

关于一类二阶綫性椭圆型方程組 的最大模原理

馬汝念

(数学力学系)

I. 众所周知, 一般 n 維二阶綫性椭圆型方程具有两个极重要的性质, 即它的解在存在域內为其全体自变数的解析函数和它的Dirichlet問題解是唯一的。

1939年И. Г. Петровский^[1]証明了一般綫性方程組

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_n)u = 0 \quad (1)$$

$$\text{或 } Lu \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_n)u = 0 \quad (1')$$

的解在其存在域內为其全体自变数的解析函数, 其充分必要条件为: 对于任何不同时为零的实数 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 恒有

$$\left| \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \xi_i \xi_j \right| \neq 0 \quad (2)$$

其中 $A_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, $B_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i, j = 1, \dots, n$) 及 $C(x_1, \dots, x_n)$ 設为 N 阶实函数方陣, u 为 N 維实向量函数 $u \equiv \{u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)\}$ 。并因此称滿足条件(2)的方程組(1)或(1')为二阶綫性椭圆型方程組。

1948年 А. В. Бицадзе^[2]举出了两个著名的反例, 指出按 И. Г. Петровский 意义下的一般椭圆型方程組的Dirichlet問題解是不唯一的, 甚而有无穷多个解。

这两个反例是:

$$\text{例一: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{例二: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

其中 $u = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ 。

其后, 引起許多作者对二阶綫性橢圓型方程組 (1) 或 (1') 还在补加某些条件下, 証明它的Dirichlet問題有唯一解。如A.B. Бицадзе在So-migliana〔3〕給出的充分条件, 即若对于任意不为零的两实向量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 及 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ 使下面的二次型为正定

$$\eta A \eta + \eta B \xi + \xi B \eta + \xi C \xi \geq 0.$$

应用能量积分方法証明了二个自变量的二阶綫性橢圓型方程組

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

的Dirichlet問題解的唯一性。其中仍設 u 为 N 維实向量函数, A, B, C 为任意 N 阶实函数方陣。

1950年, M. И. Вишик〔4〕对方程組 (1) 或 (1') 給出另一个充分条件 (即所謂强橢圓条件): 对于任意不等于零的 n 維实向量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 及 N 維实向量 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, 存在一正数 $\alpha > 0$ 恒有

$$\eta \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \xi_i \xi_j \right) \eta \geq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^N \eta_j^2 \right).$$

1960年我們在〔5〕〔6〕給出二阶常系数橢圓型方程組 (4) 的Dirichlet問題解为唯一的充分必要条件是:

对于任意两实数 b 及 c 且 $b^2 \leq c$ 恒有

$$|A + 2Bb + Cc| \neq 0.$$

另一方面若确立橢圓型方程組 (1) 或 (1') 的最大模原理, 同样容易証明其Dirichlet問題解的唯一性。在这方面工作有1953年 B. Pini〔7〕証明了二阶橢圓型方程組

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C u = 0$$

当其系数矩陣 C 为負定时則其解 u 的模不能在存在域 D 內达到极大值。其中 E 为单位方陣。1957年 A.B. Бицадзе〔8〕把这結果推广到如下方程組

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 u = 0$$

其中 $A(x, y) = \alpha(x, y)E$, $C = \beta(x, y)E$, $A_1 = \alpha_1(x, y)E$, $B_1 = \beta_1(x, y)E$ 。且 $\alpha(x, y) > 0$, $\beta(x, y) > 0$ 。 E 仍設为单位方陣。

本文目的, 再把这一最大模原理推广到一类更一般的二阶綫性橢圓型方程組 (1) 或 (1')。并从而証明其Dirichlet問題解的唯一性, 它的解連續依赖于边值函数和一致收斂性定理。

II. 設 D 为 n 維欧基里德空間 E_n 的有界閉域, 它的边界記为 Γ 。为了簡便, 記 E_n 內的点为 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 N 維实向量函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 的数量积为 $(u, v) = \sum_{k=1}^N u_k(x) v_k(x)$ 。

