

# 关于聚点的一个问题

黄炎明

设  $(X, \mathcal{U})$  为  $T_1$  空间, 对于  $x \in X$ , 我们规定

定义 1. 若对任  $A \subset X$ , 当  $x$  是  $A$  之聚点时均能从  $A$  中选出收敛于  $x$  之数列  $\{a_n\}$ , 则称  $x$  为数列可达的。

定义 2. 若在  $x$  点之邻域系中存在着可数个成员, 它们的交集为  $\{x\}$ , 则称  $x$  具有可数拟基。

R. Vaidyanathaswamy 在他的书中 [1.267 页] 提出如下问题:  $x$  点具有可数拟基是不是它数列可达的充分条件, 必要条件或者既充分又必要?

本文目的在于给这个问题以否定的答复。

以下  $(\mathcal{U})$  表示使  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$  收敛的一切  $(x_1, x_2, \dots)$  所成的线性有模空间, 其模数为

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots)$  (见 [2, 绪论, § 8])

定理 1.  $(\mathcal{U})$  空间在它的弱拓扑下存在着非数列可达的点。

〔证明〕 因为  $(\mathcal{U})$  是无穷维的, 由 J. V. Wehausen [3] 的一个结果: 线性有模空间的弱拓扑也能有模的充分必要条件是空间维数有限。可得知  $(\mathcal{U})$  之弱拓扑与模拓扑是不相等的。

而我们知道弱拓扑总是比模拓扑粗糙的, 故知有  $A \subset X$  它闭于模拓扑但却不是弱闭的。设  $x$  为不属于  $A$  而属于  $A$  的弱闭包的点, 则显然  $x$  为  $A$  的一个弱聚点。

我们再去证明在  $A$  中不存在着弱收敛于  $x$  之数列。用反证法, 若存在  $\{a_n\} \subset A$  且  $a_n \xrightarrow{\text{弱}} x$ 。由 M. J. Shur 的一个结果: 对  $(\mathcal{U})$  中之元素数列而言, 弱收敛与模收敛等价 [3: 第 9 章, § 2], 推知  $a_n \xrightarrow{\text{模}} x$ 。由  $A$  在模拓扑下的封闭性知  $x \in A$ 。这导致了与  $x$  的选择相矛盾。

定理 2.  $(\mathcal{U})$  空间在弱拓扑下每一个点都具有可数拟基。

〔证明〕 由于  $(\mathcal{U})$  在弱拓扑下的邻域系具有如下性质: 若  $\{U\}$  为 0 点的弱邻域系, 则对每  $x \in (\mathcal{U})$  其弱邻域系恰为  $\{U+x\}$ 。所以只需证明  $(\mathcal{U})$  在 0 点具有可数拟基便够了。

我們知道  $(\mathcal{X})$  的共軛空間是有界實數列空間  $(m)$ , 且其綫性泛函的一般表达式为

$$\tilde{x}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \tilde{x}_i \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots) \in (\mathcal{X})$ ;  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots) \in (m)$  (見 [2, 第4章, §4]). 我們先來証明  $(\mathcal{X})$  的共軛空間  $(m)$  具有可數的完整子集, 即存在着  $\{f_i\} \subset (m)$  使当

$$x \in (\mathcal{L}), \text{ 且 } f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

时恒有  $x = 0$ , 事实上, 取

$$f_i = (\delta^1_i, \delta^2_i, \dots) \quad i = 1, 2, \dots$$

其中  $\delta^j_i = 0$  当  $i \neq j$ ;  $\delta^i_i = 1$ .  $\{f_i\}$  便构成了一个完整子集, 因为当

$$x \in (\mathcal{X}) \text{ 且 } f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

时由表达式 (1) 知有

$$x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

即  $x = 0$ .

现在来考虑具有如下形式的邻域:

$$U(i, k) = \{x: |f_i(x)| < \frac{1}{k}\} \quad i, k = 1, 2, \dots$$

由定义知  $\{U(i, k)\}$  是 0 点的可數的弱邻域族. 我們来証明

$$\{0\} = \bigcap_{i, k} U(i, k)$$

$0 \in \bigcap_{i, k} U(i, k)$  是显然的. 去証右端只含 0. 事实上, 任  $x \in (\mathcal{L})$  若

$$x \in \bigcap_{i, k} U(i, k)$$

即

$$|f_i(x)| < \frac{1}{k} \quad i, k = 1, 2, \dots$$

固定  $i$ , 令  $k \rightarrow \infty$  便得

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

由  $\{f_i\}$  的完整性, 便得

$$x = 0$$

于是由定义 2 知  $\{U(i, k)\}$  是 0 点的可數拟基.

