

V 函数在定性研究中的应用

徐 詒

(数学力学系)

大家知道,李雅普諾夫函数V是研究稳定性問題的重要工具。近年它又被推广应用于微分方程的定性研究。这是V函数方法的新发展。

V函数方法是李雅普諾夫发展Poincaré在定性研究中所采用的地形綫方法得来的,这个方法的实质是根据函数V沿着积分曲綫的变化情况来判断积分曲綫性态。因此,很自然会想到它应当可以用来研究积分曲綫分布的拓扑图形。B·B·Немыцкий^[3]說,他早就有这种想法并且在他和他的学生等人的工作中得到証实。他最近写的短文^[3]是对这方面工作的概述。到目前为止,这方面的工作还做得很少。

本文将应用V函数来研究定义于一般度量空間的动力系統的軌綫。根据V函数沿着动力系統的軌綫在“零导集”上各阶导数的符号来判断軌綫性态,

§ 1 基本引理

定义1.^[1] 設給定一度量空間 R ,在其上定义 $-R$ 到自身($p \in R, f(p, t) \in R$)的单参数变换群 $f(p, t)$ ($-\infty < t < +\infty$),具有性質:

I. $f(p, 0) = p$,

II. $f(p, t)$ 对 (p, t) 連續:对于任一收斂数列 $\{t_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$, 及任一收斂数列 $\{p_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$, 恒有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n, t_n) = f(p_0, t_0)$,

III. 对任 $-p \in R$ 和任意的 $t_1, t_2 \in I = (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2),$$

則这种变换群 $f(p, t)$ 称为在空間 R 的动力系統, 参数 t 称为時間。

〔注〕 由性質 II 可推出如下性質:

II'. 对任一点 $p \in R$, 任意大数 $T > 0$ 和任意小数 $\varepsilon > 0$, 恒有这样一个数 $\delta > 0$, 能

使当 $\rho(p, q) < \delta$ 和 $|t| \leq T$ 时,

$$\rho(f(p, t), f(q, t)) < \varepsilon.$$

証明見文[1], 这个性質是以后經常要用到的。

現在引入一些名称和記号, 对于固定的 p , 点集 $f(p, I) = \{f(p, t) : -\infty < t < +\infty\}$ 称为过 p 点的軌綫, 点集 $f(p, I^+) = \{f(p, t) : 0 \leq t < +\infty\}$, 称为过 p 点的正半軌綫, 点集 $f(p, I^-) = \{f(p, t) : -\infty < t \leq 0\}$ 称为过 p 点的負半軌綫。在区間: $T_1 \leq t \leq T_2$, $T_1 \leq t < T_2$, $T_1 < t \leq T_2$, $T_1 < t < T_2$ 的軌綫段分別記为: $f(p, T_1 \leq t \leq T_2)$, $f(p, T_1 \leq t < T_2)$, $f(p, T_1 < t \leq T_2)$, $f(p, T_1 < t < T_2)$ 。

点 p 称为奇点, 如果对一切 $t \in I = (-\infty, +\infty)$ 恒有 $f(p, t) = p$ 。

在本文的 § 1 至 § 4, 研究只含一个奇点的域內軌綫的性态。被研究的奇点記为 O , 并設包含 O 的域 H 为紧閉集, 在 H 上除了 O 以外沒有其他奇点, H 的边界为 $\Gamma_H = H \cap \mathbb{R}^n \setminus H$, H 的开核为 $H^\circ = H \setminus \Gamma_H$ 。在 § 5 研究全空間只有一个奇点的軌綫全局性态。

設 $V(p)$ 为定义于 H (或 $\mathbb{R}^n$) 的連續泛函, 如果极限:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (V(f(p, t)) - V(p)) / t$$

存在, 則称它为泛函 $V(p)$ 沿着軌綫 $f(p, t)$ 在 p 点的导数, 記为 $dV(p)/dt$ 。二阶导数是一阶导数的导数, 以此类推更高阶的导数, K 阶导数以 $d^K V/dt^K$ 表之。

本文設泛函 $V(p)$ 在 H (或 $\mathbb{R}^n$) 連續和具有适当阶連續导数, 視每个命題需要而定。以后, 每个命題所需要的各阶导数都假定它存在和連續。

引理 0. 設 $f(p, t_1 \leq t \leq t_2) \subset H$ (或 $\mathbb{R}^n$),

$V(f(p, t_1)) < r < V(f(p, t_2))$, 則有 $t_0, t_1 < t_0 < t_2$, 使 $V(f(p, t_0)) = r$ 。

証。若謂不然, 則区間 $[t_1, t_2]$ 可以分为两部分:

$$I_1 = \{t : V(f(p, t)) < r, t \in [t_1, t_2]\}, \quad I_2 = \{t : V(f(p, t)) > r, t \in [t_1, t_2]\}.$$

显然, I_1 有上界 t_2 , 故有上确界 t^* 。若 $t^* \in I_1$, 則 $V(f(p, t^*)) < r$, 由 V 的連續性, 对于 $\varepsilon = (r - V(f(p, t^*))) / 2$, 可求 $\delta > 0$, 使当 $\rho(q, f(p, t^*)) < \delta$ 时

$$|V(q) - V(f(p, t^*))| < \varepsilon.$$

由 $f(p, t)$ 的連續性, 对于 $\delta > 0$, 可求 $\tau > 0$, 使当 $|t - t^*| < \tau$ 时, $\rho(f(p, t), f(p, t^*)) < \delta$, 因而有

$$|V(f(p, t)) - V(f(p, t^*))| < \varepsilon,$$

$\therefore V(f(p, t)) < V(f(p, t^*)) + \varepsilon = (r + V(f(p, t^*))) / 2 < r$ 。这与 t^* 为 I_1 的上确界矛盾。

因此, 只有 $t^* \in I_2$, 即 $V(f(p, t^*)) > r$ 。依同理可求 $\tau > 0$, 使当 $|t - t^*| < \tau$ 时, $V(f(p, t)) > r$ 。同样与 t^* 为 I_1 的上确界矛盾。这就証明了我們的断言。

〔注〕对固定的 p , $V(f(p, t))$ 是 t 的連續函数, 并且导数也是对 t 而言, 因此, 不难验证微分学中的洛尔定理, 函数的递增, 递减和极大极小值判别法对 $V(f(p, t))$ 仍适用。

引理 1. 設閉集 $G \subset H$ 含有奇点 O , 如果泛函 $V(p)$ 沿在 G 内任一軌綫 $f(p, t)$ 随 t 增大单調变化(上升或下降), 并且 $f(p, I^+) \subset G$ ($f(p, I^-) \subset G$), 則当 $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$)时, $f(p, t)$ 趋于奇点 O , 当 $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$)时, $f(p, t)$ 离开 G 。

証. 任取一点 $p \in G \setminus O$, 为确定起见設 $f(p, I^+) \subset G$, 因 G 为紧集 H 的闭子集, 故 $f(p, t)$ 的 ω -极限点集 $\Omega p \neq \emptyset$, 我們要証 Ωp 就是奇点 O 。

