

# 投影立體繪圖儀的設計和應用

李 見 賢

由平面地形地質圖繪成塊狀立體圖，一般是採用透視投影或平行投影的方法。在1955年及1957年作者對應用這兩種投影方法來繪製塊狀立體圖作了較詳細的論述<sup>〔1〕〔2〕〔3〕</sup>。但是這些方法還有不夠完善之處：如機械的裝置、繪圖時對原圖或投影圖的移動及劃分等高綫間隔刻度等仍感不夠方便，同時對二度（正角投影）画法、等度（正角投影）画法及二度正面（斜角投影）画法的論證及說明亦還不夠充分。本文就是企圖補充這些不足之處，並設計一種投影立體繪圖儀，這種儀器既可繪製平行投影的塊狀立體圖，也可以繪製透視投影的塊狀立體圖，比以前提供的方法更為精確和快捷。茲將這種儀器的構造和應用分述如下：

## 一、投影立體繪圖儀的構造

根據<sup>〔2〕</sup>63—64頁（或<sup>〔1〕</sup>44—45頁）及<sup>〔3〕</sup>313—314頁所討論的原理，可設計一種投影立體繪圖儀，它的構造如照片1—6所示，茲分投影、裝圖及光源三部分說明如下：

1. 投影部分：照片1—6所示，儀器有一方形凹底板，它的凹下部分嵌入一方形活動板。活動板的頂面與凹形底板邊旁凸起部分的頂面齊平。在底板與活動板之間裝一長而粗的螺絲，（平行且等距於底板凸起的邊）圓形的螺絲套固定於底板，粗螺絲穿過套內并裝一大螺絲頭，螺絲頭與螺絲套大小一致並合在一起。在螺絲頭上刻有100等分，在螺絲套上刻有一移動記號，長螺絲聯系着活動板，旋轉螺絲頭使長螺絲旋轉并同時牽動活動板沿凹底板的方形寬槽作前後平面移動，但螺絲頭與螺絲套仍合在一起，并可根據螺絲套上的移動記號及螺絲頭的刻度和裝在凹底板左邊上面的mm尺知道活動板移動的長度，螺絲旋轉一周，活動板可平移1mm，因為螺絲頭上的刻度有100等分，所以活動板移動的準確度可達 $\frac{1}{100}$ mm，超過1mm以上的長度，則可在凹形底板左邊上面的mm尺看出來。這個活動板上的平面，是繪圖時承接投影圖的平面，將留在後面

討論。

## 2. 裝圖部分：

（1）在活動板的後面兩旁各裝一高約2cm的小凹槽（照片4），凹槽中可以插入繪有地形地質圖的玻璃片，插入小凹槽的玻璃片應與活動板成垂直，並與活動板保持有一些間隙。玻璃片與活動板所成的交綫應與活動板的移動方向成垂直。旋轉螺絲時則由活動板帶動玻璃片，可以前後移動。移動的長度可由螺絲頭的刻度及裝在凹形底板旁的mm尺上讀出來，這是透視投影的裝圖方法（照片3—4）。

（2）在凹底板兩旁中部各裝豎一個厚板，在右邊小板上裝一量角器，在量角器的中心有一小孔，同時在左邊的一個厚板上的對應部分也有一个小孔，這兩個小孔所連成的直綫與活動板的移動方向成垂直。小孔中各貫入一個可以轉動的小軸，軸的內側裝有凹槽，凹槽可插入繪有原圖的玻璃片。玻璃片與活動板的交綫應與活動板的移動方向成垂直。右邊轉動小軸的外側裝一緊貼量角器的指針。這樣玻璃片便可以小軸為中心而轉動，而右外側的指針也同時在量角器上指出玻璃傾斜的角度。當投影的需要已取得合適的玻璃傾斜角度時，便可扭緊裝在小厚板頂上的固定螺絲把它固定下來（扭松固定螺絲，玻璃片及小軸又可以轉動）。這是平行投影的裝圖方法，後面將有較詳細的討論（照片1—2）。

3. 光源部分：在凹底板後面中部裝一長約50cm的豎杆，豎杆上部裝有小電燈（燈絲越短越好，并附有變壓器，以調節其電壓），豎杆下部裝一大凸透鏡，當使小電燈的發光點放在凸透鏡的焦點時，則由小電燈發出的錐形光通過透鏡後，被折射成為平行的光綫（或置光源於凹鏡的焦點也可以得到平行光），并使這平行的光綫與活動板（投影面）成垂直。當這些平行光綫透過有一定傾斜而繪有地形地質圖的玻璃片時，則將原圖的影子投到活動板的平面上，成為正角投影的投影圖，我們便可以直接利用這種投影圖形，來繪成平行投影的塊狀

