

一类具无界系数的微分方程组的 渐近稳定问题



許淞庆 王高雄

(数学力学系)

非駐定綫性微分方程組的穩定性問題的討論, 过去往往只限于有界系数的范围。如 И.Г.Малкин^{[1][2]}, R.Bellman^[3], Б.С.Разумихин^[4] 及 А.А.Лебедев^[5] 等人的工作。А.В.Костин 在其工作^[6] 中虽曾給出具有无界系数的綫性微分方程組零解为稳定的一个判別法則, 但实际运算上极为复杂, 对于高阶方程的处理更难以实行, 且无法判定渐近稳定性。本文拟用 V 函数的方法討論一类具有无界系数的綫性方程組的穩定性問題, 包括渐近稳定性的决定。并从而推广到非綫性方程組的穩定性問題上去。

§ 1 綫性方程組的穩定性

考虑綫性微分方程組

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + p_{s2}(t)x_2 + \cdots + p_{sn}(t)x_n, \quad (s=1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

其中 $P_{sj}(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上为 t 的連續实函数, 但不一定均为有界的。假設¹⁾ $P_{sj}(t) (s > j)$ 当 t 足够大时是无穷小量, 而 $P_{sj}(t) (s < j)$ 可以是无界函数。又 $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ss}(t) = a_s < 0$, a_s 为常数 ($s=1, 2, \cdots, n$)。

为了今后的需要, 我們先建立几个引理:

引理 1 对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的定号型 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$, 若加上一个与其同次的但系数当 t 足够大时可以任意小的型 $U(t; x_1, \cdots, x_n)$, 則其定号性保持不变。

証 假設 $V(t; x_1, \cdots, x_n)$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的定正 m 次型²⁾。因而, 有 T 及不依赖于 t 的定正 m 次型 $W(x_1, \cdots, x_n)$ 存在, 使当 $t \geq T$ 时

$$V(t; x_1, \cdots, x_n) - W(x_1, \cdots, x_n) \geq 0$$

对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均成立³⁾。

1) 对于 $P_{sj}(t) (s \neq j)$ 的这个假設也可互相对調。参见 § 3 附記。

令 $x_s = \rho \alpha_s$, ($s=1, 2, \dots, n$), $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, 其中 $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ 則當 $t \geq T$ 時有

$$\rho^m V(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \rho^m U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \rho^m W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \rho^m U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

因而

$$V(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \frac{1}{2} W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \frac{1}{2} W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

注意到 U 的係數當 t 足夠大時為任意小, 因此, 對於給定的任何小的正常數 A , 必存在 $T^* \geq T$ 使當 $t \geq T^*$ 時有

$$|U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq A \{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|\}^m \leq A n^m$$

$$\text{表 } \lambda = \inf_{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1} W(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

則由於 W 是定正型, 必有 $\lambda > 0$ 。於是 $W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \lambda > 0$

現取 $A = \frac{\lambda}{2n^m}$ 則總可以取 T^* 足夠大, 使當 $t \geq T^*$ 時有

$$|U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq \frac{\lambda}{2}$$

於是 $V(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \frac{1}{2} W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 0$

$$\text{即 } \frac{1}{\rho^m} V(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \frac{1}{\rho^m} U(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \frac{1}{2\rho^m} W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 0$$

$$\text{或 } V(t; x_1, \dots, x_n) + U(t; x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{2} W(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

這表示 $V(t; x_1, \dots, x_n) + U(t; x_1, \dots, x_n)$ 為定正的。

引理 2 如果 $V(t; x_1, \dots, x_n)$ 是 $x_1, \dots, x_n$ 的定號 m 次型, 而 $V^*(t; x_1, \dots, x_n)$ 為 $x_1, \dots, x_n$ 的不低於 $m+1$ 次的項之和, 且係數為 t 的連續函數, 當 t 足夠大時為有界。那麼, V 和 $V + V^*$ 有相同的定號性。