事实上, 若 $\Omega p \setminus O \neq \emptyset$, 則有 $q \in \Omega p \setminus O$. 由 ω -极限点的定义, 有数列 $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(p, t_n) = q$. 由 V 的連續性推得, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(f(p, t_n)) = V(q)$,

再由 $V(f(p, t))$ 的单調性推得, $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(f(p, t)) = V(q)$, 又 $f(p, t)$ 的 ω -极限

集 Ωp 为闭的不变集[1], 故 $f(q, I) \subset \Omega p \subset G$, 因而, $V(f(q, t)) = V(q)$, 对一切 $t \in I$. 这与 $V(f(q, t))$ 的单調性矛盾, 故 Ωp 仅含奇点 O , 即 $f(p, t) \rightarrow O$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时。

今往証当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $f(p, t)$ 离开 G 。

若謂不然, 則 $f(p, I^-) \subset G$. 因 G 为紧集, 故 $f(p, t)$ 的 α -极限点集 $A p \neq \emptyset$. 設 $q \in A p$, 若 q 为奇点 O , 則

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V(f(p, t)) = V(O) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(f(p, t)), \text{ 这与 } V(f(p, t)) \text{ 的单調性矛盾,}$$

若 q 不是 O , 則因 $A p$ 为闭的不变集[1], 故 $f(q, I) \subset A p \subset G$, 依照上面同法可証 $V(f(q, t)) = V(q)$, 对一切 $t \in I$, 同样与 $V(f(q, t))$ 的单調性矛盾. 因此, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $f(p, t)$ 必离开 G 。

对于 $f(p, I^-) \subset G$ 的情形依同理可証. 証毕。

〔注〕若 $V(p)$ 在 $G \setminus O$ 为正, $V(O) = 0$, $V(f(p, t))$ 随 t 增大单調上升(下降), 則当 $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$)时, $f(p, t)$ 离开 G 。

若謂不然, 則 $f(p, I^+) \cup f(p, I^-) \subset G$. 由引理, 当 $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$)时 $f(p, t) \rightarrow O$, 由 V 的連續性 $V(f(p, t)) \rightarrow V(O) = 0$, 这与 $V(f(p, t))$ 随 t 增大单調上升(下降)矛盾。

依同理, 若 $V(p)$ 在 $G \setminus O$ 为負, $V(O) = 0$, $V(f(p, t))$ 随 t 增大单調上升(下降), 則当 $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$)时, $f(p, t)$ 离开 G 。

引理 2. 設在 $G \subset H$ 滿足: $d^K V / dt^K > r > 0$ ($d^K V / dt^K < r < 0$), K 为正整数, 則对任一 $p \in G$, 軌綫 $f(p, t)$ 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时, 离开 G 。

証. 設 $W = d^{K-1} V / dt^{K-1}$, $M = \sup_{p \in G} W(p)$, $m = \inf_{p \in G} W(p)$, 为确定起见設在 G 滿足 $d^K V / dt^K > r > 0$ 。

若引理不成立, 則对某一 $p \in G$, 在 $t \in I^+$ 或 $t \in I^-$ 恒有 $dW(f(p, t)) / dt > r$. 由积

分求得:

当 $t \geq 0$ 时, $W(f(p, t)) \geq W(p) + rt$,

当 $t < 0$ 时, $W(f(p, t)) < W(p) + rt$,

因此, 当 $t > (M - W(p)) / r$ 时, $W(f(p, t)) > M$, 当 $t < (m - W(p)) / r$ 时, $W(f(p, t)) < m$, 这和 $m \leq W(p) \leq M$ 矛盾。

依同理可证 $d^k V / dt^k < r < 0$ 的情形。证毕。

定义 2. 点集 $\dot{V}^0 = \{p: dV(p)/dt = 0, p \in H\}$ 称为零导集。点集 $\dot{V}^+ = \{p: dV(p)/dt > 0, p \in H\}$ 称为正导集。点集 $\dot{V}^- = \{p: dV(p)/dt < 0, p \in H\}$ 称为负导集。

引理 3 设集 $\Gamma \subset \dot{V}^0 \cap H^0$ 含有奇点 O , 如果在 $\Gamma^* = \Gamma \setminus O$ 满足: $d^k V / dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V / dt^{2n} > 0 (< 0)$, k, n 为正整数, 则 Γ^* 有一个不含 O 的邻域 $U(\Gamma^*)$, 对任一点 $p \in U(\Gamma^*)$, 轨线 $f(p, t)$ 具有下列性质:

1°. $f(p, t_p' < t < t_p) \subset \dot{V}^- \cap U(\Gamma^*)$ ($\dot{V}^+ \cap U(\Gamma^*)$),

2°. $f(p, t_p) \in \dot{V}^0 \cap U(\Gamma^*)$,

3°. $f(p, t_p < t < t_p'') \subset \dot{V}^+ \cap U(\Gamma^*)$ ($\dot{V}^- \cap U(\Gamma^*)$),

4°. $f(p, t)$ 在 t_p' 和 t_p'' 离开 (Γ^*) 。

证. 在 Γ^* 任取一个子集 $\tilde{\Gamma}$, 其闭包不含 O , 则由 $d^{2n} V / dt^{2n}$ 的连续性, 可求 $r > 0$, 使在 $\tilde{\Gamma}$ 满足: $d^{2n} V / dt^{2n} > r$.

由此可求 $\tilde{\Gamma}$ 的一个不含 O 的邻域 $U_1(\tilde{\Gamma})$ 在其内使 $d^{2n} V / dt^{2n} > r/2$. 由引理 2, 对任一点 $p \in U_1(\tilde{\Gamma})$, 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时, 轨线 $f(p, t)$ 离开 $U_1(\tilde{\Gamma})$. 现作邻域 $U(\tilde{\Gamma}) \subset U_1(\tilde{\Gamma})$, 使其内任一轨线与 $\dot{V}^0$ 相交, 作法如下:

设 $p \in \tilde{\Gamma}$. 选足够小的 $\varepsilon > 0$, 使 $S(p, \varepsilon) \subset U_1(\tilde{\Gamma})$.

因 $d^k V(p) / dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V(p) / dt^{2n} > 0$, 故 $V(f(p, t))$ 在 $t = 0$ 取得极小值, 因而可求 $t_p > 0$, 使 $f(p, -t_p \leq t < 0) \subset \dot{V}^- \cap S(p, \varepsilon)$, $f(p, 0 < t \leq t_p) \subset \dot{V}^+ \cap S(p, \varepsilon)$. 记 $p_1 = f(p, -t_p)$, $p_2 = f(p, t_p)$. 由 dV/dt 的连续性, 可求 $\eta > 0$, 使 $S(p_1, \eta) \subset \dot{V}^- \cap S(p, \varepsilon)$, $S(p_2, \eta) \subset \dot{V}^+ \cap S(p, \varepsilon)$. 由动力系统的性质 II', 可求 $\delta > 0$, 使 $f(S(p, \delta), -t_p) \subset S(p, \eta)$, $f(S(p, \delta), t_p) \subset S(p_2, \eta)$, $f(S(p, \delta), -t_p \leq t \leq t_p) \subset S(p, \varepsilon)$, 则在管 $\Phi(p) = f(S(p, \delta), -t_p < t < t_p)$ 的任一轨线与 $\dot{V}^0$ 有唯一交点. 事实上, 对任一点 $q \in \Phi(p)$, 有 t' , $|t'| < t_p$, 使 $f(q, t') \in S(p, \delta)$, $f(q, t' - t_p) \in S(p_1, \eta) \subset \dot{V}^-$, $f(q, t' + t_p) \in S(p_2, \eta) \subset \dot{V}^+$, 故有 $t_q, t' - t_p < t_q < t' + t_p$, 使 $f(q, t_q) \in \dot{V}^0$, 并且 t_q 是唯一的, 否则, 有 $t_q' \neq t_q$, 使 $f(q, t_q') \in \dot{V}^0$, $t' - t_p < t_q' < t' + t_p$, 于是 $V(f(q, t))$ 在 t_q 和 t_q' 达到极

