

狄黎赫来(Dirichlet)积分的推广*

林和曾

在数学的课堂讨论过程中, 我们觉得把狄黎赫来积分纳入一个更广泛的形式、及简单直接证明在下定理是有好处的, 因为这样, 关于富氏级数展开的狄黎赫来定理就可以看做在下定理的一个特殊情形; 在证明拉普拉斯(Laplace)变换的逆变换式时, 也可以无需借助于有界变差函数的理论。

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的任何有限区间上, 除了有限多个第一类间断点外, 皆连续, 且在原点存在右导数(或在原点右边附近单调), 积分 $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ 收敛;

函数 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 及积分 $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ 收敛。则:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx = f(+0) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

证明: 积分 $\int_0^{\infty} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx$ $b \in (0, +\infty)$ 的收敛性, 可以从下面证明 (一)、(二)

的过程中得到肯定。

(一) 因为函数 $f(x)$ 在原点存在右导数, 即是极限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(+0)}{x}$ 存在, 于是, 能够找到正数 r_1 及 A 使得不等式:

$$\left| \frac{f(x) - f(+0)}{x} \right| < A \quad x \in (0, r_1)$$

成立。

设 $|\varphi(x)| < M$ (常数) $x \in [0, +\infty)$, 对于任给正数 ε , 取 $r_0 = \min \{r_1, r_2\}$ 其中 $r_2 = \frac{\varepsilon}{2AM}$, 那末:

* 本文参考刘俊贤教授的复变函数答疑讲义第25页至27页, 并得到他亲自指导, 作者在此表示感谢。

$$\left| \int_0^{r_0} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx - f(+0) \int_0^{r_0} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| = \left| \int_0^{r_0} \frac{f(x) - f(+0)}{x} \varphi(bx) dx \right| > \\ < A M r_0 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

或若是設函數 $f(x)$ 在原點右邊附近單調，則應用積分第二中值定理，容易得到 (1)。

又由于積分 $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ 收斂，因此，對已給的正數 ε ，存在 $N_0 > 0$ ，使當 $b > N_0$

時，有：

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_0^{r_0} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| = \left| \int_{br_0}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy \right| < \frac{\varepsilon}{2B} \quad (2)$$

其中 B 是大于 $|f(+0)|$ 的一個常數。

從 (1)(2) 兩式，當 $b > N_0$ 時，可得：

$$\left| \int_0^{r_0} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx - f(+0) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| < \varepsilon \quad (A)$$

(二) 依所給條件，不难看出積分 $\int_{r_0}^{\infty} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx$ 是對 $b \in (0, +\infty)$ 一致收斂的，

于是，可以找到不依賴 b 的正數 $R_0 > r_0$ ，使不等式：

$$\left| \int_{R_0}^{\infty} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| < \varepsilon \quad (B)$$

對一切正數 b 都成立。

(三) 根據函數 $f(x)$ 的性質，區間 (r_0, R_0) 可以分成有限個 (設是 P 個) 子區間，使 $f(x)$ 在每一個這樣的子區間內連續。設 (a_1, b_1) 是其中某一個，顯然， $f(a_1+0)$ 與 $f(b_1-0)$ 都存在，從 $f(x)$ 的連續性，可以找到正整數 n' ，用分點 x_K ($K=1, 2, \dots, n'-1$ ， $a_1 = x_0$ ， $b_1 = x_{n'}$) 把區間 (a_1, b_1) 破分為 n' 等分，使得每一分段上的任意兩點 x' 、 x'' ，對應

有： $\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{a_1 \varepsilon}{M(b_1 - a_1)}$ 則：

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx - \sum_{K=0}^{n'-1} f(x_K) \int_{x_K}^{x_{K+1}} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| = \left| \sum_{K=0}^{n'-1} \int_{x_K}^{x_{K+1}} [f(x) - f(x_K)] \right|$$

$$\left| \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| < \frac{a_1 \varepsilon}{M(b_1 - a_1)} \frac{M}{a_1} \sum_{K=0}^{n'-1} \int_{X_K}^{x_{K+1}} \frac{dx}{x} = \varepsilon$$

从而:

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{b_1} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| &< \left| \sum_{K=0}^{n'-1} f(x_K) \int_{X_K}^{x_{K+1}} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{K=0}^{n'-1} |f(x_K)| \cdot \left| \int_{X_K}^{x_{K+1}} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| + \varepsilon \end{aligned} \quad (1')$$

其次, 积分 $\int_0^\infty |f(x)| dx$ 已知收敛, 因此, 存在自然数 $n_1 (n_1 \geq n')$, 使不等式:

$$\sum_{K=0}^{n_1-1} |f(x_K)| \frac{b_1 - a_1}{n_1} < \int_0^\infty |f(x)| dx + 1 \quad (2')$$

成立。

又因为 $\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx$ 收敛, 对所给的 ε 与 n_1 , 可以找到正数 N_1 , 只要 $b > N_1$, 就有:

$$\left| \int_{X_K}^{x_{K+1}} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon(b_1 - a_1)}{n_1} \quad (3')$$

从(1')(2')(3')三式, 当 $b > N_1$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{b_1} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| &< \sum_{K=0}^{n_1-1} |f(x_K)| \cdot \left| \int_{X_K}^{x_{K+1}} \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| + \varepsilon < \\ &< \sum_{K=0}^{n_1-1} |f(x_K)| \frac{\varepsilon(b_1 - a_1)}{n_1} + \varepsilon < \varepsilon \left(\int_0^\infty |f(x)| dx + 2 \right) \end{aligned}$$

对其他 $(P-1)$ 个子区间, 进行同样的考察, 将会相应得到一串正数 $N_2, N_3, \dots, N_p$, 命 $N = \max \{ N_0, N_1, N_2, \dots, N_p \}$, 那末, 当 $b > N$, 就有:

$$\left| \int_{r_0}^{R_0} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| = \left| \sum_{K=1}^P \int_{a_K}^{b_K} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx \right| < P \varepsilon \left(\int_0^\infty |f(x)| dx + 2 \right) \quad (C)$$

(四)综合所得的(A)(B)(C)三式, 立即可以推出预期的结果。

附注: 1° 将定理中的条件 “ $f(x)$ 在原点存在右导数” 改成 “在 $(0, r_1)$ 内, $\frac{f(x)-f(+0)}{x}$ 有界, $(r_1 > 0)$ ” 公式显然仍成立。

2° 从证明中明显看出, 还有:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx = \begin{cases} f(+0) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, & \text{当 } t \text{ 是正数或 } \infty \\ 0, & \text{当 } t = 0 \end{cases}$$

3° 若将定理中所有的区间 $[0, +\infty)$ 都改成 $(-\infty, 0]$, 且函数 $f(x)$ 在原点存在左导数, 则显然有:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_t^0 f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx = f(-0) \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (t < 0)$$

SOME EXTENSION OF DIRICHLET INTEGRALS

Lin Ho-tseng

ABSTRACT

In the course of our class-room discussion we find that it is helpful to put the Dirichlet integrals in a more general form and to prove directly the following theorem:

Let: 1° $f(x)$ be continuous in $[0, +\infty)$ except at a finite number of points of discontinuity of the first kind in any finite interval, $f(x)$ admitting $f'(+0)$

for $x=0$ (or $f(x)$ being monotonic in the vicinity of $x=0$); 2° $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$

be convergent; 3° $\varphi(x)$ be bounded in $[0, +\infty)$ and $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ conver-

gent, then we have: $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) \frac{\varphi(bx)}{x} dx = f(+0) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

Thus, the Dirichlet theorem for Fourier series development looks like a particular case of the above.