証 注意到 V^* 可視為 $x_1, \dots, x_n$ 的某個 m 次型, 其係數為 t 的連續函數與 $x_k^{\lambda_k}$ ($\lambda_k \geq 1$; $k \in \{1, \dots, n\}$) 的乘積之和。因而, 當 $|x_s| \leq H$ ($s=1, \dots, n$) $H > 0$ 足夠小及 t 足夠大時, 這個 m 次型的係數足夠地小, 應用引理 1 即得所需證明。

附注 如果 $V^*(t; x_1, \dots, x_n)$ 為 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的正則函數, 其按 $x_1, \dots, x_n$ 之冪的展式中不含低於 $m+1$ 次的項, 且係數為 t 的有界函數; 或者更一般地, 如果 $V^*(t; 0, \dots, 0) = 0$ 且當 $t \geq T \geq t_0$ 及 $|x_s| \leq h \leq H$ ($s=1, \dots, n$) 時有

$$|V^*(t; x_1, \dots, x_n)| \leq A \{|x_1| + \dots + |x_n|\}^{m+\delta}$$

其中 $A > 0$, $\delta > 0$ 為常數。則引理 2 顯然仍成立。

2) 定負性可同樣證明。

3) 設 $W(x_1, \dots, x_n)$ 為 m 次型, 則 $W(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m W(x_1, \dots, x_n)$ $\lambda > 1$, 故知, 若 W 當 $|x_s| \leq H$ ($s=1, \dots, n$; $H > 0$ 為某常數) 時為定正, 則在整個 n 維空間內也為定正。對於定正的 m 次型

$V(t; x_1, \dots, x_n)$ 也有同樣的結論。

事实上, 对于给定的任意小正数 ε , 只须取 h 足够小, 使 $h \leq \frac{1}{n} \varepsilon^{1/s}$, 于是当 $|x_s| \leq h$ ($s=1, \dots, n$) 时

$$|V^*(t; x_1, \dots, x_n)| \leq A \{|x_1| + \dots + |x_n|\}^{m+\delta} \leq A(nh)^\delta \{|x_1| + \dots + |x_n|\}^m$$

即 $|V^*(t; x_1, \dots, x_n)| \leq A \varepsilon \{|x_1| + \dots + |x_n|\}^m$.

系数 $A \varepsilon$ 可以任意小, 因此, 象引理 1 证明过程一样, 可证 $V + V^*$ 仍为定号, 且跟 V 有相同的符号。此即所需证者。

引理 3 如果方程组

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (1')$$

的系数 $p_{sj}(t)$, 当 $t \geq t_0$ 时为 t 的连续函数, 且满足下列条件:

1° $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ss}(t) = a_s < 0$ a_s 为常数, ($s=1, 2, \dots, n$)

2° $s > j$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{sj}(t) = 0$

3° $s < j$ 时, $p_{sj}(t)$ 于 $[T, +\infty)$ 上一致有界, $T \geq t_0$, 那么, 必存在满足 Ляпунов 关于渐近稳定基本定理的 V 函数, 因而零解为渐近稳定。

证 引入变换

$$y_s = \varepsilon^{-s} x_s \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为常数。这时方程 (1') 化成

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} = & \varepsilon^{1-s} p_{s1}(t)y_1 + \dots + \varepsilon^{-1} p_{s, s-1}(t)y_{s-1} + p_{ss}(t)y_s + \\ & + \varepsilon p_{s, s+1}(t)y_{s+1} + \dots + \varepsilon^{n-s} p_{sn}(t)y_n \quad (s=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2)$$

考虑辅助方程

$$\frac{dy_s}{dt} = a_s y_s \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

显见它的特征方程的根均为负数, 因此, 有不依赖于 t 的定正二次型 $V(y_1, \dots, y_n)$ 存在, 它通过 (3) 对 t 的全导数等于某一定负二次型 $W(y_1, \dots, y_n)$ 。

现求这样确定的型 V 通过 (2) 对 t 的全导数, 我们有

$$\frac{dV}{dt} = W + U_1 + U_2$$

其中 $U_1 \equiv \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=s+1}^n \varepsilon^{j-s} p_{sj}(t) y_j \frac{\partial V}{\partial y_s}$

$$U_2 \equiv \sum_{s=1}^n (p_{ss}(t) - a_s) y_s \frac{\partial V}{\partial y_s} + \sum_{s=2}^n \sum_{j=1}^{s-1} \varepsilon^{j-s} p_{sj}(t) y_j \frac{\partial V}{\partial y_s}$$