小值, 但 $V(f(q, t))$ 在 $S(p, \varepsilon)$ 没有极大值, 不可能有两个极小值, 故 t_q 唯一。对一切 $p \in \tilde{\Gamma}$, 作这样的管 $\Phi(p)$ 则 $U(\tilde{\Gamma}) = \bigcup_{p \in \tilde{\Gamma}} \Phi(p)$ 为我们所求。它具有引理所列的四个性质。

事实上, 任一点 $q \in U(\tilde{\Gamma})$ 则 $q \in \Phi(p)$, 按 $\Phi(p)$ 的作法, 有唯一的 t_q , $|t_q| < 2t_p$, 使 $f(q, t_p) \in \dot{V}^0 \cap \Phi(p)$ 。又因在 $U(\tilde{\Gamma})$, $V(f(q, t))$ 没有极大值, 故 $f(q, t_q)$ 也是 $f(q, t)$ 与 $\dot{V}^0 \cap U(\tilde{\Gamma})$ 的唯一交点。再因 $U(\tilde{\Gamma}) \subset U_1(\tilde{\Gamma})$, 按 $U_1(\tilde{\Gamma})$ 的性质, 有二数 $t_q' < t_q''$, 使 $f(q, t)$ 在 t_q' 和 t_q'' 离开 $U(\tilde{\Gamma})$ 。因而 $f(q, t_q' < t < t_q) \subset \dot{V}^- \cap U(\tilde{\Gamma})$, $f(q, t_q < t < t_q'') \subset \dot{V}^+ \cap U(\tilde{\Gamma})$ 。

现在来作引理所要求的邻域 $U(\Gamma^*)$ 。

设域 H 的直径为 d , 令 $\Gamma_i = \{p: d/2^{i+1} \leq \rho(p, O) \leq d/2^i, p \in \Gamma^*\}$, 则每个 Γ_i 的闭包不含 O 。据刚才证明, 每个 Γ_i 有邻域 $U(\Gamma_i)$, 它具有引理所列的四个性质。令 $U(\Gamma^*) = \bigcup_{i=0}^{\infty} U(\Gamma_i)$, 则 $U(\Gamma^*)$ 为所求。事实上, 任取一点 $p \in U(\Gamma^*)$, 则 $p \in U(\Gamma_K)$

(某一 K), 按 $U(\Gamma_K)$ 的性质, 有 $t_p' < t_p < t_p''$ 使 $f(p, t_p) \in \dot{V}^0 \cap U(\Gamma_K)$, $f(p, t_p' < t < t_p) \subset \dot{V}^- \cap U(\Gamma_K)$, $f(p, t_p < t < t_p'') \subset \dot{V}^+ \cap U(\Gamma_K)$, $f(p, t)$ 在 t_p' 和 t_p'' 离开 $U(\Gamma_K)$ 。我们进一步要证 $f(p, t)$ 在 t_p' 和 t_p'' 离开 $U(\Gamma^*)$ 。由于 $V(f(p, t))$ 在 $t = t_p$ 取得极小值, 因此在 $t < t_p'$ 及 $t > t_p''$, $f(p, t)$ 不会进入任一 $U(\Gamma_i)$ ($i \neq K$)。否则, 有 $t_p^* \neq t_p$, 使 $f(p, t_p^*) \in \dot{V}^0 \cap U(\Gamma_i)$, 此时又得一极小值 $V(f(p, t_p^*))$, 但是, 在 $U(\Gamma^*)$, $V(f(p, t))$ 没有极大值, 不可能有两个极小值。这就证明 $f(p, t)$ 在 t_p' 和 t_p'' 离开 $U(\Gamma^*)$ 。因此, $U(\Gamma^*)$ 为所求。

对于 $d^{2n}V/dt^{2n} < 0$ 的情形依同理可证。证毕。

定义 3. 点集 $V_0 = \{p: V(p) = 0, p \in H\}$ 称为零值集; 点集 $V_+ = \{p: V(p) > 0, p \in H\}$ 称为正值集; 点集 $V_- = \{p: V(p) < 0, p \in H\}$ 称为负值集。

引理 4. 设集 $\Gamma \subset V_0 \cap H^0$ 含有奇点 O 。如果在 $\Gamma^* = \Gamma \setminus O$ 满足, $dV/dt > 0$ (< 0): 则 Γ^* 有一个不含奇点 O 的邻域 $U(\Gamma^*)$, 使对任一点 $p \in U(\Gamma^*)$, 轨线 $f(p, t)$ 具有下列性质:

- 1°. $f(p, t < t_p' < t_p) \subset V_- \cap U(\Gamma^*)$ ($V_+ \cap U(\Gamma^*)$),
- 2°. $f(p, t_p) \in V_0 \cap U(\Gamma^*)$,
- 3°. $f(p, t_p < t < t_p'') \subset V_+ \cap U(\Gamma^*)$ ($V_- \cap U(\Gamma^*)$),
- 4°. $f(p, t)$ 在 t_p' 和 t_p'' 离开 $U(\Gamma^*)$,

证略。它与引理 3 的证明很类似。

定义 4. 轨线 $f(p, t)$ 称为抛物轨线, 如果当 $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) 时, $f(p, t) \rightarrow O$, 当 t 减(增)至某一数 t_p 时, $f(p, t)$ 离开 H 。点 p 称为抛物点。

軌綫 $f(p, t)$ 称为双曲軌綫, 如果当 t 减少至某 t_p' 时和当 t 增大至某一 t_p'' 时, $f(p, t)$ 离开 H . 点 p 称为双曲点.

軌綫 $f(p, t)$ 称为椭圆軌綫, 如果 $f(p, t) \subset H$ 且当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(p, t) \rightarrow O$. 点 p 称为椭圆点.

§2 A型法域

在这一节对泛函 $V(p)$ 补充如下假设:

$0 \leq V(p) \leq 1$, $p \in H$, 其中 $V(O) = 0$, $V(p) > 0$, 对于 $p \in H \setminus O$; $V(p) = 1$, 对于 $p \in \Gamma_H$.

定义5. 闭集 $G \subset H$ 称为A型法域, 如果满足:

1) 边界 $\Gamma_G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, 其中 $\Gamma_0 = \Gamma_G \cap \Gamma_H \neq \emptyset$, $\Gamma_1 = (\Gamma_G \setminus \Gamma_0) \subset \dot{V}^0$, 奇点 $O \in \Gamma_1$.