立体图(照片1—2)。

同理,取去照片1的凸透镜及玻璃片,而在活动板后面的凹槽上插上绘有原图的玻璃片,移动小电灯,使锥形的灯光斜射过玻璃片时,则可将原图的投影投到活动板的平面上,成为透视投影的图形,我们就可以直接利用它来绘成透视的块状立体图(照片3—4)。

## 二、平行投影绘制块状立体图的方法

应用平行投影来绘制块状立体图的基本原理,作者已在1955年较详细地讨论过了(参看<sup>[2]</sup>63—64页(或<sup>[1]</sup>44—45页)。应用这种仪器来绘制块状立体图,必须根据那些原理来处理投影图形。即在正角投影的情况下,绘在玻璃片上的原图,装在图架上经投影后,必须使投影图按关系式

$$b'' = b \sin \theta$$

缩扁( $b''$ 为投影图的宽度, $b$ 为原图宽度, $\theta$ 为投影角)。这些投影图投映固定在活动板的画纸上,然后就在这画纸上依据投影图先填绘最高一根等高线的投影,再转动螺丝使活动板向前平移

$$h'' = h \cos \theta$$

的长度( $h$ 为等高线垂直间隔, $h''$ 为 $h$ 投影后的长度)。再绘次高等高线的投影,低的等高线为高的等高线所遮盖的部分不必绘出。这样顺序将投影图中所有的等高线绘完(包括剖面上的等高线),并连结其边角上的线端,便绘成正角投影的块状立体图。同理块状立体地质图也可同时绘制出来(参看<sup>[3]</sup>314—318页)。

在斜角投影的情况下,原图经投影后必须使它的投影图按关系式

$$b' = b \tan \theta \quad \left( \text{设 } \theta < \frac{\pi}{4} \right)$$

缩扁( $b'$ 为投影图的宽度, $b$ 为原图宽度, $\theta$ 为投影角)。这投影图投映于活动板的画纸上,然后在画纸上依投影图先填绘最高一根等高线的投影,然后转动螺丝使活动板向前平移一等高线间隔的长度(因 $h = h'$ 见<sup>[1]</sup>45页或<sup>[2]</sup>64页)。再填绘次高等高线的投影图,同上述,顺序填绘完投影图中所有的等高线及联结其边角上的线端,就绘成斜角投影的块状立体图。

因为斜角投影的投影角我们要它小于 $\frac{\pi}{4}$ ,所以斜角投影的投影图完全可以利用正角投影的投影图来绘制块状立体图(如 $\sin 30^\circ = 0.5 = \tan 26^\circ 34'$ )。

详细的绘制方法作者已在以前作过较详细的论述(见<sup>[3]</sup>314—318页及<sup>[2]</sup>68—73页)在此不再重复。

下面简略地讨论应用平行投影来绘制块状立体图的四种方法:

1. 正面(斜角投影)画法:方形的原图有一边(须在块状立体图上表现出来的那一边)在投影时与投影面平行,并使投影角为 $\theta$ ,经投影、绘制及修饰后,即成为正面(斜角)画法的块状立体图(图1)。这种块状立体图正面的剖面完全没有缩小或歪曲,可以直接在这个剖面上量度岩层的厚度、深度和宽度及其倾角(假如这剖面与岩层的走向成垂直),很具实用价值,又因这剖面完全与原剖面大小一致,所以地质情况很容易填绘在块状立体图的剖面上,不须再用仪器转绘。但是它的侧面则被压缩成一条直线,以致完全不能看见侧边的剖面,这是一个缺点(图2、3)。