注意到本引理的假设条件 3°, 易知当 $t \geq T$ 时, 若取定 ε 足够小, 则二次型 U_1 的系数可达到充分小。又据条件 1° 及 2°, 易知当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $p_{ss}(t) - a_s \rightarrow 0$ 及 $p_{sj}(t) \rightarrow 0$ ($j=1, 2,$

$\dots, s-1)$, 因此, 当 ε 取定之后, 只须取 $T_1 \geq T$ 足够大, 则当 $t \geq T_1$ 时, 二次型 U_2 的系数也可达到充分小. 故由引理 1 推知, $W + U_1 + U_2$ 仍为定负二次型. 又因 V 不依赖于 t , 显然具有无限小上界. 因此, 根据 Ляпунов^[7] 关于渐近稳定的基本定理, 零解 $y_s = 0 (s=1, 2, \dots, n)$ 为渐近稳定.

又易见, 二次型的定号性经变换 $y_s = \varepsilon^{-s} x_s (s=1, \dots, n)$ 后保持不变, 从而这变换不影响满足 Ляпунов 关于渐近稳定定理的 V 函数的存在性, 即组 (1') 也存在具上述性质的 V 函数. 因此, 零解 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 亦为渐近稳定.

附注 1 如果仅需证明组 (1') 的零解为稳定的, 则只须应用 Н.И. Гаврилов 定理^{[8][9]} 就够了.

事实上, 引理 3 中的条件 1° 可改书为

$p_{ss}(t) = a_s + \omega_s(t)$ 其中 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_s(t) = 0 (s=1, \dots, n)$ 而这时 Н.И. Гаврилов 定理就完全被满足了.

附注 2 引理 3 也容易直接应用 И.Г. Малкин 定理^{[1][8]} 证得.

事实上, 考虑辅助方程

$$\frac{dx_s}{dt} = a_s x_s + p_{ss+1}(t)x_{s+1} + \dots + p_{sn}(t)x_n \quad (s=1, \dots, n) \quad (4)$$

易见 Perron 条件满足, 在此, $p_{ss}(t) = a_s < 0$

而 $G_s(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t p_{ss}(\xi) d\xi = e^{a_s(t-\tau)} \leq 1 (t \geq \tau)$

$$H_s(t, \tau) = G_s(t, \tau) \int_{\tau}^t G_s^{-1}(\xi, \tau) d\xi = -\frac{1}{a_s} (1 - G_s(t, \tau)) \quad (s=1, \dots, n)$$

即 $G_s(t, \tau)$ 及 $H_s(t, \tau) (s=1, \dots, n)$ 当 $t \geq \tau$ 时均有界, 于是按 И.Г. Малкин 定理^{[1][8]}, 组 (4) 具有变数 $x_1, \dots, x_n$ 的二次型 V 满足 Ляпунов 关于渐近稳定定理的一切条件, 即 V 为定正, 有无限小上界, 且它通过组 (4) 对 t 的全导数为定负二次型 $W(t; x_1, \dots, x_n)$.

不难证明, 这样确定的二次型 V 对于组 (1') 满足所要求. 事实上, 通过方程 (1') 求 V 对 t 的全导数得:

$$\frac{dV}{dt} = W(t; x_1, \dots, x_n) + U(t; x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{其中 } U \equiv \sum_{s=1}^n (p_{ss}(t) - a_s) x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} + \sum_{s=2}^n \sum_{j=1}^{s-1} p_{sj} x_j \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

计及条件 1° 和 2°, 易见, 当 $T_1 \geq T$ 足够大, 而 $t \geq T_1$ 时, U 的系数可以任意小. 故依引理 1 $W + U$ 为定负, 此即所需证者.

附注 3 如果更设 $a_j \neq a_k$ 当 $j \neq k$, 则不须引入变换 $y_s = \varepsilon^{-s} x_s$ 而直接应用 И.Г. Малкин^[2] 的方法也可证明组 (1') 存在满足 Ляпунов 关于渐近稳定定理的 V 函数.