Γ_0 称为 G 的底面, Γ_1 称为 G 的侧面.

2) $G \setminus \bar{\Gamma}_1 \subset \dot{V}^+$ 或 $\dot{V}^-$.

定理1. 如果在A型法域 G 的侧面 $\bar{\Gamma}_1 \setminus O$ 满足: $d^k V / dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V / dt^{2n} > 0$, k, n 为正整数, 则在 G 至少有一条抛物軌綫, 凡非抛物軌綫离开 G , 其一端与 $\bar{\Gamma}_1 \setminus O$ 相交, 另一端与 G 的底面 Γ_0 相交.

証. 不妨設 $G \setminus \bar{\Gamma}_1 \subset \dot{V}^+$. 按引理3作 $\Gamma_1^* = \Gamma_1 \setminus O$ 的邻域 $U(\Gamma_1^*)$, 表 $G = (G \cap U(\Gamma_1^*)) \cup (G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*)))$.

若 $p \in G \cap U(\Gamma_1^*)$, 则按 $U(\Gamma_1^*)$ 的性质, 当 t 减少时, $f(p, t)$ 与 Γ_1^* 相交, 当 t 增大时, $f(p, t)$ 离开 $G \cap U(\Gamma_1^*)$, 进入 $G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*))$.

若 $p \in G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*))$, 如果 $p \in \bar{\Gamma}_1 \setminus \Gamma_1$, 则显然 $f(p, t)$ 立刻离开 G , 因为 $V(p) = 1$ (V 在 H 的最大值), 同时 $V(f(p, t))$ 在该点达到极小值; 如果 $p \notin \bar{\Gamma}_1$, 则由引理1[注], 当 t 增大时, $f(p, t)$ 离开此域, 但它不能进入 $G \cap U(\Gamma_1^*)$, 否则, 会与 Γ_1^* 相交, $V(f(p, t))$ 在此交点取得极小值, 这与 $V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升矛盾. 因此, 它只能通过 G 的底面 Γ_0 离开 G . 当 t 减少时, 它可能进入 $G \cap U(\Gamma_1^*)$, 此时与 Γ_1^* 相交, 也可能不进入 $G \cap U(\Gamma_1^*)$, 因此, 不离开 $G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*))$, 由引理1, 它一定趋于奇点 O . 此时得到抛物軌綫. 总结上面所述可知, G 的任一軌綫或是抛物軌綫, 或是离开 G , 其一端与 $\bar{\Gamma}_1 \setminus O$ 相交, 另一端与 Γ_0 相交.

今往証抛物軌綫存在, 設 r 为一定数, $0 < r < 1$. 令 $V_r = \{p: V(p) = r, p \in G\}$,

$\Gamma_{1r} = \{p: V(p) \leq r, p \in \Gamma_1\}$. 如果 $p \in \Gamma_{1r} \setminus O$, 则 $f(p, t)$ 必与 V_r 相交于唯一点 q , 因为 $V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升. 于是每一点 $p \in \Gamma_{1r} \setminus O$ 对应于唯一点 $q \in V_r$. 这个对应以 T 表之.

今証 T 为連續。先証 $p \in \Gamma_{1r} \cap V_r$ 的情形。此时它的对应点 $q \in V_r$ 为 G 的内点。任給 $\varepsilon > 0$ (足够小)。作 q 的邻域 $S(q, \varepsilon) \subset G$ 。在其內选取两点, $q_1 = f(p, t_1) \in S(q, \varepsilon)$, $V(q_1) < r$, $q_2 = f(p, t_2) \in S(q, \varepsilon)$, $V(q_2) > r$, $t_2 > t_1$, 由 V 的連續性和动力系統的性质II', 可求 $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ 使 $S(q_1, \eta_1) \subset S(q, \varepsilon)$, 当 $q' \in S(q_1, \eta_1)$ 时, $V(q') < r$, $S(q_2, \eta_2) \subset S(q, \varepsilon)$, 当 $q' \in S(q_2, \eta_2)$ 时, $V(q') > r$, $f(S(q_1, \eta_1), t_2 - t_1) \subset S(q_2, \eta_2)$, $f(S(q_1, \eta_1), 0 \leq t \leq t_2 - t_1) \subset S(q_1, \varepsilon)$ 。今确定 $\delta > 0$, 使 $f(S(p, \delta), t_1) \subset S(q_1, \eta_1)$, 則 $S(p, \delta) \cap \Gamma_{1r}$ 映入 $S(q, \varepsilon) \cap V_r$ 。事实上, 若 $p^* \in S(p, \delta) \cap \Gamma_{1r}$, 則 $f(p^*, t_1) \in S(q_1, \eta_1)$, $f(p^*, t_2) \in S(q_2, \eta_2)$ 。因此, $V(f(p^*, t_1)) < r$, $V(f(p^*, t_2)) > r$ 。由 $V(f(p^*, t))$ 的連續性和单調性。有唯一的 t_0 , $t_1 < t_0 < t_2$, 使 $V(f(p^*, t_0)) = r$ 。即 $f(p^*, t_0) \in S(q, \varepsilon) \cap V_r$ 。再証 $p \in \Gamma_{1r} \cap V_r$ 的情形。此时它的对应点 $q = p$ 为 G 的边界点。同上作 $S(q, \varepsilon)$, 則有 $q_0 = f(p, t^0) \in S(q, \varepsilon) \cap G$, $t^0 > 0$, $V(q_0) > r$ 。由 V 的連續性和动力系統的性质II', 可求 $\eta > 0$, 使 $S(q_0, \eta) \subset S(q, \varepsilon) \cap G$, 当 $q' \in S(q_0, \eta)$ 时, $V(q') > r$ 。今选 $\delta > 0$, 使 $S(p, \delta) \subset S(q, \varepsilon)$, $f(S(p, \delta), t^0) \subset S(q_0, \eta)$, $f(S(p, \delta), 0 \leq t \leq t_0) \subset S(q, \varepsilon)$ 。則同样可証 $S(p, \delta) \cap \Gamma_{1r}$ 映入 $S(q, \varepsilon) \cap V_r$ 。因此, T 为連續。

依同理可証 T^{-1} 也連續。

如果对任一 $p \in V_r$, 軌綫 $f(p, t)$ 都不是拋物軌綫, 則 T 为 $\Gamma_{1r} \setminus O$ 到 V_r 的拓扑映象, 但 V_r 为閉, $\Gamma_{1r} \setminus O$ 不閉, 这是不可能的。因此, 至少有一条拋物軌綫存在。

定理2. 如果在 A 型法域 G 的側面 $\bar{\Gamma}_1 \setminus O$ 滿足: $d^k V / dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V / dt^{2n} < 0$, k, n 为正整数, 則在 G 至少有一条拋物軌綫, 凡非拋物軌綫其一端与 $\bar{\Gamma}_1 \setminus O$ 相交, 另一端趋于奇点 O 。

証。 不妨設 $G \setminus \bar{\Gamma}_1 \subset \dot{V}^+$ 。按引理3作 $\Gamma_1^* = \Gamma_1 \setminus O$ 的邻域 $U(\Gamma_1^*)$ 。表 $G = (G \cap U(\Gamma_1^*)) \cup (G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*)))$ 。

