$$\frac{dY}{dx} > \frac{\frac{b^2}{a}\alpha(x)}{Y}$$

(图4)

$$\begin{aligned} &\text{当 } Y > 0, x > 0 \quad (\text{本图中的 } y \text{ 应是 } Y) \\ &\text{或当 } Y < 0, x > 0 \text{ 且在曲线 } Y = \frac{b}{a}\alpha(x) \text{ 下方} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\frac{dY}{dx} < 0 \quad \text{当 } Y < 0, x > 0 \text{ 且在曲线 } Y = \frac{b}{a}\alpha(x) \text{ 上方} \quad (6.2)$$

过点 $B_2(h, 0)$ 向上作方程

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\frac{b^2}{a}\alpha(x)}{Y} \quad (6.3)$$

的积分曲线，设它交正半 Y 轴于 $A(0, Y_0)$ ，又过 B_2 向下作 Y 轴平行线，设它交曲线 $Y = \frac{b}{a}\alpha(x)$ 于点 $\bar{B}_2(h, Y_2)$ ，再从 $\bar{B}_2$ 顺时针引(6.3)的积分曲线交负半 Y 轴于点 $C_2(0, Y_0^{(2)})$ ，这里 $Y_0^{(2)} < 0$ 。根据不等式(6.1)和(6.2)知组(I')的从 A 出发的积分曲线当 t 增大时被排出在域 $AB_2\bar{B}_2C_2A$ 的外面(如图4)。设它交负半 Y 轴于 $C(0, \bar{Y}_0)$ ，故有

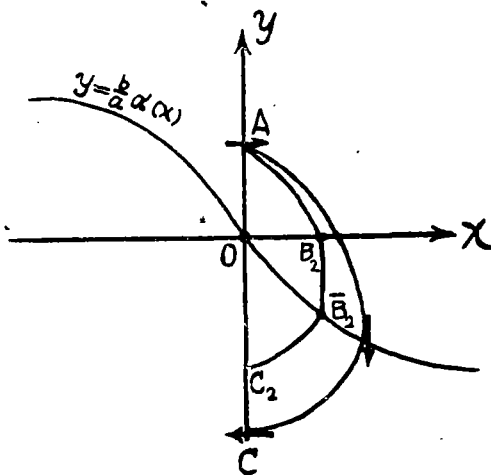
$$-\bar{Y}_0 > -Y_0^{(2)} \quad (6.4)$$

表明(6.3)的积分曲线过点 $A(0, Y_0)$ 和 $B_2(h, 0)$ 有

$$Y^2 \Big|_{Y_0}^0 = 2 \frac{b^2}{a} \int_0^h \alpha(x) dx \quad \text{或} \quad -Y_0^2 = 2 \frac{b^2}{a} \int_0^h \alpha(x) dx \quad (6.5)$$

表明它过点 $\bar{B}_2(h, Y_2)$ 和 $C_2(0, Y_0^{(2)})$ 有

$$Y^2 \Big|_{\frac{b}{a}\alpha(h)}^{Y_0^{(2)}} = 2 \frac{b^2}{a} \int_h^0 \alpha(x) dx$$



$$\text{或} \quad (Y_o^{(2)})^2 - \left(\frac{b}{a}\alpha(h)\right)^2 = -2 \frac{b^2}{a} \int_0^h \alpha(x) dx \quad (6.6)$$

由 (6.5) 和 (6.6) 有

$$Y_o^2 = (Y_o^{(2)})^2 - \left(\frac{b}{a}\alpha(h)\right)^2$$

$$\therefore Y_o^2 < (Y_o^{(2)})^2 \quad \text{或} \quad Y_o < -Y_o^{(2)}$$

由 (6.4) 有 $-\bar{Y}_o > Y_o$. 根据方程 (I') 的对称性故得组 (I') 零解不稳定。

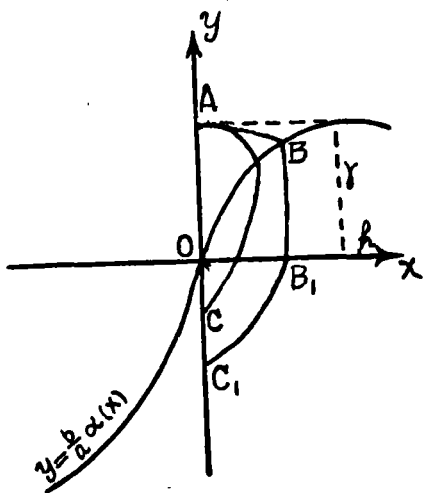
2) 若 $b < 0$ 由 (II'') 有

$$\frac{dY}{dx} < \frac{\frac{b^2}{a}\alpha(x)}{Y} \quad \text{当 } Y > 0, x > 0 \text{ 且在曲线 } Y = \frac{b}{a}\alpha(x) \text{ 上方} \\ \text{或当 } Y < 0 \text{ 和 } x > 0 \quad (6.1')$$

$$\frac{dY}{dx} > 0 \quad \text{当 } Y > 0, \text{ 且在曲线 } Y = \frac{b}{a}\alpha(x) \text{ 下方} \quad (6.2')$$