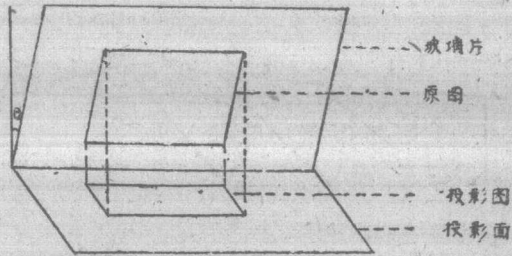


图1

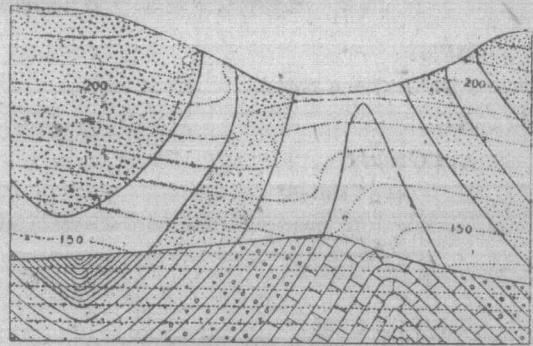


图3 正面(斜角投影)块状立体图

2. 等度(正角投影)画法:方形的原图有一个角正对着投影面,与投影面所成之两个角皆为 $45^\circ$ ,而投影角为 $35^\circ 16'$ 时(图4),经投影及绘制后即成为等度(正角投影)的块状立体图,它的长阔高三轴皆被压缩约为原图的0.82,所以在三轴上的距离是准确的,可以直接量度岩层的深度和宽度(图6),通常用来绘制块状立体地质图。可证明如下:

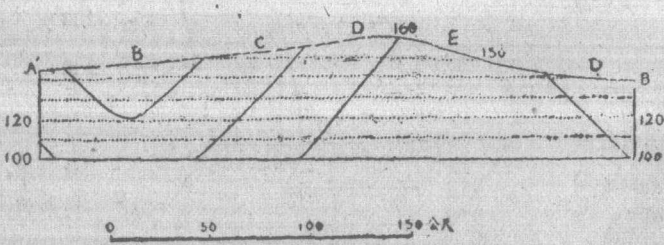
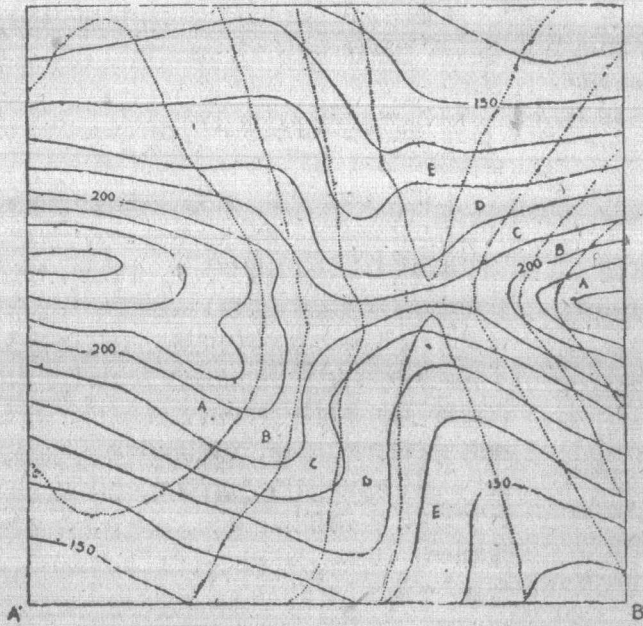


图2 地形地质图及A'-B'的剖面

如图5.

$\angle B''BC = \theta$  投影角

$BC \perp \triangle \triangle'$

$\therefore AC = BC$

$$= c' \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} c'$$

又由于正角投影

$\therefore BB'' \perp CB''$

$\therefore B''C = BC \sin \theta$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} c' \sin \theta$$

又  $B''C \perp AC$

$\triangle B''CA = rt\triangle$

$$\therefore c'' = \overline{AB''} = \sqrt{B''C^2 + AC^2}$$

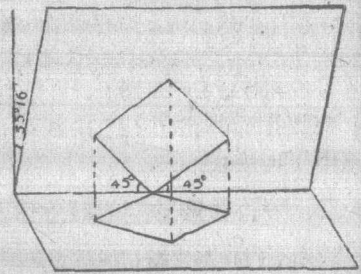


图4

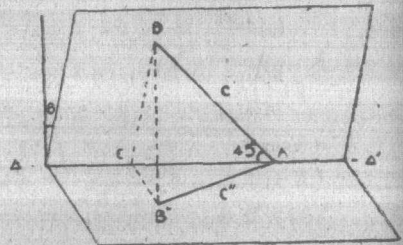


图5

$$= \sqrt{\frac{1}{2} c'^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} c'^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} c' \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$$

$$\therefore \frac{c''}{c'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$$

但这种投影

$$\frac{h''}{h} = \cos \theta \quad (\text{見上頁})$$

要投影后长潤高按一定比例縮短

$$\text{必須 } \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta} = \cos \theta$$

$$\text{即 } 1 + \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta$$

$$\text{即 } 2 - \cos^2 \theta = 2\cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

即把原长縮短約为0.816

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故投影角  $\theta$  約为  $35^\circ 16'$