事实上, 同样考虑辅助方程 (4), 但其中 $a_j \neq a_k (j \neq k)$, 注意到 $p_{sj}(t) (j=s+1, \dots, n)$ 的一致有界性, 不难证明, 如果表方程 (4) 的标准基解组为 $x_{ij}(t, t_0)$,

($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则当 $t \geq t_0 > 0$ 时, 一致地有

$$|x_{ij}(t, t_0)| < M e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $\alpha = \min \{-a_1, -a_2, \dots, -a_n\}$ 而 M 为某个不依赖于 t 及 t_0 的正常数。这只要直接积分方程组(4)并顾及条件3°, 利用数学归纳法即容易验证。于是按 И. Г. Малкин 关于 Ляпунов 函数存在定理[2], 对于任给的定正二次型 $W(t; x_1, \dots, x_n)$, 其系数为 t 的有界函数者, 必可用积分具体表出具有无限小上界的定正二次型 $V(t; x_1, \dots, x_n)$, 且它通过方程(4)对 t 的全导数等于 $-W(t; x_1, \dots, x_n)$ 。

同附注2中的证明一样, 可证这样的 V 函数对于组(1')满足所要求。

定理1 假设方程组(1)中系数 $p_{sj}(t)$ 满足开头的假定, 即 $p_{sj}(t)$ ($s > j$) 当 t 足够大时为无穷小量, 而 $p_{sj}(t)$ ($s < j$) 可以为无界函数, 又 $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ss}(t) = a_s < 0$, a_s 为常数 ($s = 1, 2, \dots, n$)。那么, 如果能够求得 n 个可微函数 $u_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$) 使下列条件成立:

- 1) 对足够大的 T , 当 $t \geq T$ 时 $|u_s(t)| \geq K_s > 0$ 而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'_s(t)}{u_s(t)} = b_s$, 且 $a_s + b_s < 0$ ($s = 1, \dots, n$)
- 2) $q_{sj}(t) = \frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)}$ 对于 $s < j$, 当 $t \geq T$ 时一致有界; 而对于 $s > j$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时一致趋于零。则组(1)的零解为渐近稳定。

证 引入变换

$$y_s = u_s(t)x_s \quad (s = 1, \dots, n)$$

则方程(1)化成

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} = & q_{s1}(t)y_1 + \dots + q_{ss-1}(t)y_{s-1} + \left(p_{ss}(t) + \frac{u'_s(t)}{u_s(t)}\right)y_s + q_{ss+1}(t)y_{s+1} + \dots + \\ & + q_{sn}(t)y_n \quad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

易见方程(5)的右端的系数满足引理3的一切条件, 因此, 据引理3, 对于方程组(5), 可以求得与 t 无关的定正二次型 $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 它通过(5)对 t 求得的全导数是定负二次型。

这样一来, 对于组(5)存在满足 Ляпунов 关于渐近稳定定理一切条件的 V 函数, 故零解为渐近稳定, 因此方程(5)的所有解 $y_s(t)$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_s(t) = 0$ ($s = 1, \dots, n$)。

注意到当 $t \geq T$ 时, $|u_s(t)| \geq K_s > 0$ 即 $\frac{1}{|u_s(t)|} \leq \frac{1}{K_s}$ ($s = 1, \dots, n$)。因此, 组(1)的

一切解 $x_s(t) = \frac{y_s(t)}{u_s(t)}$ 也为有界, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_s(t) = 0$ ($s = 1, \dots, n$)

这意味着组(1)的零解 $x_s = 0$ ($s = 1, \dots, n$) 是渐近稳定的。

推论 假设方程(1)中系数 $p_{sj}(t)$ 当 $t \geq t_0 > 0$ 时为 t 的连续实函数, 且满足下列条件:

$$1^\circ \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ss}(t) = a_s < 0 \quad (s = 1, \dots, n);$$

2° $p_{sj}(t) \begin{pmatrix} j=2,3,\dots,n \\ s=1,2,\dots,j-1 \end{pmatrix}$ 是 t 的多項式, 且次數最高者為 k_j 次;