我們在 D 內考慮方程組

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = 0 \quad (1')$$

其中 $u(x)$ 为 N 维实向量函数; 系数 $A_{ij}(x)$, $B_i(x)$ 及 $C(x)$ 为 N 阶实函数方阵且设

$$A_{ij}(x) = a_{ij}(x)E$$

$$B_i(x) = b_i(x)E$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

而 E 为 N 阶单位方阵。假设 $a_{ij}(x)$ 为 D 内的一阶连续可微函数, $b_i(x)$ 为 D 内的有界函数。

此时, 方程组 (1') 在 x^0 点的椭圆型条件为: 对于任何不同时为零的实数 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 恒使,

$$\left| \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j \right| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j \right)^N \neq 0 \quad (5)$$

不妨一般性, 我们恒设

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j > 0$$

定理: 若二阶线性椭圆型方程组 (1') 的系数 $C(x)$ 为负定的, 则方程组 (1') 的任一正规解 $u(x)$ 的模不能在 D 内达到极大值。

[证明] 令正规解 $u(x)$ 的模为

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^N u_i^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} = |u(x)|,$$

若 $\rho(x)$ 在 D 内某点 x^0 达到极大值, 那么在 x^0 点处有

$$\frac{\partial \rho(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

及对于一切不同时为零的 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 恒有

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \rho(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \leq 0. \quad (7)$$

根据在 x^0 点的椭圆性条件, 不等式 (7) 有

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \frac{\partial \rho(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0. \quad (8)$$

但另一方面:

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \left(u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \rho(x)}{\partial x_j} \right],$$

和以向量 u 左乘方組 (1') 的两端, 我們可得下列的关系式:

$$\begin{aligned} (u \cdot Lu) = & \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \left(u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \sum_{ij=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i} \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n b_i(x) \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + uCu = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

在 x^0 点处考虑等式 (9), 并注意关系式 (6) 立得

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x^0) \left(u(x^0), \frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = -u(x^0)C(x^0)u(x^0). \quad (10)$$

所以由 (10) 及 (5) 我們推知

$$\begin{aligned} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x^0) \frac{\partial \rho(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} &= \left[\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x^0) \left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_j} \right) - u(x^0)C(x^0)u(x^0) \right] \frac{1}{\rho(x^0)} = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x^0) \frac{\partial u_k(x^0)}{\partial x_i} \frac{\partial u_k(x^0)}{\partial x_j} - u(x^0)C(x^0)u(x^0) > 0, \end{aligned}$$

这样, 它与 (8) 式相矛盾, 故定理得証。

如果系数方陣 $C(x)$ 是正定的, 則上述最大模原理不一定成立。例如在閉区域 $-\frac{\pi}{2} \leq x, y, z \leq \frac{\pi}{2}$ 上向量函数 ($u_1 = \cos x \cos y \cos z$, $u_2 = 2 \cos x \cos y \cos z$) 滿足二階綫性橢圓型方程組

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + u_1 + u_2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{2}{3}u_1 + \frac{8}{3}u_2 &= 0 \end{aligned}$$

但是在閉区域内 $u_1(x, y, z) > 0$, $u_2(x, y, z) > 0$ 而在边界上 $u_1(x, y, z) = 0$, $u_2(x, y, z) = 0$ 。

由上述最大模原理立即推知下列的推論:

推論 I. 橢圓型方程組 (1') 的 Dirichlet 問題解是唯一的。

[証明]: 設存在两个解, 分別記为 $u^*(x)$ 及 $u^{**}(x)$ 。令

$u(x) = u^*(x) - u^{**}(x)$ 則 $u(x)$ 为方程組 (1') 的齐次边值問題的解, 由定理推知

$$0 \leq |u_i(x)| \leq \max_{x \in \Gamma} |u(x)|,$$

$$\therefore |u_i(x)| \equiv 0 \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

推論 II: 橢圓型方程組 (1') 的 Dirichlet 問題的解是稳定的, 即解 $u(x)$ 連續依赖于它的边值函数。

[証明]: 設 $u^*(x)$ 及 $u^{**}(x)$ 分別为方程組 (1') 以已知向量函数 $f^*(x)$ 及 $f^{**}(x)$ 为边值的解。則 $u(x) = u^*(x) - u^{**}(x)$ 为方程組 (1') 以 $f^*(x) - f^{**}(x)$ 为边值的解。于是由定理知

$$0 \leq |u_i^*(x) - u_i(x)| \leq \max_{x \in \Gamma} |f^*(x) - f^{**}(x)| \quad i = 1, \dots, N_0$$

