

关于临界情形某一类微分方程組 的稳定性II

胡金昌 許淞庆

討論具有特征根为 m 重零根的方程組:

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} t^\alpha R & t^\beta R_1 \\ t^\alpha R_2 & t^\beta (P+Q) \end{pmatrix},$$

这里各矩陣: $X_1 = (x_{ij})_m^n$, $X_2 = (x_{ij})_{n-m}^n$, $R = (r_{ij})_m^m \neq 0$,

$$P+Q = (p_{ij} + q_{ij})_{n-m}^{n-m}, \quad R_1 = (r_{ij})_m^{n-m}, \quad R_2 = (r_{ij})_{n-m}^m$$

各 r_{ij} , q_{ij} 当 $t \geq T > 0$ 时为 t 的連續函数; 又当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 各 $q_{ij} \rightarrow 0$, 各 r_{ij} 有界 (不預設有漸近展式)。又設

$$(2) \quad \det(P - \lambda E) = 0$$

所有的根的实部皆为負数, 本文繼續工作^[1]仍論

$$(3) \quad -1 \leq \alpha < -\frac{1}{2+h} \leq \beta \quad (h \geq 0)$$

的情形。更設如下各条件

$$(4) \quad R_1 = t^{(h+1)\alpha} \hat{R}_1, \quad \hat{R} \text{ 为 } m \times n-m \text{ 有界陣}$$

$$(5) \quad \beta + 1 + (h+1)\alpha > 0$$

关于 R 的限制, 則設 $t^\alpha R$ 为 L -对角陣类型 (见^[2]) 即

$$(6) \quad R = W + t^{(h+1)\alpha} C$$

其間 C 为有界陣, 其各 $c_{ij} \equiv 0$; $W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 。更設

$$(7) \quad |w_i - w_j| = O(t^{(h+1)\alpha}), \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

本工作將証明如下定理2. 在乘积空間, 方程組为解析情形, Е.И.Дыхман曾写出 « 簡約化 » 定理。^{[3]стр.139}。本文定理2 可視為非解析情形中一条簡約化定理。

定理2. 在条件 (2), (3), (4), (5), (6), (7) 之下, 組 (1) 的解与 m 阶簡約組

$$(8) \quad \frac{dH}{dt} = t^\alpha RH$$

的对应解的稳定 (漸近稳定) 性相同。

証。由工作^[1]已知当 $m \neq \frac{1}{2}n$ 时, 可作补充方程, 故不失于普遍性, 可設 $m = \frac{1}{2}n$ 。

設組 (8) 已知有特解 $H(t)$, $[H(T) = E]$, 作变换

$$(9) \quad X_1 = \bar{X}_1 H(t), \quad X_2 = t^{-(h+1)\alpha} \bar{X}_2 H(t)$$

則方程(1)便化为

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{X}_1}{dt} &= t^\alpha (R\bar{X}_1 - \bar{X}_1 R) + t^\beta \hat{R}_1 \bar{X}_2 \\ \frac{d\bar{X}_2}{dt} &= t^{(h+2)\alpha} R_2 \bar{X}_1 - t^\alpha \bar{X}_2 R + \left[t^\beta (P+Q) + \frac{h+1}{t} \alpha E \right] \bar{X}_2 \end{aligned}$$

再用变换

$$\bar{X}_1 = Y_1, \quad \bar{X}_2 = SY_2$$

这里 \$S\$ 使 \$P\$ 化为若唐式

$$(11) \quad S^{-1}PS = K_0 + \zeta J, \quad K_0 = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \theta 0 & & \\ & & \theta 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = 1 \text{ 或 } 0$$

則方程組(10)化为

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= t^\alpha (RY_1 - Y_1 R) + t^\beta \tilde{R}_1 Y_2 \\ \frac{dY_2}{dt} &= t^{(h+2)\alpha} \tilde{R}_2 Y_1 - t^\alpha Y_2 R + t^\beta [(\beta+1)K + \tilde{Q}] Y_2 \end{aligned}$$

这里 \$\tilde{R}_1 = \hat{R}_1 S\$, \$\tilde{R}_2 = S^{-1}R_2\$, \$K = (\beta+1)^{-1}K_0\$

$$\tilde{Q} = \zeta J + S^{-1}QS + (h+1)\alpha t^{-\beta-1}E.$$

茲引入矩陣 \$A\$ 的范数定义为

$$|A| = \sup_{i,j} \left\{ |a_{ij}| \right\}$$

其間 \$|a_{ij}|\$ 表 \$a_{ij}\$ 的模, 則由 Bacob^[4] 当 \$t \geq t_0 > T > 0\$, 在正数 \$\nu\$ 存在, 使

$$\left| \int_{t_0}^t \exp [K(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})] \tau^{(h+2)\alpha} d\tau \right| \leq \nu t^{(h+2)\alpha - \beta}$$