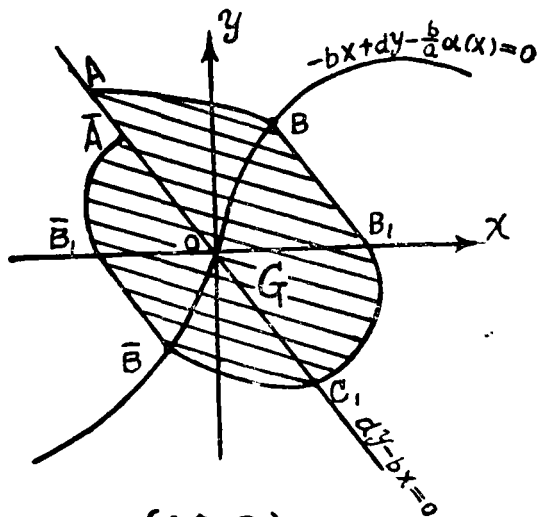
$$\text{设} \quad r = \min \left\{ -\max_{x \in (0, h)} \left(-\frac{b}{a}\alpha(x) \right), \max_{x \in (-h, 0)} \left(-\frac{b}{a}\alpha(x) \right) \right\}$$

从正半 Y 轴上点 $A(0, Y_o)$, 这里选 $Y_o \leq r$, 出发引 (6.3) 的积分曲线, 根据 (6.3) 的方向场, 它必*在第 I 象限与曲线 $Y = \frac{b}{a}\alpha(x)$ 相交, 设其交点为 $B(x_1, y_1)$, 自 B 引 Y 轴的平行线交 x 轴于 $B_1(x_1, 0)$, 再从 B_1 出发引 (6.3) 的积分曲线交负半 Y 轴于



(图 5)

(本图中的 y 应是 Y)



(图 6)

* Еругин 在文章 [1] § 28 中因为忽略了这一点, 以致定理 28.1 有错误 [7].

点 $C_1(0, Y_0^{(1)})$, 这里 $Y_0^{(1)} < 0$ 。(如图 5)。根据不等式 (6.1') 和 (6.2') 知組 (I') 的从 A 出发的运动当 t 增大时在域 ABB_1C_1A 内通过后交負半 Y 軸, 設其交点为 $C(0, \bar{Y}_0)$, 照情形 1) 的方法得 $-\bar{Y} < Y_0$, 故組 (I') 零解大范围稳定。综合上述, 并回到組 (I), 得定理

定理 6.1 对于組 (I) 設 $d > 0$, $ad + b^2 = 0$ 且 $\alpha(x)$ 滿足

$$\alpha(x) > 0 \quad \text{当 } x \in (0, h), \quad \alpha(x) < 0 \quad \text{当 } x \in (-h, 0)$$

如果 $b > 0$ 則組 (I) 零解不稳定, 如果 $b < 0$ 則为大范围稳定, 其稳定域为 G 。

G 的作法如下: 在 x, y 平面从直綫 $dy - bx = 0$ 上点 A 出发 (这里 $|OA| \leq r$) 作方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by - \alpha(x)}{-bx + dy} \quad (6.3') \text{ 即 } (6.3)$$

的积分曲綫交曲綫 $-bx + dy - \frac{b}{a}\alpha(x) = 0$ (即 $Y = \frac{b}{a}\alpha(x)$) 于点 B , 自 B 作平行于 $dy - bx = 0$ 的的直綫交 x 軸于点 B_1 , 再从 B_1 出发作 (6.3') 的积分曲綫交 $dy - bx = 0$ 于 C_1 。类似地, 在另一半平面中作曲綫 $C_1\bar{B}\bar{B}_1\bar{A}$ (如图 6), 于是域 $ABB_1C_1\bar{B}\bar{B}_1\bar{A}$ 即域 G 。

文 献

- [1] Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом ПММ, 14 В. 5, 1930.
- [2] Немыцкий В. В. и Степанов В. В. 微分方程定性論, 1949 (中譯本 1959 年科学出版社)
- [3] Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд 2-е, Гостехиздат. 1955.
- [4] Барбашин Е. А. и Карсовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН, Т. 86, Вып. 3, 1952
- [5] Bendixson I. 微分方程所定义的积分曲綫, 数学进展, 第 3 卷 第一期, 1957, (譯自 Acta Math. 24 (1901).)
- [6] 樂元助, 微分方程所定义的积分曲綫. 科学出版社, 1959.
- [7] Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости сиемом автоматического регулирования, ПММ, 16 В. 5, 1952,