由于 $|f^*(x) - f^{**}(x)|$ 的充分小推得: $|u_i^*(x) - u_i^{**}(x)|$ 的任意小。

推論 III. 若定义在 Γ 上的向量函数叙列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 Γ 上一致收敛, 则以 $\{f^{(n)}(x)\}$ 为边值的 Dirichlet 问题的解叙列 $\{u_n(x)\}$ 也于 D 内一致收敛。

[证明]: 根据定理和 $\{f^{(n)}(x)\}$ 的一致收敛性推得, 任给定正数 ε , 存在正数 n_0 , 使当 $m, n > n_0$ 时而在 D 内处处恒有

$$|u_i^{(m)}(x) - u_i^{(n)}(x)| \leq \max_{x \in \Gamma} |f^{(m)}(x) - f^{(n)}(x)| < \varepsilon \quad i = 1, \dots, N_0$$

所以 $\{u_i^{(n)}(x)\}_{i=1,2,\dots,N, n=1,2,\dots}$ 是一基本叙列, 由于连续函数空间的完备性, 因此 $\{u_i^{(n)}(x)\}$ 在 D 内处处一致收敛。

参 考 文 献

- [1] И. Г. Петровский Sur l'analyticité des Solutions des Systemes d'équations différentielles Mat. сб. том 5 (1939)
- [2] А. В. Бицадзе О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными У. М. Н. С. С. С. Р. Т. 3 (1948)
- [3] C. Somigliana Ann. di Matem. Pura ed appl. Ser II 22 143 (1894)
- [4] М. И. Вайшк О сильно эллиптический Системах дифференциальных Уравнений Мат. сб. том 29 (1951)
- [5] 丁夏畦 王康廷 马汝念 张同 常系数二阶椭圆型微分方程组的定义 科学记录 4 卷 3 (1960)
- [6] 丁夏畦 王康廷 马汝念 孙家乐 张同 常系数二阶偏微分方程组椭圆性的定义 数学学报 第 10 卷 第 3 期 (1960)
- [7] B. Pini, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 22 265 (1953)
- [8] А. В. Бицадзе Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Д. А. Н. С. С. С. Р. 112 (1957)

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМАЛЬНОГО МОДУЛЯ ОДНОГО КЛАССА
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ
ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Ма Жу-нянь

В настоящей работе рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_n) u = 0 \quad (I)$$

где $u(x_1, \dots, x_n) = \{u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_N(x_1, \dots, x_n)\}$ N -мерные вектор-функции, коэффициенты $A_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, $B_i(x_1, \dots, x_n)$ и $C(x_1, \dots, x_n)$ ($ij = 1, 2, \dots, n$) матрицы N -го порядка действительных функций и предположим что

$$A_{ij}(x_1, \dots, x_n) = a_{ij}(x_1, \dots, x_n) E$$

$$B_i(x_1, \dots, x_n) = b_i(x_1, \dots, x_n) E$$

$$a_{ij}(x_1, \dots, x_n) = a_{ji}(x_1, \dots, x_n) \quad (ij = 1, 2, \dots, n)$$

а E единичная матрица N -го порядка.

Предположим что функции $a_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ ($ij = 1, 2, \dots, n$) определены в некоторой ограниченной замкнутой области в n -мерном евклидовом пространстве и их производные первого порядка в D непрерывны, и функции $b_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ограничены в области D .

Мы Докажем утверждение:

Теорема. Если коэффициент $C(x_1, \dots, x_n)$ линейных системы дифференциальных уравнений системы (I) второго порядка эллиптического типа — отрицательно определённая форма, то модуля никакого регулярного решения $u(x_1, \dots, x_n)$ системы (I) не может иметь в точке $p \in D$ максимум.

Из этого принципа максимального модуля сразу следуют что:

Следствие 1. Решение задачи дирихле системы (I) единственное.

Следствие 2. Решение задачи дирихле системы (I) непрерывно зависит от граничных данных для произвольной ограниченной области D .

Следствие 3. Если последовательность непрерывных на некоторой замкнутой ограниченной области и всюду удовлетворяющих систему (I) внутри этой области решений равномерно сходится на границе области, то она также равномерно сходится на всей рассматриваемой области.

На конец построим пример, который показывает, что если матрица $C(x_1, \dots, x_n)$ положительно определённая форма, то принцип максимального модуля системы (I) может быть и не верен.