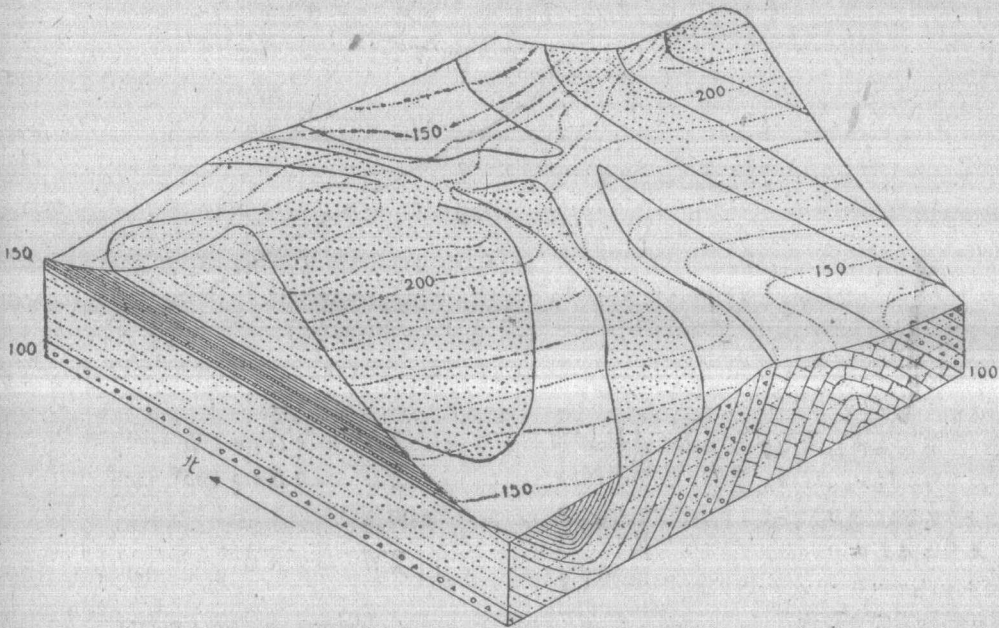


图6 等度(正角投影)块状立体图(原图依图2)

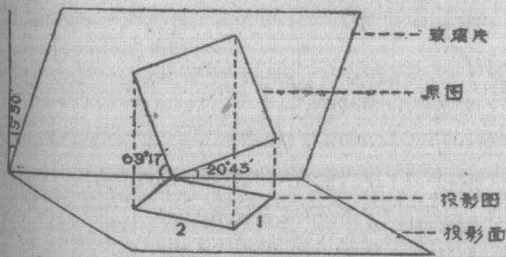


图7

3. 二度(正角投影)画法: 方形的原图擺得有一个角对着投影面, 并与投影面所成的大角为  $69^\circ 17'$ , 所成的小角为  $20^\circ 43'$ , 而投影角为  $19^\circ 30'$  时(图7-9), 經投影及繪制后即成为二度(正角

投影)块状立体图(图9)。这种块状立体图的长边及垂直高度皆縮短約为原图长度的0.94, 而长濶二边之比则为2:1, 其証明如下:

設有一立方体  $ABCDEFGK$  (图8), 过  $A$  有一正角投影面, 投影角为  $\theta$ , 立方体經投影后成为  $AB'C'D'E'F'G'K'$ , 在投影面上过  $A$  作一垂直于  $AE$  之直綫  $AO$  (原图面与投影面所成之交綫), 求  $\angle BAO = \varphi = ?$ .  $\theta = ?$  时