若 $p \in G \cap U(\Gamma_1^*)$, 則当 t 增大时, $f(p, t)$ 与 Γ_1^* 相交; 当 t 减少时, $f(p, t)$ 离开 $G \cap U(\Gamma_1^*)$ 进入 $G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*))$ 。

若 $p \in G \setminus (G \cap U(\Gamma_1^*))$, 則当 t 增大时, 由引理1[注], $f(p, t)$ 离开此域, 它可能进入 $G \cap U(\Gamma_1^*)$, 此时与 Γ_1^* 相交, 也可能通过底面 Γ_0 离开 G , 当 t 减少时, $f(p, t)$ 不能与 Γ_1^* 相交, 否則 $V(f(p, t))$ 在此交点取得极大值, 这与 $V(f(p, t))$ 随 t 减少单調下降矛盾, 也不能与底面 Γ_0 相交, 因为 V 在 Γ_0 达到最大值。因此, $f(p, t^-) \subset G$, 由引理1, $f(p, t) \rightarrow O$ 。当 $t \rightarrow -\infty$ 时。

今往証拋物軌綫存在。考察由底面 Γ_0 的一点 $p \in \dot{V}^0$ 出发的軌綫 $f(p, t)$ 。因为 $V(p) = 1$, 故此当 t 增大时 $f(p, t)$ 离开 G , 从而离开 H , 而当 t 减少时, 由于 $V(f(p, t))$ 随 t 减少单調下降, 因此, 不会与 Γ_0 相交, 也不会与 Γ_1^* 相交(否則, 会达到极大值)。故 $f(p, t^-) \subset G$ 。由引理1, $f(p, t) \rightarrow O$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时。此即拋物軌綫。

定理3. 設 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$; 其中每一 G_i 为 A 型法域。如果在 $\dot{V}^0 \setminus O$ 滿足:

$d^k V/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n}V/dt^{2n} > 0 (< 0)$, k, n 为正整数, 则在 $H \setminus O$ 有且只有双曲(椭圆)轨线和抛物轨线。

証, 先証在 $\dot{V}^0 \setminus O$, $d^k V/dt^k = 0, k < 2n, d^{2n}V/dt^{2n} > 0$ 的情形, 設 $p \in H \setminus O$. 它所在的法域为 G_i , 为确定起见設 $G_i \setminus \bar{\Gamma}_{1i} \subset \dot{V}^+$, Γ_{1i} 为 G_i 的侧面。由定理 1, $f(p, t)$ 或是抛物轨线, 或非抛物轨线, 则它离开 G_i , 当 t 增大时与 G_i 的底面 Γ_{0i} 相交, 当 t 减少时与侧面 $\bar{\Gamma}_{1i} \setminus O$ 相交后, 它或者直接离开 H , 或者进入另一法域 G_j , 当 t 进一步减少时, 它从 G_j 的底面 Γ_{0j} 离开 H . 因此, 得到双曲轨线。

今証在 $\dot{V}^0 \setminus O$, $d^k V/dt^k = 0, k < 2n, d^{2n}V/dt^{2n} < 0$ 的情形。設 $p \in H \setminus O$. 它属于某一法域 G_i . 由定理 2, $f(p, t)$ 或是抛物轨线, 或非抛物轨线, 此时其一端趋于奇点 O , 另一端与 G_i 的侧面相交后进入另一法域。再由定理 2, 它在这个法域内趋于奇点 O . 因此得到椭圆轨线。証毕。

定理 4 如果在 $\dot{V}^0 \setminus O$ 满足: $d^k V/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n+1, d^{2n+1}V/dt^{2n+1} > 0 (< 0)$, k, n 为正整数或零, 则在 $H \setminus O$ 的一切轨线为抛物轨线。

証。为确定起见, 設在 $\dot{V}^0 \setminus O$, $d^k V/dt^k = 0, k < 2n+1, d^{2n+1}V/dt^{2n+1} > 0$.

由于下面的需要, 我們往証轨线的有限弧至多有有限个零导集 $\dot{V}^0$ 的点。若謂不然, 則在某一弧段 $f(p, t_1 \leq t \leq t_2)$ 含有点列 $\{f(p, t_i)\} \subset \dot{V}^0, t_1 \leq t_i \leq t_2, i = 1, 2, \dots$. 因 $f(p, t, t_1 \leq t \leq t_2)$ 为紧闭集^[1]. 故有极限点 $q = f(p, t_0) \in \dot{V}^0, t_1 \leq t_0 \leq t_2$. 为简单起见, 設 $f(p, t_i) \rightarrow q, i \rightarrow +\infty$, 因 $d^{2n+1}V(q)/dt^{2n+1} > 0$, 由导数的連續性, 可求 $\delta > 0$, 使在 $S(q, \delta)$ 内, $d^{2n+1}V/dt^{2n+1} > 0$. 又因 $d^{2n}V(q)/dt^{2n} = 0$, 因此, 当 $q' \in f(p, t < t_0) \cap S(q, \delta)$ 时, $d^{2n}V(q')/dt^{2n} < 0$, 当 $q' \in f(p, t_0 < t) \cap S(q, \delta)$ 时, $d^{2n}V(q')/dt^{2n} > 0$. 由 $f(p, t_i) \rightarrow q$, 可求 N , 使当 $i \geq N$ 时, $f(p, t_i) \in S(q, \delta)$, 如果 $t_i < t_0$, 則 $d^{2n}V(p_i)/dt^{2n} < 0$, 如果 $t_i > t_0$, 則 $d^{2n}V(p_i)/dt^{2n} > 0$, 这和假設 $d^{2n}V(p_i)/dt^{2n} = 0$ 矛盾, 因此, 轨线的有限弧至多能包含 $\dot{V}^0$ 的有限个点。

今往証沿任一轨线 $f(p, t)$, $V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升。任取两点 $f(p, t_1)$ 和 $f(p, t_2), (t_1 < t_2)$. 据刚才証明在 $f(p, t_1 \leq t \leq t_2)$ 至多含有 $\dot{V}^0$ 的有限个点, 設这些点为 $p_i = f(p, t^{(i)}), i = 1, 2, \dots, m, t_1 \leq t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(m)} \leq t_2$. 因 $d^k V(p_i)/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n+1, d^{2n+1}V(p_i)/dt^{2n+1} > 0$, 故此, 沿每一轨线段 $f(p, t_1 \leq t \leq t^{(1)}), \dots, f(p, t^{(i)} \leq t \leq t^{(i+1)}), \dots, f(p, t^{(m)} \leq t \leq t_2)$, 泛函 V 单调上升, 由此推得 $V(f(p, t_1)) < V(f(p, t_2))$. 因此, 对任一点 $p \in \dot{V}^0 \setminus O, V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升。由 V 的連續性和动力系统的性质 II' 不难証明有 $\delta > 0$ 存在, 使当 $q \in S(p, \delta)$ 时 $V(f(q, t))$ 单调上升。

若 $f(p, I) \cap \dot{V}^0 = \emptyset$, 則显然 $V(f(p, t))$ 单调上升。否則 $\dot{V}^- \neq \emptyset$. 因而 $\dot{V}^-$ 有边界点 $q \in \dot{V}^0 \setminus O$. 据刚才証明可求 $\delta > 0$, 使对任一点 $q' \in S(q, \delta), V(f(q', t))$ 单调上升, 这与 q 为 $\dot{V}^-$ 的边界点矛盾。

綜上所述, 对任一点 $p \in H \setminus O, V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升。而因 V 在 H 的

边界取得最大值, 所以 $f(p, I^-) \subset H$. 故由引理 1, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $f(p, t) \rightarrow O$, 当 t 足够大时, $f(p, t)$ 离开 H , 因此 $f(p, t)$ 为抛物轨线. 证毕.