3° $p_{sj}(t) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha_s + \eta_j}}\right), \begin{pmatrix} s=2,3,\dots,n \\ j=1,2,\dots,s-1 \end{pmatrix}$ 其中 $\eta_j > 0, \alpha_s = \sum_{i=2}^s k_i$

或 3° $p_{si}(t) = O\left(\frac{1}{t^{\beta_j + \delta_s}}\right), \begin{pmatrix} j=1,2,\dots,n-1 \\ s=j+1,\dots,n \end{pmatrix}$ 其中 $\delta_s > 0, \beta_j = \alpha_n - \alpha_j$;

那麼組 (1) 的零解為漸近穩定。

証 由已證明的定理推知, 只須找出滿足定理 1 要求的函數 $u_s(t)$ 就够了。我們指出, 在此情形下, $u_s(t)$ 恒可取為 t 的多項式。事實上, 例如取 $u_1 = 1$, 而 $u_j(t)$ 為 t 的 $\alpha_j (j \geq 2)$ 次多項式 ($\alpha_1 = 0$), 則易見, 當 T 足夠大而 $t \geq T \geq t_0$ 時 $u_j(t) \neq 0 (j=2, \dots, n)$, 又顯然有 $\alpha_i < \alpha_j$ 當 $i < j$, 因此, 由 2° 知多項式 $u_s(t)p_{sj}(t) (s=1, 2, \dots, j-1)$ 的次數不超過 $\alpha_{i-1} + k_j = \alpha_j$ 即不超過 $u_j(t)$ 的次數, 於是 $\frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)} = O(1) \begin{pmatrix} j=2, \dots, n \\ s=1, \dots, j-1 \end{pmatrix}$ 。另一方面, 由 3° 知 $\frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha_j + \eta_j}}\right), \begin{pmatrix} s=2, \dots, n \\ j=1, \dots, s-1 \end{pmatrix}$, 顯然, 當 $t \rightarrow +\infty$ 時趨於零。若計及 3°, 則有 $\frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha_n - \alpha_s + \delta_s}}\right), \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, n-1 \\ s=j+1, \dots, n \end{pmatrix}$, 由於 $\alpha_n - \alpha_s + \delta_s \geq \delta_s > 0$, 因此當 $t \rightarrow +\infty$ 時 $\frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)}$ 趨於零。最後, 顯然有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'_s(t)}{u_s(t)} = 0$, 當 $t \geq T$ 時 $|u_s(t)| \geq K_s > 0$ K_s 為常數, ($s=1, 2, \dots, n$), 於是定理 1 的條件均滿足, 故零解為漸近穩定。

例 1 考慮方程組

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{t}e^t x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= t^{k+1}e^{-(1+\delta)t}x_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\delta > 0$, k 為任意常數,

容易驗證, 它滿足定理 1 的所有條件, 因此, 我們斷言組 (6) 的零解為漸近穩定。事實上, 若令 $y_1 = tx_1, y_2 = e^t x_2$ 則方程 (6) 化為

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{t}\right)y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= t^k e^{-\delta t} y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (6')$$

容易對組 (6') 的簡略方程

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{2}y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 \end{aligned}$$

直接作出具有无限小上界的定正二次型 $V = 6y_1^2 + 8y_1y_2 + 7y_2^2$ 它通过 (6') 对 t 的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -6(y_1^2 + y_2^2) + 4\left(\frac{3}{t} + 2te^{-\delta t}\right)y_1^2 + 2\left(\frac{4}{t} + 7te^{-\delta t}\right)y_1y_2$$

易见 $\frac{dV}{dt}$ 为定负, 于是组 (6') 的零解为渐近稳定, 从而方程组 (6) 的零解

$x_1 = x_2 = 0$ 为渐近稳定。

例2 考虑方程组^[4]

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + tx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{(t+1)1+\delta}x_1 - x_2\end{aligned}\quad (7)$$

其中 $\delta > 0$ 为任意常数, 可以任意小。

易见方程 (7) 满足定理1推论的条件, 因此可以断定, 零解是渐近稳定的。这也不难直接证明, 事实上, 引入变换

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = tx_2$$

则方程化成

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{t}{(t+1)1+\delta}y_1 + \left(-1 + \frac{1}{t}\right)y_2\end{aligned}\quad (7')$$