上述定理 1, 2 的結果表明問題中之条件不是充分的.

下面我們轉到条件的非必要性的討論.

設  $X_0$  为一不可數集,  $\mathcal{I}_0 = \{X_0, \text{空集}, \text{余集为有限集的子集}\}$  則  $(X_0, \mathcal{I}_0)$  为

— $T_1$ 空间, 而且大家知道这是 $T_1$ 拓扑中的最粗糙者。

我们有:

定理 3.  $(X_0, \tau)$  中每一点都不具有可数拟基, 然而每一点都是叙列可达的。

[证明] 先证明第一部分, 设  $x \in X_0$ . 不妨取含有  $x$  之一切开集作为  $x$  之邻域系来讨论。显然  $x$  之邻域系中任何可数个成员之交集的余集至多可数, 从而这个交集不能只含  $x$  一个点 (它应该有不可数多个点), 即  $x$  不含有可数拟基。

再看叙列可达性。设  $x \in X_0$ , 则任一以  $x$  为聚点的集合  $A$  将一定是无穷集 (因为空间是  $T_1$  的) 从而可选出叙列  $\{a_n\} \subset A$ , 且

$$a_i \neq a_j \quad \text{当 } i \neq j$$

易知  $a_j \rightarrow x$ , (事实上,  $\{a_n\}$  以空间任何点为极限) 即  $x$  叙列可达。

这定理表明了问题中条件不是必要的。

\* \* \* \* \*

在定理 1 的证明中我们曾引用了 J.V. Wehausen 的结果。而事实上, 在我们这个特殊的例子中能以另一个初等一些的证明给出如下命题:

命题:  $(X)$  空间的弱拓扑不等于模拓扑。

[证明] 我们只需对于  $S = \{x: \|x\| < 1\}$  来证明  $O$  点的任一个弱邻域  $U(f_1, f_2, \dots, f_n; \epsilon)$  均不能含于  $S$ 。

对给定  $U(f_1, f_2, \dots, f_n; \epsilon)$  令

$$H = \{x: f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

显然  $H$  是一个子空间而且

$$H \subset U\{f_1, f_2, \dots, f_n; \epsilon\}.$$

我们来证明  $H$  含有非零元素。由  $(X)$  空间上线性泛函的一般表达式, 知可令  $f_i = \{f_i^1, f_i^2, \dots\} \in (m)$ 。去考虑方程组:

$$f_1^1 x_1 + f_1^2 x_2 + \dots + f_1^K x_K = 0$$

$$f_2^1 x_1 + f_2^2 x_2 + \dots + f_2^K x_K = 0$$

...

$$f_n^1 x_1 + f_n^2 x_2 + \dots + f_n^K x_K = 0$$

其中  $K > n$ , 这时以  $x_1, x_2, \dots, x_K$  为未知数的方程组为一个齐次方程组而方程个数比未知数个数少, 从而必有非零解, 取其中一非零解为

$$x_1^0, x_2^0, \dots, x_K^0$$

令

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_K^0, 0, 0, 0, \dots)$$

易知  $x_0 \in H$ , 且  $\|x_0\| \neq 0$ , 即  $H$  含有非零元素。

因为  $H$  为子空间故

$$p x_0 \in H \quad p = 1, 2, \dots$$

因有那样的  $p_0$  使  $\|p_0 x_0\| > 1$  而  $p_0 x_0 \in H$ , 故知  $U(f_1, f_2, \dots, f_n; \epsilon)$  不含于  $S$ 。

## 参 考 文 献

- [1] R. Vaidyanathaswamy.  
Treatise on set topology -  
Madras 1947
- [2] S. Banach.  
Théorie des Opérations Linéaires  
Warsaw 1932
- [3] J. V. Wehausen.  
Transformations in linear topological spaces  
Duke Math. J. 4 (1938) 157—169.

## ON A PROBLEM OF ACCUMULATION POINTS

Huang Yen-ming

### ABSTRACT

A point  $p$  in  $T_1$ -space is said to have the property  $(\delta)$  if there exists a countable family of its neighborhoods whose intersection is  $\{p\}$ . In this note examples are constructed to show that the property  $(\delta)$  neither implies nor is implied by the property that every set having  $p$  as an accumulation point contains a sequence converging to  $p$ .