§ 3 B 型法域

在这一节假设泛函 $V(p)$ 为变号, $dV(p)/dt$ 为定号.

定义 6. 闭集 $G \subset H$ 称为 B 型法域, 如果满足:

1) 边界 $\Gamma_G = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$, 其中 $\Gamma_0 = \Gamma_G \cap \Gamma_H \neq \emptyset$, $\Gamma_2 = (\Gamma_G \setminus \Gamma_0) \subset V_0$, 奇点 $O \in \Gamma_2$.

Γ_0 称为 G 的底面, Γ_2 称为 G 的侧面.

2) $G \setminus \bar{\Gamma}_2 \subset V_+$ 或 V_- .

定理 5. 如果在 B 型法域 $G \setminus O$ 满足: $dV/dt > 0 (< 0)$, 则在 G 至少有一条抛物轨线; 凡非抛物轨线属于下列两种类型之一: ① 离开 G , 其一端与 G 的侧面 $\Gamma_2 \setminus O = \Gamma_2^*$ 相交, 另一端与 G 的底面 Γ_0 相交; ② 双曲轨线.

证. 为确定起见设在 $G \setminus O$, $dV/dt > 0$, 并不妨设 $G \setminus \bar{\Gamma}_2 \subset V_+$. 按引理 4 作 Γ_2^* 的邻域 $U(\Gamma_2^*)$, 表 $G = (G \cap U(\Gamma_2^*)) \cup (G \setminus (G \cap U(\Gamma_2^*)))$.

若 $p \in G \cap U(\Gamma_2^*)$, 则按 $U(\Gamma_2^*)$ 的性质, 当 t 减少时 $f(p, t)$ 与 Γ_2^* 相交, 当 t 增大时, $f(p, t)$ 离开 $G \cap U(\Gamma_2^*)$, 进入 $G \setminus (G \cap U(\Gamma_2^*))$.

若 $p \in G \setminus (G \cap U(\Gamma_2^*))$, 则由引理 1 [注], 当 t 增大时, $f(p, t)$ 离开此域. 它不能进入 $G \cap U(\Gamma_2^*)$, 否则, 会与 Γ_2^* 相交, $V(f(p, t))$ 在此交点取得零值, 这与 $V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升矛盾. 因此, 它只能通过 G 的底面 Γ_0 离开 G . 当 t 减少时, 它可能进入 $G \cap U(\Gamma_2^*)$, 此时与 Γ_2^* 相交, 也可能通过 Γ_0 离开 G , 此时得双曲轨线, 最后可能 $f(p, I^-) \subset G$, 此时由引理 1, $f(p, t) \rightarrow O$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 即 $f(p, t)$ 为抛物轨线.

今往证抛物轨线存在, 设 $r > 0$ 足够小, 令 $V_r = \{p: V(p) = r, p \in G\}$, $\tilde{V}_r = \{p: f(p, I) \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset, p \in V_r\}$, $\tilde{\Gamma}_2 = \{p: f(p, I) \cap V_r = \emptyset, p \in \bar{\Gamma}_2 \setminus O\}$. 如果在 G 没有抛物轨线, 则 $\tilde{V}_r, \tilde{\Gamma}_2$ 为开集, 事实上, 若 $p \in \tilde{V}_r$, 则 p 为双曲点. 因此, 有 $t'_p < t''_p$ 使 $l_p \equiv f(p, t'_p \leq t''_p) \subset G$, $f(p, t)$ 在 t'_p 和 t''_p 通过 Γ_0 离开 G ; 并且, 由 $\tilde{V}_r$ 的性质推得 $\rho(\bar{\Gamma}_2, l_p) = d > 0$. 由动力系统的性质 I', 可求 $\delta > 0$, 使当 $q \in S(p, \delta)$ 和 $t'_p \leq t \leq t''_p$ 时, $\rho(f(q, t), f(p, t)) < d/2$. 故 $f(q, I) \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$. 因此, $S(p, \delta) \cap \tilde{V}_r \subset \tilde{V}_r$, 即 $\tilde{V}_r$ 为开集. 依同理可证 $\tilde{\Gamma}_2$ 也是开集. 故 $V_r' = V_r \setminus \tilde{V}_r$ 和 $\Gamma_2' = \bar{\Gamma}_2 \setminus \tilde{\Gamma}_2$ 为闭集, 因假定在 G 无抛物轨线, 依定理 1 同法可证 V_r' 与 $\Gamma_2' \setminus O$ 为拓扑对应, 但 V_r' 为闭集, 而 $\Gamma_2' \setminus O$ 不是闭集. 这是不可能的. 因此, 抛物轨线必存在.

定理 6. 设 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中每一 G_i 为 B 型法域. 如果在 $H \setminus O$ 满足: $dV/dt > 0$

(<0), 则在 $H \setminus O$ 有且只有双曲軌綫和拋物軌綫。

証略。由定理 5 依定理 3 同法可証。

〔注〕 由这个定理进一步知道, 文〔6〕所論的奇点之任一邻域只有双曲軌綫和拋物軌綫, 因而, 除了奇点以外, 不包含整条軌綫。

§4 C 型法域

在这一节設泛函 $V(p)$ 不是定号的 (常号或变号), $dV(p)/dt$ 也不是定号的。

定义 7. 閉集 $G \subset H$ 称为 C 型法域, 如果满足:

1) 边界 $\Gamma_G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 其中 $\Gamma_0 = \Gamma_G \cap \Gamma_H \neq \emptyset$, $\Gamma_1 = (\Gamma_G \setminus \Gamma_0) \cap \dot{V}^+ \neq \emptyset$, $\Gamma_2 = (\Gamma_G \setminus \Gamma_0) \cap \dot{V}^- \neq \emptyset$, 奇点 $O \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, Γ_0 称为 G 的底面, Γ_1 和 Γ_2 称为 G 的侧面。

2) $G \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subset \dot{V}^+ \cap V_+$, 或 $\dot{V}^+ \cap V_-$, 或 $\dot{V}^- \cap V_+$, 或 $\dot{V}^- \cap V_-$ 。

注: 若 $\Gamma_2 = \emptyset$, 则 G 为 A 型法域; 若 $\Gamma_1 = \emptyset$, 则 G 为 B 型法域。

定理 7. 如果在 C 型法域 G 满足: $G \setminus \Gamma_1 \subset \dot{V}^+ (\dot{V}^-)$, 在侧面 $\Gamma_1 \setminus O$, $d^k V/dt^k = 0$ 。对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V/dt^{2n} > 0$, k, n 为正整数, 则在 G 至少有一条拋物軌綫, 凡非拋物軌綫属于下列三种类型之一: ①离开 G , 其一端与 G 的侧面 $\Gamma_1 \setminus O$ 相交, 另一端与 G 的底面 Γ_0 相交; ②离开 G , 其一端与 G 的侧面 $\Gamma_2 \setminus O$ 相交, 另一端与 G 的底面 Γ_0 相交; ③双曲軌綫。