取 $V = y_1^2 + y_1y_2 + \frac{3}{2}y_2^2$, 易见它是定正的, 且有无限小上界。现通过方程 (7')

求它对 t 的全导数得

$$\frac{dV}{dt} = -2(y_1^2 + y_2^2) + (y_1 + 3y_2) \left[\frac{t}{(t+1)1+\delta}y_1 + \frac{1}{t}y_2 \right]$$

易见, $\frac{dV}{dt}$ 为定负。于是组 (7') 的零解为渐近稳定。显然, 这结论对于组 (7) 也正确, 即原方程组的零解 $x_1 = x_2 = 0$ 是渐近稳定的。

§2 非线性方程组的稳定性

考虑非线性微分方程组

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n + X_s(t; x_1, \cdots, x_n), (s=1, \cdots, n) \quad (8)$$

其中 $p_{sj}(t)$ 当 $t \geq t_0$ 时为 t 的连续实函数, X_s 当 $t \geq t_0$ 及 $|x_s| \leq \sigma_s (s=1, \cdots, n)$ 时为 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的连续实函数, 且关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 Lipschitz 条件。此外, 当 $t \geq \tau \geq t_0$ 及 $|x_s| \leq h \leq \sigma_s (s=1, \cdots, n)$ 时满足条件:

4) A.B. Костин 在其工作 [6] 中所列的例为这里 $\delta = 1$ 的特殊情形, 而且他只断定零解为稳定。

$$|X_s(t; x_1, \dots, x_n)| \leq |A_s(t)| \{ |x_1| + \dots + |x_n| \}^{1+\delta} \quad (s=1, \dots, n) \quad (9)$$

其中 $A_s(t)$ 为 t 的連續实函数, $\delta > 0$ 为常数。

我們有如下定理:

定理 2 假設方程 (8) 中, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ss}(t) = a_s < 0$ 。如果能求得 n 个可微函数 $u_s(t)$ ($s=1, \dots, n$) 滿足条件:

1° 对足够大的 $T \geq t_0$ 。当 $t \geq T$ 时 $|u_s(t)| \geq K_s \geq M > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'_s(t)}{u_s(t)} = b_s$, 且 $a_s + b_s < 0$ ($s=1, 2, \dots, n$);

2° $q_{sj}(t) = \frac{u_s(t)p_{sj}(t)}{u_j(t)}$ 对于 $s < j$, 当 $t \geq T$ 时一致有界; 而对于 $s > j$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时一致趋于零;

3° 当 $t \geq \max\{T, \tau\}$ 时 $\frac{|u_s(t)A_s(t)|}{|u_j(t)|} \frac{1}{1+\delta} \leq \eta$, 对一切 $j \geq 1$ 成立, 其中 $\eta > 0$ 为常数 ($s=1, 2, \dots, n$) 則組 (8) 的零解 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 为漸近稳定。

証 引入变换

$$y_s = u_s(t)x_s \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

則方程 (8) 化成

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} &= q_{s1}(t)y_1 + \dots + q_{s,n-1}(t)y_{n-1} + \left(p_{ss}(t) + \frac{u'_s(t)}{u_s(t)}\right)y_s + q_{s,n+1}(t)y_{n+1} + \dots \\ &+ q_{sn}(t)y_n + Y_s(t; y_1, \dots, y_n) \quad (s=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $Y_s(t; y_1, \dots, y_n) = X_s\left(t; \frac{y_1}{u_1(t)}, \dots, \frac{y_n}{u_n(t)}\right)u_s(t)$ ($s=1, \dots, n$)