$$\text{則 } \frac{AB'}{AB} = \frac{AE'}{AE}$$

$$\text{且 } AD' = \frac{1}{2} AB'$$

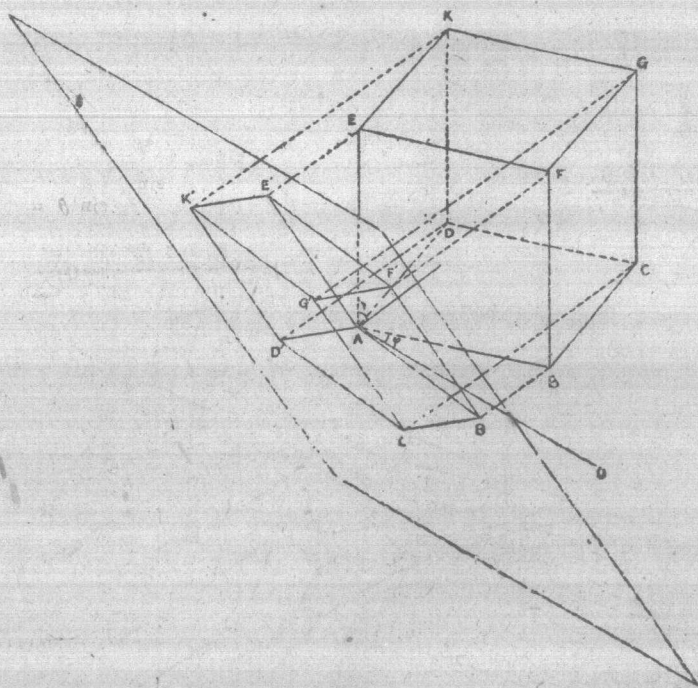


图 8

解: 为便利起见, 选取  $A$  为原点,  $AD, AB, AE$  依次为坐标轴  $x, y, z$ 。显然, 投影平面为  $ax + by + cz = 0$

而由于  $AB = AE \neq 0$ , 故方程又可写为  $ax + y + z = 0 \dots\dots\dots (1)$

其法线的方向余弦为

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = a : 1 : 1$$

$$\text{即 } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{2+a^2}}$$

$$\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \dots\dots\dots (2)$$

由 (2) 可得

$$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{2+a^2}}$$

$$\cos (90^\circ - \beta) = \sin \beta = \sqrt{\frac{1+a^2}{2+a^2}}$$

因正角投影

$$\overline{AD'} = \overline{AD} \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$\overline{AB'} = \overline{AB} \cos (90^\circ - \beta)$$

由假设

$$\overline{AB'} = 2 \overline{AD'}$$

$$\text{故得 } \sqrt{\frac{1+a^2}{2+a^2}} = 2 \sqrt{\frac{2}{2+a^2}}$$

$$\text{即 } a = \sqrt{7}$$

$$\text{由 (2) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\text{所以 } \alpha \approx 28^\circ \quad \beta \approx \gamma \approx 70^\circ 30'$$

$$\text{投影角 } \theta = 90^\circ - \gamma \approx 19^\circ 30'$$

又因  $oxy$  平面与投影平面的交线为:

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

它与  $y$  轴的夹角  $\varphi$  为:

$$\cot \varphi = a$$

$$\therefore \varphi \approx 20^\circ 43'$$

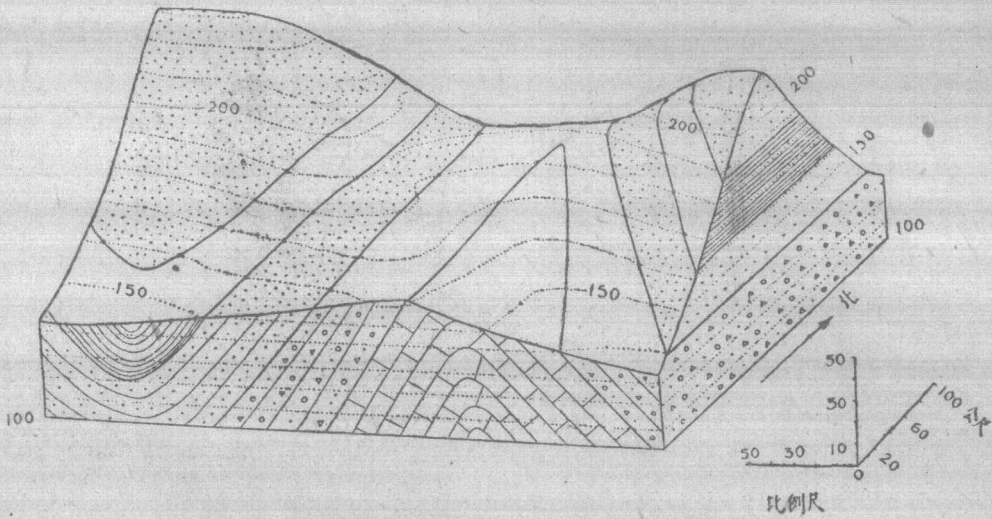


图9 二度（正角投影）块状立体图（原图依图2）

4. 二度正面（斜角投影）画法：

設：在  $OYZ$  平面上有一正方的原图  $\square ABCD$ ，繞  $O-Y$  軸轉  $\theta$  角至  $\square A'B'CD$ ，再于平行于  $O-YZ$  平面而傾斜  $\varphi$  角的光綫射映于  $O-XY$  平面上（投影面）成  $\square A''B''CD$  的投影图，使

$$\frac{DA''}{DA'} = \frac{1}{2} \frac{CD}{DA'}$$

則  $\theta, \varphi$  滿足方程：

$$(2 \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta \tan \varphi)^2 = 1$$