証略。依定理 1 和定理 5 同法可証。

以下两定理描述泛函 $V(p)$ 不是定号, dV/dt 也不是定号时, 軌綫的性态。

定理 8. 設 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中每一 G_i 为 A, B, C 型法域之一, 如果在 $\dot{V}^+ \setminus O$ 满足:

$d^k V/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n$, $d^{2n} V/dt^{2n} > 0$, k, n 为正整数, 则在 $H \setminus O$ 有且只有双曲軌綫和拋物軌綫。

証略。由定理 1, 定理 5 和定理 7, 依定理 3 同法可証。

定理 9. 設 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中每一 G_i 为 A, B, C 型法域之一。如果在 $\dot{V}^+ \setminus O$ 满足:

$d^k V/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n+1$, $d^{2n+1} V/dt^{2n+1} > 0 (< 0)$, k, n 为正整数, 则在 $H \setminus O$ 有且只有双曲軌綫和拋物軌綫。

証。为确定起见, 設在 $\dot{V}^+ \setminus O$, $d^k V/dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n+1$, $d^{2n+1} V/dt^{2n+1} > 0$ 。在定理 4 已經証明, 对任一点 $p \in H \setminus O$, $V(f(p, t))$ 随 t 增大单調上升。

若 $p \in \dot{V}^+ \setminus O$, 則当 $t > 0$ 时, $V(f(p, t)) > 0$ 单調上升, 当 $t < 0$ 时, $V(f(p, t)) < 0$ 单調下降。因此, 由引理 1〔注〕当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时, $f(p, t)$ 离开 P , 即 $f(p, t)$ 为双曲軌綫。

若 $p \in V_+(V_-)$, 由引理 1 [注], 当 t 增大(减少)时, $f(p, t)$ 离开 H , 当 t 减少(增大)时可能直接离开 H , 也可能与 $V_0 \setminus O$ 相交后离开 H , 此时 $f(p, t)$ 为双曲线, 还可能不离开 H , 则 $f(p, I^-) (f(p, I^+)) \subset H$. 此时, 由引理 1, $f(p, t) \rightarrow O$, 当 $t \rightarrow -\infty (+\infty)$ 时, 即 $f(p, t)$ 为抛物轨线. 依定理 1 和定理 5 同法可证抛物轨线存在. 证毕.

定理 10. 设 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中每一 $G_i \setminus O$ 由双曲点和抛物点组成, 则在 H 的一切双曲点集合 Hr 为 $G\delta$ 型集合.

证. 设抛物点集合为 Hn , 则 $H \setminus Hr = Hn \cup O = \bigcup_{i=1}^{\infty} (Hn \cup O) \cap G_i$, 我们要证

$(Hn \cup O) \cap G_i$ 为闭集, $i = 1, 2, \dots$. 若谓不然, 则有点列 $\{p_n\} \subset (Hn \cup O) \cap G_i$, 其极限点 p_0 为双曲点, 即有 t'_p 和 t''_p 使 $f(p_0, t'_p \leq t \leq t''_p) \subset H$, $f(p_0, t)$ 在 t'_p 和 t''_p 离开 H . 由动力系统的性质 II' 对任一 $\epsilon > 0$, (足够小) 可求 $\delta > 0$ 使当 $q \in S(p_0, \delta)$ 时, $\rho(f(q, t), f(p_0, t)) < \epsilon$, $t'_p \leq t \leq t''_p$. 因此 $f(q, t)$ 也必定离开 H , 即 $S(p_0, \delta) \subset Hr$. 这与 p_0 为抛物点列的极限点矛盾. 因此 $(Hn \cup O) \cap G_i$ 为闭集. 故 Hr 为 $G\delta$ 型集合 [10].

§5 轨线的全局性态

以上四节, 我们研究了轨线在域 H 的性态, 即局部性态. 在这一节我们来研究轨线在全空间 R 的性态, 即全局性态.

定理 11. 设全度量空间 R 只有一个奇点 O . 如果泛函 $V(p)$ 在 R 满足:

- 1) $V(O) = 0$, $V(p) > 0$, 对于 $p \in R \setminus O$,
- 2) 对任一数 $r > 0$, 点集 $V_r = \{p: V(p) \leq r, p \in R\}$ 为紧集,
- 3) $dV(p)/dt > 0 (< 0)$, 对于 $p \in R \setminus O$,

则在 $R \setminus O$ 的轨线可以拓扑映象到希尔伯特空间的平行直线族.

证. 为确定起见设 $dV(p)/dt > 0$. 取定 $r > 0$, 因 $V_r = \{p: V(p) \leq r, p \in R\}$ 为紧集, 故它的边界 Γ_r 为紧闭集.

今往证对任一 $p \in R \setminus O$, 有唯一的 t_p 使 $f(p, t_p) \in \Gamma_r$ 即 Γ_r 为截痕. 若 $p \in V_r$ 则因 $dV/dt > 0$, 故 $V(f(p, t))$ 随 t 增大单调上升. 因此, 由引理 1 [注], 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(p, t)$ 离开 V_r . 故有 t_p 使 $f(p, t_p) \in \Gamma_r$, 并且 t_p 是唯一的. 因为如果还有 $t'_p \neq t_p$, 不妨设 $t'_p > t_p$, 使 $f(p, t'_p) \in \Gamma_r$, 则由洛尔定理有 t_0 , $t_p < t_0 < t'_p$, 使 $dV(f(p, t_0))/dt = 0$, 这与 $dV/dt > 0$ 矛盾.

若 $p \in R \setminus V_r$, 则因 $V(f(p, t))$ 随 t 减少单调下降, 如果对一切 $t \in I^-$,

$V(f(p, t)) > r$, 則有極限 $\lim_{t \rightarrow -\infty} V(f(p, t)) = r' \geq r$. 令 $r'' = V(p)$, 則 $f(p, I^-) \subset \overline{R \setminus V\Gamma' \cap V\Gamma''}$. 因 $R \setminus V\Gamma' \cap V\Gamma''$ 為緊閉集, 故 $f(p, t)$ 的 α -極限點集 A_p 不空 [1]. 因此有數列 $\{t_n\}$, $t_n < 0$, $t_n \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow \infty$, 使 $f(p, t_n) \rightarrow q$. 顯然, q 不是奇點. 又因 A_p 為閉不變集, 故 $f(q, I) \subset A_p$. 由 V 的連續性得, $V(f(q, t)) = r'$, 對一切 $t \in I$. 這與 V 的單調性矛盾. 因此, 有 t_p , 使 $(p, t_p) \in \Gamma_r$ 並且 t_p 是唯一的.

以下我們來定義空間 $R \setminus O$ 到希爾伯特空間 E^∞ 的映象 W .