易見, 在定理的假定条件之下, 組 (10) 的对应綫性方程組滿足定理 1 的証明过程中方程 (5) 的全部条件。因此, 据定理 1 的証明中的同样理由, 关于組 (10) 的对应綫性方程組, 存在与 t 无关的, 因而具有无限小上界的定正二次型 $V(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 且它通过对应綫性方程对 t 的全导数是定負二次型 $U(t; y_1, \dots, y_n)$ 。現求这个二次型 V 通过非綫性方程 (10) 对 t 的全导数, 我們有

$$\frac{dV}{dt} = U(t; y_1, \dots, y_n) + W(t; y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{其中 } W(t; y_1, \dots, y_n) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_s} Y_s(t; y_1, \dots, y_n) = \sum_{s=1}^n u_s(t) \frac{\partial V}{\partial y_s} X_s\left(t; \frac{y_1}{u_1(t)}, \dots, \frac{y_n}{u_n(t)}\right)$$

因此, 当 $|y_s| \leq hM$ 即 $\left|\frac{y_s}{u_s(t)}\right| \leq \frac{|y_s|}{M} \leq h$ 时, 按条件 (9) 有

$$|W| \leq \sum_{s=1}^n \left|u_s(t)\right| \left|\frac{\partial V}{\partial y_s}\right| |A_s(t)| \left\{ \left|\frac{y_1}{u_1(t)}\right| + \dots + \left|\frac{y_n}{u_n(t)}\right| \right\}^{1+\delta}$$

注意到二次型 V 与 t 无关, 易知 $\frac{\partial V}{\partial y_s}$ 为 $y_1, \dots, y_n$ 的线性型, 且有

$$\left| \frac{\partial V}{\partial y_s} \right| \leq \mu \{ |y_1| + \dots + |y_n| \}; \mu > 0 \text{ 为常数}$$

$$\text{而 } |W| \leq \sum_{s=1}^n \mu \{ |y_1| + \dots + |y_n| \} \left\{ \frac{|u_s(t)A_s(t)|}{|u_1(t)|} \frac{1}{1+\delta} |y_1| + \dots + \frac{|u_s(t)A_s(t)|}{|u_n(t)|} \frac{1}{1+\delta} |y_n| \right\}^{1+\delta}$$

再计及条件3°, 推知当 $t \geq \max\{T, \tau\}$, $|y_s| \leq hM$ 时有

$$|W| \leq \sum_{s=1}^n \mu \eta_s^{1+\delta} \{ |y_1| + \dots + |y_n| \}^{2+\delta} \leq n\mu\eta^{1+\delta} \{ |y_1| + \dots + |y_n| \}^{2+\delta}$$

其中 $\eta = \max(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

根据引理2的附注, 可见 $\frac{dV}{dt} = U(t; y_1, \dots, y_n) + W(t; y_1, \dots, y_n)$ 为定负, 故按Ляпунов关于渐近稳定的基本定理, 组(10)的零解 $y_s = 0$ ($s=1, \dots, n$) 为渐近稳定。

现在让我们回到方程(8)的稳定问题上来。由于已证组(10)的零解为渐近稳定, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总可找到 $T^* \geq \max\{T, \tau\}$ 及不依赖于 ε 的 $\delta' > 0$, 使当 $|y_s(T^*)| = |y_s^*| \leq \delta'$ 及 $t \geq T^*$ 时有 $|y_s(t)| < M\varepsilon$ 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_s(t) = 0$, ($s=1, \dots, n$)

因此, 当 $|x_s(T^*)| = |x_s^*| \leq \delta^* = \frac{\delta'}{|u_s(T^*)|}$ 时, 有 $|y_s^*| = |u_s(T^*)| |x_s^*| \leq \delta'$

$$\text{从而 } |x_s(t)| = \frac{|y_s(t)|}{|u_s(t)|} < \frac{|y_s(t)|}{M} < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$$\text{且 } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y_s(t)}{u_s(t)} = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

这表示组(8)的零解 $x_s = 0$ ($s=1, \dots, n$) 是渐近稳定的。

例3 考虑方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{3}{2}x_1 + tx_2 + e^t x_1^2 + t^2 x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{(t+1)^2} x_1 - 2x_2 + (t+1)x_1^2 + (\ln t)x_2^2 \end{aligned} \quad (11)$$