証：如图10

$$A(o, a, a), \quad \angle ADA' = \theta$$

$$A'(a \sin \theta, a, a \cos \theta)$$

$$A'D' = a \cos \theta \quad \angle D'A'A'' = \varphi$$

$$D'A'' = A'D' \tan \varphi = a \cos \theta \tan \varphi$$

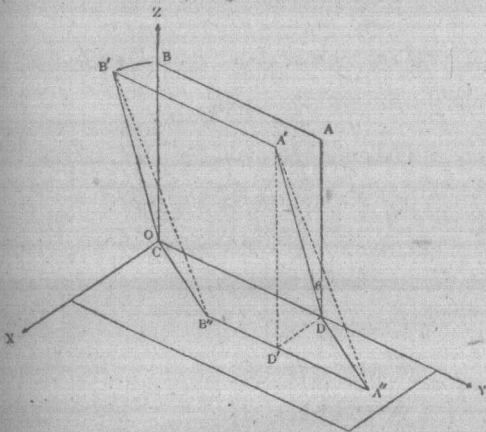


图10

$$D(o, a, o),$$

$$A''(a \sin \theta, a + a \cos \theta \tan \varphi, o)$$

$$\overline{A''D}^2 = (a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta \tan \varphi)^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{即 } (2 \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta \tan \varphi)^2 = 1。$$

$$\text{即 } \cos^2 \theta = \frac{3}{4(1 - \tan^2 \varphi)}$$

根据上式可得：

$\theta$	$\varphi$
15°	23°53'
18°	22°24'
20°	21°13'
22°	19°52'
25°	16°25'

即原图面傾斜  $\theta$ ，並使仪器的平行光柱傾斜  $\varphi$  时，經投影后則投影图的短边等于长边的  $\frac{1}{2}$ ，合于二度投影的要求（照片5—6）。經過这样投影及繪制出來的块状立体图，它正面的剖面是完全沒有縮小和歪曲的，所以在正面的剖面上可以直接量度岩层的厚度、深度和傾角（剖面垂直于岩层走向的話）。而侧面則被压缩成为正面的  $\frac{1}{2}$ （图11）。

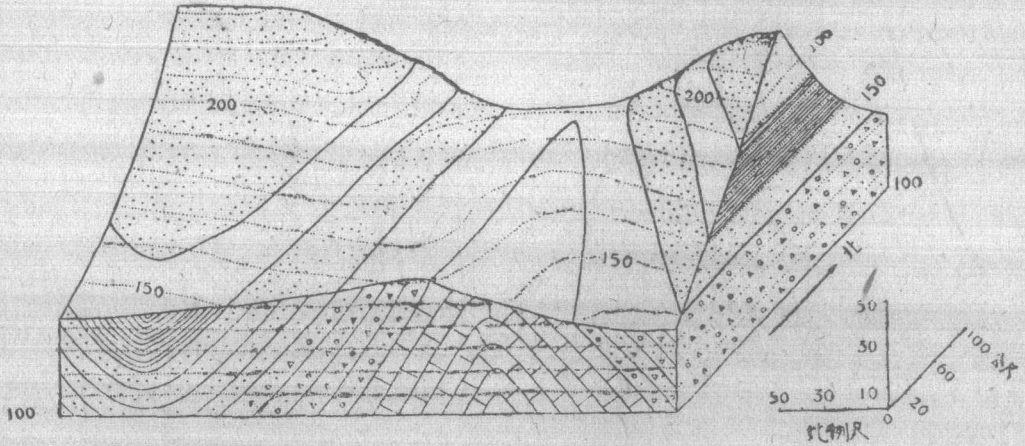


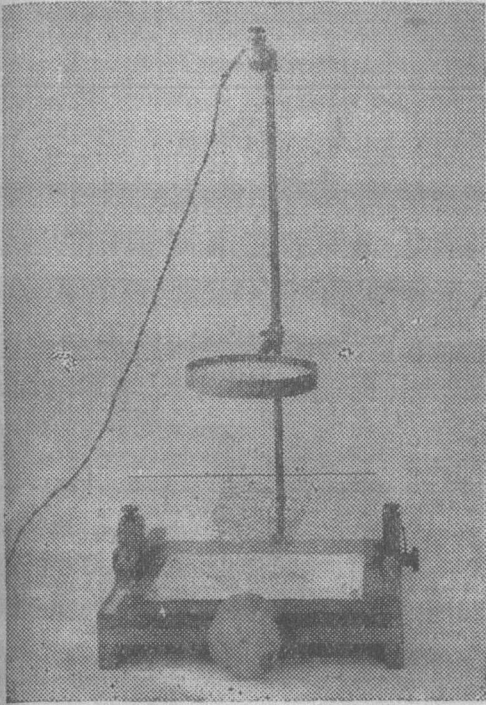
图11 二度正面(斜角投影)块状立体图(原图依图2)