因 Γ_r 為緊閉集, 故存在 Γ_r 到希爾伯特空間 $E_1^\infty(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ 內的拓撲映象 W_1 [11].

$$W_1(p^*) = (q^* = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots), \quad p^* \in \Gamma_r.$$

現定義 W 如下:

$$W(p) = (t_p, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = q \in E^\infty(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots), \quad p \in R \setminus O, \\ f(p, t_p) \in \Gamma_r,$$

$$W(R \setminus O) = R^* \subset E^\infty.$$

于是在映象 W 之下, 任一軌綫 $f(p, t)$, $p \in R \setminus O$, 變為直綫 $\xi_1 = C_1, \xi_2 = C_2, \dots, \xi_n = C_n, \dots$, C_n 為常數, 根據 Γ_r 的性質, 對應每一點 $p \in R \setminus O$, 有唯一一點 $q \in E^\infty$, 反之, 任兩點 $q_1, q_2 \in R^*$, 若其坐標 ξ_n 不相合, 則對應的點 $p_1, p_2 \in R \setminus O$ 在不同軌道上, 若各坐標 ξ_n 相合, 但 t_{p_1}, t_{p_2} 不相同, 則對應同一軌道的不同點. 因此, $R \setminus O$ 與 R^* 是雙方單值對應.

今往証 W 雙方連續.

1. 証 W 為連續.

設 $p \in R \setminus O$, $\{p_n\} \subset R \setminus O$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, $p^* = f(p, t_p) \in \Gamma_r$. 任給 $\varepsilon > 0$, 作 p^* 的球

鄰域 $S(p^*, \varepsilon)$, 在 $S(p^*, \varepsilon)$ 內選取兩點, $p' = f(p^*, t')$, $p'' = f(p^*, t'')$, $t' < t''$, 使 $V(p') < r$, $V(p'') > r$, 由 V 的連續性, 求 $\eta_1, \eta_2 > 0$, 使當 $q \in S(p', \eta_1) \subset S(p^*, \varepsilon)$ 時, $V(q) < r$, 當 $q \in S(p'', \eta_2) \subset S(p^*, \varepsilon)$ 時, $V(q) > r$. 由動力系統的性質 I', 還可要求 η_1 選得這樣小, 使 $f(S(p', \eta_1), t'' - t') \subset S(p'', \eta_2)$, $f(S(p', \eta_1), 0 \leq t \leq t'' - t') \subset S(p^*, \varepsilon)$. 最後, 選定 $\delta > 0$, 使 $f(S(p, \delta), t') \subset S(p', \eta_1)$. 再確定 N , 使當 $n \geq N$ 時, $p_n \in S(p, \delta)$, 則 $f(p_n, t') \in S(p', \eta_1)$, $f(p_n, t'') \in S(p'', \eta_2)$. 因此, $V(f(p_n, t')) < r$, $V(f(p_n, t'')) > r$, 故有 $t_n, t' < t_n < t''$ 使 $V(f(p_n, t_n)) = r$, 並且 t_n 是唯一確定的, 因此, p_n 在 Γ_r 上的對應點 $f(p_n, t_n) \in S(p^*, \varepsilon)$, 故 $f(p_n, t_n) \rightarrow p^*$. 我們再往証 $t_n \rightarrow t_p$. 若謂不然, 則有 $\alpha > 0$ 和 $\{t_n\}$ 的一個子序列 $\{t_{n_k}\}$ 使 $|t_{n_k} - t_p| > \alpha$, 對一切 t_{n_k} ; 但 $\{t_{n_k}\}$ 有界, 故有收斂子序列, 不妨設 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = \tau$. 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_{n_k}, t_{n_k}) = f(p, \tau) = p^* \in \Gamma_r$, 故由 $f(p, \tau) = f(p, t_p)$, 得 $\tau = t_p$. 這和 $|t_{n_k} - t_p| > \alpha$ 矛盾.

盾。这就证明 $t_n \rightarrow t_p$.

命 $W(p) = (t_p, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, $W(p_n) = (t_n, \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}, \dots)$,

由 W 的連續性得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(W(p_n), W(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(t_n - t_p)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i)^2} = 0. \rho_1 \text{ 表示希}$$

尔伯特空間 E^∞ 的距离。

2. 証 W^{-1} 为連續。

設 $\{q_n\} \subset R^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(t_n - t_p)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i^{(n)} - \xi_i)^2} = 0. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_p, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i,$$

对一切 $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

命 $W^{-1}(q_n) = p_n \in R \setminus O$, $W^{-1}(q) = p \in R \setminus O$.

由映象 W_1 的双方連續性得: $f(p_n, t_n) \rightarrow f(p, t_p)$. 由动力系统的性质 I 得:

$f(f(p_n, t_n) - t_n) \rightarrow f(f(p, t_p) - t_p)$, 即 $p_n \rightarrow p$. 故 $W^{-1}(q_n) \rightarrow W^{-1}(q)$. 証毕。

定理11的推广. 設全度量空間 R 只有一个奇点 O . 如果泛函 $V(p)$ 在 R 满足:

1) $V(O) = 0; V(p) > 0$, 对于 $p \in R \setminus O$;

2) 对任一数 $r > 0$, 点集 $V_r = \{p : V(p) \leq r, p \in R\}$ 为紧集,

3) 在零导集 $\dot{V} \setminus O$ 满足: $d^k V / dt^k = 0$, 对一切 $k < 2n+1$; $d^{2n+1} V / dt^{2n+1} > 0 (< 0)$ k, n 为正整数, 則在 $R \setminus O$ 的軌綫可以拓扑映象到希尔伯特空間的平行直綫族。

証略. 按定理的条件, 由定理 4 已証对任一 $p \in R \setminus O$, 随 t 增大, $V(f(p, t))$ 单调上升 (下降). 在定理 11 的証明过程中也只是用到这一性质. 因此, 依定理 11 同法可証。

最后, 感謝导师胡金昌教授的指导。

参 考 文 献

- [1] Немыцкий В.В., Степанов В.В., Качественная теория дифференциальных Уравнений, Изд 2-е Гостехиздат, 1949.
- [2] Немыцкий В.В., Некоторые методы исследования в целом характеристик уравнения $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$, ВМУ, № 5 1961.
- [3] Немыцкий В.В., О проблеме качественного исследования в целом методами функции Ляпунова, ВМУ, № 6 1962.
- [4] Папун П.Н., Изучение расположения интегральных кривых, заполняющих область.

содержащую одну особую точку, Мат сб, 38(80) № 3 1956.

[5] Зубов В.И., Методы А.М.Ляпунова и их применение, Изд ЛУ, 1957.

[6] Эфендчиев А.Р., Об области влияния особой точки высшего порядка, ВМУ, № 1 1963.

[7] Кудавев М.Б., Функция Ляпунова для области влияния одной особой точки высшего порядка, ВМУ, № 1 1963.

[8] Барбашин Е.А., Метод сечений в теории динамических систем, Мат сб 29 № 2 1951.

[9] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, Москва.1961.

[10] Александров П.С., Колмогоров А.Н., Введение в общую теорию множеств и функций, 1948.

[11] Урысон П.С., Труды по топологии и другим областям математики I стр 147, Гостехтеоретиздат, 1951.