此处 $p_{11} = -\frac{3}{2}$, $p_{12} = t$, $p_{21} = \frac{1}{(t+1)^2}$; $X_1 = e^t x_1^2 + t^2 x_2^2$, $X_2 = (t+1)x_1^2 + (\ln t)x_2^2$ 。易见, 当 $t \geq 1$ 时 p_{12} , p_{21} ; X_1, X_2 均为 t 的连续实函数, 且 X_1, X_2 关于 x_1, x_2 满足Lipschitz条件。

現取 $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = te^t$, 則有 $\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} = 1$, $\frac{u_2'(t)}{u_2(t)} = 1 + \frac{1}{t}$; $q_{12}(t) = 1$, $q_{21}(t) = \frac{t}{(t+1)^2}$; 而 $|X_1| < e^t\{|x_1| + |x_2|\}^2$, $|X_2| < (t+1)\{|x_1| + |x_2|\}^2$ 當 $t \geq 1$ 。

即條件(9)成立。在此處 $A_1(t) = e^t$, $A_2(t) = t+1$, $\delta = 1$

易見, 定理2的條件1°及2°全滿足; 又當 $t \geq 2$ 時有

$$\begin{aligned} \frac{|u_1(t)A_1(t)|^{\frac{1}{2}}}{|u_1(t)|} &= 1, & \frac{|u_1(t)A_1(t)|^{\frac{1}{2}}}{|u_2(t)|} &= \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{|u_2(t)A_2(t)|^{\frac{1}{2}}}{|u_1(t)|} &= \sqrt{\frac{t(t+1)}{e^t}} < 1, & \frac{|u_2(t)A_2(t)|^{\frac{1}{2}}}{|u_2(t)|} &= \sqrt{\frac{t+1}{te^t}} < 1, \end{aligned}$$

即條件3°也滿足。因此, 按定理2, 方程組(11)的零解 $x_1 = x_2 = 0$ 為漸近穩定。

§3 附記

最後, 我們指出, 如果對於方程(1)右端的係數矩陣中位於主對角線不同側的元素所作的假設互相對調, 則上述有關命題(引理3, 定理1及定理2)仍然正確。

事實上, 若將方程(1')寫成矩陣形式

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (12)$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

引入變換

$$X = E^*Z \quad (13)$$

其中 E^* 為 n 階方陣 $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

這時方程(12)將化成

$$\frac{dZ}{dt} = B(t)Z \quad (14)$$

其中

$$B(t) = \begin{pmatrix} p_{nn}(t) & p_{n,n-1}(t) & \cdots & p_{n1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n}(t) & p_{2,n-1}(t) & \cdots & p_{21}(t) \\ p_{1n}(t) & p_{1,n-1}(t) & \cdots & p_{11}(t) \end{pmatrix}$$

易見, 矩陣 $A(t)$ 中位於主對角線上的元素仍然位於矩陣 $B(t)$ 的主對角線上, 但位於主對角線右上(左下)側的元素却均位於矩陣 $B(t)$ 的左下(右上)側。因此, 按新的假設, 這時方程(14)滿足有關引理或定理的條件, 故零解 $Z = 0$ 為漸近穩定。又變換(13)顯然不改變方程的穩定性。因此與(12)對應的有關方程的零解 $X = 0$ 也是漸近穩定的。

一九六三、三、十三、

参 考 文 献

- [1] Малкин И. Г., Некоторые вопросы теорий устойчивости движения в смысле Ляпунова, Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, вып. 7, 1937.
- [2] Малкин И. Г., О построении функций Ляпунова для систем линейных уравнений, ПММ. Т. 16, 1952
- [3] Bellman R., Stability theory of differential equations, London (1953)
- [4] Б. С. Разумихин, Об устойчивости неустановившихся движений. Библиогр. 4 пазв ПММ. Т. 20, 1956
- [5] А. А. Лебедев, Об одном методе построения функций Ляпунова, ПММ. Т. 21, 1957
- [6] Костин А. В., К устойчивости по Ляпунову линейных систем дифференциальных уравнений, Труды Одесского Гос. ун-та Год. ХСII т. 146, серия матем. наук, вып. 6, 1956
- [7] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
- [8] 許淞庆編著: 常微分方程稳定性理論, 上海科学技术出版社, 1962.
- [9] Гаврилов Н. И., Об устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений, ДАН, т. 81, вып. 3, 1952.