### 三、透視投影繪制块狀立体圖的方法

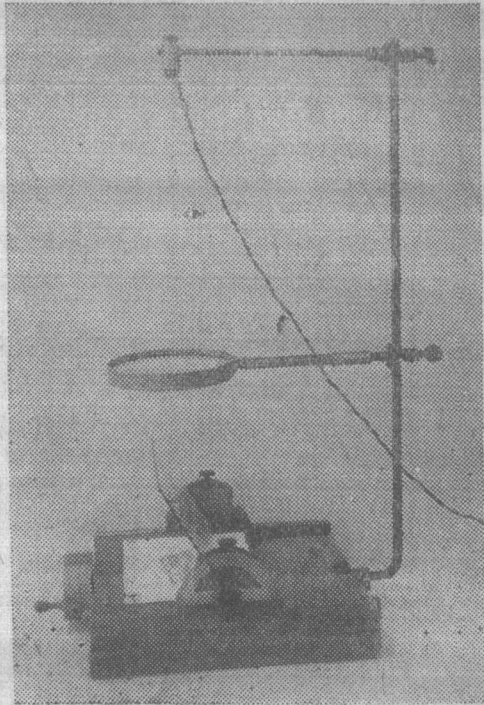
透視投影的裝圖及光源裝置已在論述儀器構造時討論過了，這裡不再贅述。繪圖時只需畫紙釘于凹底板的邊旁(不要把畫紙釘在活動板上)，而使畫紙平鋪于活動板上，當旋轉螺絲帶動活動板及原圖前後移動時，畫紙仍平鋪在活動板上不跟活動板移動。然後使活動板向前移動，使活動板與螺絲套間有一間隙，(照片3)，這間隙的大小視原圖的比例尺及原圖上有等高綫有多少根而定(包括地下的等高綫，即這間隙必須大於块狀立体圖的最大厚度)。再移動光源試得合適的投影，這樣就在畫紙上先填繪最高一根等高綫的投影，然後旋轉螺絲使原圖向螺絲套這邊移動一等高綫間隔的長度(這長度可在螺絲头上的刻度及凹底板左邊的mm尺上看出來)，再填繪次高的等高綫，這樣順序使原圖所有的等高綫填繪完畢，再連結其邊角上的綫端，便成為透視投影的块狀立体圖(請參攷<sup>(3)</sup>314—323頁)。

### 參攷文獻

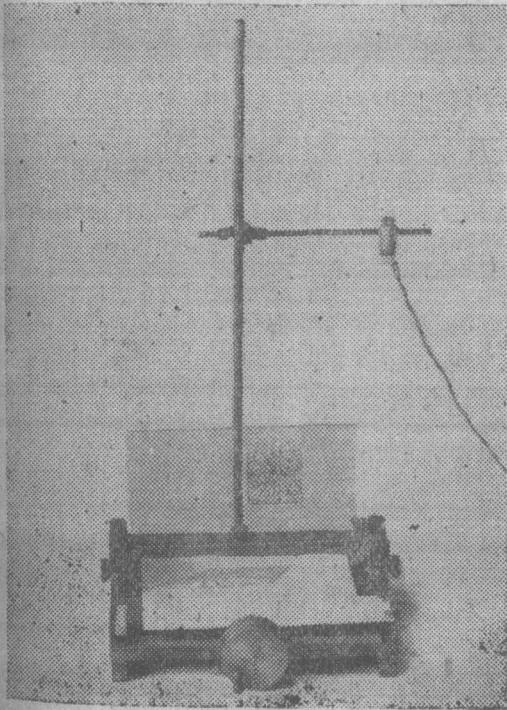
- [1] Ли Цзянь-сянь (李見賢): Новый метод составления блокдиаграмм по топографическим и геологическим картам. Известия Академии Наук СССР Серия Географическая, 1955, № 6, Москва.
- [2] 李見賢: 由平面地形地質圖繪成块狀立体圖的新方法。中山大學學報第三期(自然科學版) 1955年11月。
- [3] 李見賢: 由地形地質圖繪成块狀立体圖的透視投影方法。地理學報第23卷第3期 1957年8月。
- [4] В. Н. 帕夫林諾夫: 表示地質構造用的立体圖解。北京地質學院 1955。
- [5] 丁驥、陳正祥: 透視圖繪法Block Diagrams 1943年4月初版，前中央大學出版部印行。