更可取这样的 \$\nu\$ 使

$$|(h+2)\alpha + 1|^{-1} < \nu.$$

給出任意小的 \$\epsilon\$, 即 \$0 < \epsilon < \frac{1}{3\nu m}\$, 則在代換(11)中选取 \$S\$ 使 \$\zeta < \frac{\epsilon}{3}\$. 不失普遍

性, 可設当 \$t \geq T\$ 时

$$|\tilde{R}_1| < \epsilon$$

这是可以做到的, 因为稍稍改变 \$Y_1 \rightarrow \xi Y_1^0\$, 取 \$\xi\$ 相当大, 便会得上式(见^[4]). 然后取 \$t_0\$ 足够大, 使当 \$t \geq t_0\$ 先行滿足如下关系:

$$t^{\beta+1+(h+1)\alpha} > |W|, \quad t^{(h+2)\alpha+1}|C| < \epsilon, \quad t^{(h+2)\alpha+1}|\tilde{R}_2| < \epsilon$$

$$|(h+1)\alpha t^{-\beta-1}| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |S^{-1}QS| < \frac{\epsilon}{3}$$

如是随着得 \$|\tilde{Q}| < \epsilon\$.

于是用叠代法进行求組(12)的解, 取 \$Y_1 = E\$, \$Y_2 = 0\$ 当 \$t = +\infty\$ 則得递推公式:

$$Y_1^{(k+1)} = E + \int_{-\infty}^t [\tau^\alpha (RY_1^{(k)} - Y_1^{(k)}R) + \tau^\beta \tilde{R}_1 Y_2^{(k)}] d\tau$$

$$Y_2^{(k+1)} = \int_{t_0}^t [\exp K(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})] [\tau^{(h+2)\alpha} \bar{R}_2 Y_1^{(k)} - \tau^\alpha Y_2^{(k)} R + \tau^\beta \bar{Q} Y_2^{(k)}] d\tau$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

由此得形式解:

$$(13) \quad Y_1 = Y_1^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (Y_1^{(k+1)} - Y_1^{(k)}), \quad Y_2 = Y_2^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (Y_2^{(k+1)} - Y_2^{(k)})$$

茲进行估值(13)。首先, 由有界性假设, 有 $\mu > 0$, 使当 $t \geq t_0$ 时有

$$|R| < \mu, \quad |\bar{R}_2| < \mu.$$

取 $Y_1^{(0)} = E$, $Y_2^{(0)} = 0$, 计算得 $Y_1^{(1)} = E$, $|Y_1^{(1)}| = 1$,

$$|Y_2^{(1)}| = \left| \int_{t_0}^t [\exp K(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1})] \tau^{(h+2)\alpha} \bar{R}_2 d\tau \right| < \mu \nu t^{(h+2)\alpha - \beta}$$

根据此, 我们可以建立假定

$$|Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}| < \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^{k-1} t^{(h+2)\alpha+1}$$

$$|Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}| < \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^{k-1} t^{(h+2)\alpha - \beta}$$

然后作如下归纳法证明此假定成立。首先计及

$$(W Y_1^{(k)} - Y_1^{(k)} W) - (W Y_1^{(k-1)} - Y_1^{(k-1)} W) = ((w_i - w_j)(y_{ij}^{(k)} - y_{ij}^{(k-1)}))_m$$

取 t_0 足够大再行满足如下关系: 当 $t \geq t_0$ 时有

$$\sup_{i,j} |w_i - w_j| < m\varepsilon, \quad t^{(h+2)\alpha+1} |C| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从此并应用公式

$$|AB| \leq m |A| |B|, \quad (m \text{ 为 } A \text{ 的列数})$$

分别估值:

$$\begin{aligned} |Y_1^{(k+1)} - Y_1^{(k)}| &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{m\varepsilon}{t} (Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}) d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t \tau^{(h+2)\alpha} C (Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}) d\tau \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \tau^{(h+2)\alpha} (Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}) C d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t \tau^\beta \bar{R}_1 (Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}) d\tau \right| < \\ &< 3m\varepsilon \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^{k-1} \left| \int_{t_0}^t \tau^{(h+2)\alpha} d\tau \right| < \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^k t^{(h+2)\alpha+1} \end{aligned}$$