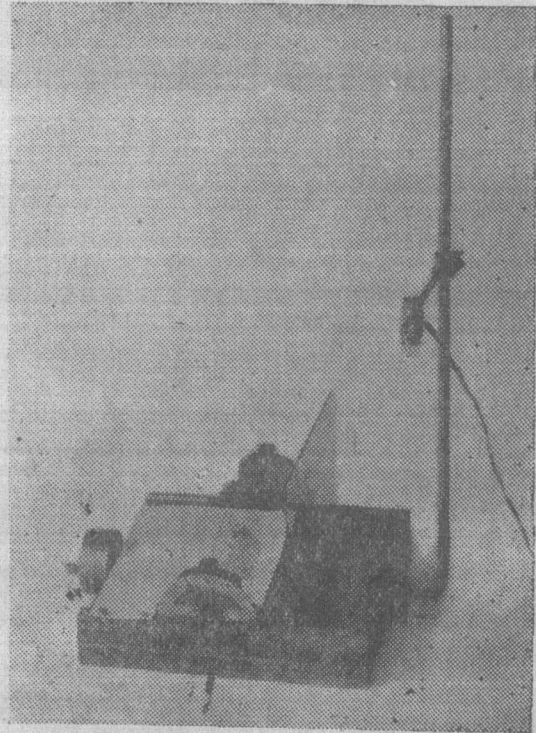
照片1 繪制平行投影块状立体图的仪器装置 (正面)



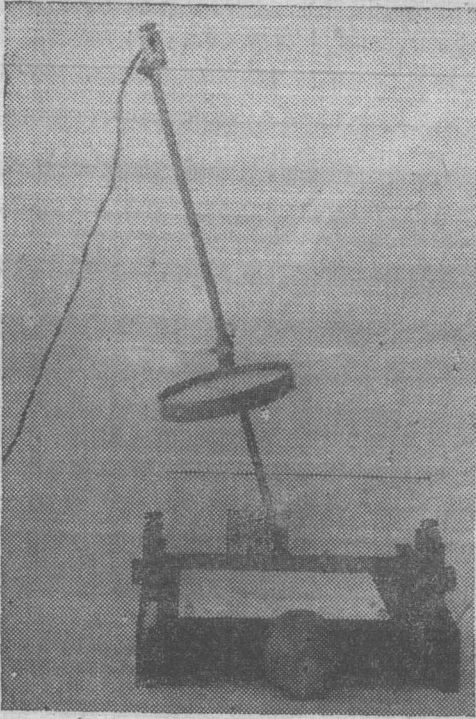
照片2 照片1的侧面



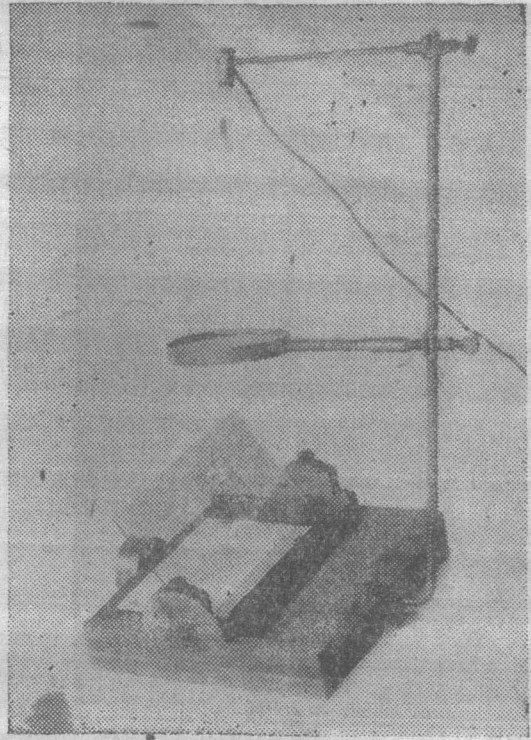
照片3 繪制透視投影块状立体图的仪器装置



照片4 照片3的侧面



照片5 繪制二度正面(斜角投影)块状立体图的仪器装置



照片6 照片5的侧面