$$|Y_2^{(k+1)} - Y_2^{(k)}| <$$

$$\leq \int_{t_0}^t \exp K(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}) (\tau^{(h+2)\alpha} |\bar{R}_2| |Y_1^{(k)} - Y_1^{(k-1)}| + \tau^\alpha |Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}| |R| + \tau^\beta |\bar{Q}| |Y_2^{(k)} - Y_2^{(k-1)}|) m d\tau$$

$$< m\varepsilon \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^{(k-1)} \int_{t_0}^t \exp K(t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}) \tau^{(h+2)\alpha} (1 + \tau^{-\beta-1-(h+1)\alpha} |W| + 1) d\tau$$

$$< \mu \nu (3\varepsilon \nu m)^k t^{(h+2)\alpha - \beta}$$

故(13)有收敛的优级数 $\Sigma(3uv_m)^k$, 因而在 $t \geq t_0$ 绝对一致收敛, 从此(12)的解取得如下构造

$$(14) \quad Y_1 = E + t^{(h+2)(\alpha+1)} U_1, \quad Y_2 = t^{(h+2)(\alpha-\beta)} U_2$$

这里 U_1, U_2 当 $t \geq t_0$ 有界, 由此得(1)的解为

$$(15) \quad X_1 = (E + t^{(h+2)(\alpha+1)} U_1) H, \quad X_2 = t^{(\alpha-\beta)} S U_2 H$$

故(1)的解 $X=0$ 与(8)的解 $H=0$ 的稳定〔渐近稳定〕性相同, 更因(1)与(8)皆为线性, 故它们的任何对应解也有这样共同性质。 証毕。

此外(15)式不独是定性地证明「简约化」组的解的稳定性定理, 而且定量地写出(1)的解的渐近展式, 在其中 U_1, U_2 为在 $t = \infty$ 的邻域 $\{t \geq t_0\}$ 的绝对收敛级数。更因(10)式当 $t > T$ 有连续有界解。〔此可将方阵 $X = (x_{ij})$ 作为 n^2 维向量, 如: $\{x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{nn}\}$, 进行考虑含 n^2 个未知元的方程组, 由普通的解的存在定理证明之〕。因此, 由连续性, 我们可把(14)式, 因而(15)式开拓达到 $t > T$ 。

至于寻求(8)式的解 $H(t)$, 则是另一问题: 1° 如果附加条件: “ $\operatorname{Re}(w_i - w_j)$ 在 $t = \infty$ 的某邻域不变号”, 则由〔3〕ГЛ. I 保证(8)式的解 $H(t)$ 的存在, 且从此只需考虑 $\int_{t_0}^t t^{\alpha} W dt$, 便已足够决定稳定性〔3〕ГЛ. V)。2° 在最坏情形, 如果只能求得(发散的)渐近级数 H 趋于此解, 如是, 虽然(9)不容许进行微分, 但在(10)式实质上不见 H ; 既经证明定理 2, 已知(1)式有解, 故沿用 Poincaré〔5〕p. 328 et seq.) 论断, 从形式运算所得的结果渐近级数(15), 趋于(1)式的解。3° 最后, $H(t)$ 也有可能以「闭型」表达例如:

$$R = \begin{pmatrix} t^{-\alpha p_1} + \alpha t^{(h+1)\alpha p_2} & b t^{(h+1)\alpha p_2} \\ t^{(h+1)\alpha p_2} & t^{-\alpha p_1} \end{pmatrix}$$

其间 p_1, p_2 为 t 的有界函数, a, b 为任意常数, 则由〔6〕стр. 34得

$$t^{\alpha} R \cdot \int_T^t t^{\alpha} R dt = \int_T^t t^{\alpha} R dt \cdot t^{\alpha} R$$

因此得
$$H(t) = \exp \left(\int_T^t t^{\alpha} R dt \right).$$

故只要考虑 $\exp \int_T^t t^{\alpha} R dt$, 便能决定原方程(1)的稳定性态。

引 用 文 献

1. 胡金昌 许淞庆. 关于临界情形某一类微分方程的稳定性 I 中山大学自然科学学报 2. 1960

2. И. М. Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. АН УССР 1954

3. С. Лефшец. Геометрическая теории дифференциальных уравнений. И.Л. 1961
4. В.П. Басов. Построение решения одного класса систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ. 18 в. 3 1954
5. H. Poincaré. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Oeuvres 1
6. Н.П. Еругян. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. ЛГУ 1956