

乘积空间稳定性与微分方程组临界情形(Ⅱ)*

朱思铭

(数学力学系)

本文继续^[1]的工作,应用乘积空间稳定性理论给出驻定方程组第二临界情形及周期系数方程组第一、第二临界情形的 Ляпунов 定理一个新证明。由此表明, Ляпунов 运用深邃的 V-函数理论^[2]所解决的稳定性问题,均可用简捷的乘积空间方法直接证明它。与此同时,我们还可以进一步运用所得的结果直接判断具多重零根及多对纯虚根的临界情形的稳定性,得到包含〔4〕~〔10〕的一系列结果。本文还改进推广了 Дыхман 定理^[3]。

1. 首先,将 Ляпунов 辅助定理 (〔2〕стр. 108) 及乘积空间稳定性定理 (〔1〕定理 2) 推广到变系数的情形。

引理. 给定一组偏微分方程

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} \left[Q(\theta)z + Z(u; z; \theta) \right]_j + \frac{\partial u}{\partial \theta} = P(\theta)u + U(u; z; \theta) \quad (1.1)$$

其中 $Q(\theta)$ 、 $P(\theta)$ 各为 n 、 γ 阶矩阵, z 、 Z 为 n 维向量; u 、 U 为 γ 维向量; $[z]_j$ 表向量 z 的第 j 个分量, 且 Z 、 U 是 u 、 z 的正则函数, 其展式系数及矩阵 $Q(\theta)$ 、 $P(\theta)$ 均为 θ 的有界连续函数, 同时

$$\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z \quad \text{是特征指数常正的正则组 (〔2〕стр. 38),}$$

$$\frac{du}{d\theta} = P(\theta)u \quad \text{是特征指数为 0 的正则组,}$$

$$\begin{aligned} Z(u; z; \theta) &= [u; z]_2 & U(u; 0; \theta) &= [u]_2 \\ U(0; z; \theta) &= [z]_N & N &\geq 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

在上述的假定下, 方程组 (1.1) 存在正则积分

* 文〔1〕及本文曾在中山大学第五次科学报告会报告过。作者在写作过程中得到导师胡金昌、许淞庆教授的热情指导, 并曾与叶思沅、刘钧沛同学共同讨论。在此表示衷心感谢。

$$u = u(z, \theta) = [z]_N \quad (1.3)$$

其展式項係數為 θ 的有界連續函數。

証。取 $\gamma + n$ 階常微分方程組

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = P(\theta)u + U(u, z, \theta) & \gamma \text{ 階} \quad (a) \\ \frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z + Z(u, z, \theta) & n \text{ 階} \quad (b) \end{cases} \quad (1.4)$$

依 ЛЯПУНОВ 展開定理 ([2] СТР. 87) 方程組 (1.4) 有對 n 維任意常向量 c 為正則的解

$$\begin{cases} u = u^*(c, \theta) = [c]_N & (a) \\ z = z^*(c, \theta) = [c]_1 & (b) \end{cases} \quad (1.5)$$

由解的結構，易知 (1.5b) 展式的綫性項即為 (1.4b) 的首次近似綫性方程組

$$\frac{dz^{(1)}}{d\theta} = Q(\theta)z^{(1)}$$

的通解，於是 $\left. \frac{\partial z}{\partial c} \right|_{c=0} \neq 0$ 。據隱函數定理，可解出 (1.5b)

$$c = c(z, \theta) = [z]_1$$

代入 (1.5a) 得 (1.4) 的解

$$u = u(z, \theta) = [z]_N \quad (1.6)$$

由 $\frac{du}{d\theta} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{dz_j}{d\theta}$ 知 (1.6) 為方程組 (1.1) 的正則積分。

現再証，(1.6) 的展式項的係數是 θ 的有界連續函數。不失一般性，我們先依據 Perron 定理 ([3] СТР. 131)，利用非奇異有界連續實綫性變換 (ЛЯПУНОВ 變換) 分別將矩陣 $P(\theta)$ 、 $Q(\theta)$ 化為三角形矩陣

$$\begin{pmatrix} p_{11}(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ p_{r1}(\theta) & \cdots & \cdots & p_{rr}(\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_{11}(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ q_{n1}(\theta) & \cdots & \cdots & q_{nn}(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

其中 $p_{sj}(\theta)$ 、 $q_{sj}(\theta)$ 仍是 θ 的有界連續實函數。

令相應的解 (1.6) 為

$$u_s(z; \theta) = \sum_{m \geq N} u_s^{(m)}(z_1, \cdots, z_n) \quad s = 1, \cdots, r \quad (1.8)$$

其中 $u_s^{(m)}$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 m 次型。

$$u_s^{(m)}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\sum m_j = m} A_s^{(m_1 \dots m_n)}(\theta) z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \quad s=1, \dots, r \quad (1.9)$$

将(1.8)代入变换后的方程组(1.1)比较同次型, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial \theta} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial z_j} (q_{j1} z_j + \dots + q_{jj} z_j) &= p_{s1} u_1^{(m)} + \dots + p_{ss} u_s^{(m)} + \\ &+ U_s^{(m)}(u_1^{(N)}, \dots, u_r^{(N)}; \dots; u_1^{(m-1)}, \dots, u_r^{(m-1)}; \theta) \quad s=1, \dots, r \quad (1.10) \end{aligned}$$

且显然 $U_s^{(N)} = [U^{(N)}(0; z; \theta)]_s$, 这里 $U(0, z, \theta) = \sum_{m \geq N} U^{(m)}(0, z, \theta)$, $U^{(m)}$ 为 $z_1, \dots, z_n$ 的 m 次型。

依 s 的增序求 $u_s^{(m)}$, 并将(1.9)代入(1.10)比较系数求 $A_s^{(m_1 \dots m_n)}$, 只要其上标按

$$\begin{aligned} &(0, \dots, 0, m), \quad (0, \dots, 0, 1, m-1); \quad (0, \dots, 0, 2, m-2), \dots, \\ &(0, \dots, 0, m, 0); \quad (0, \dots, 0, 1, 0, m-1), \quad (0, \dots, 0, 1, 1, m-2), \dots, \\ &(0, \dots, 0, 1, m-1, 0), \dots, (m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

的顺序计算, 则对每一个系数 $A_s^{(m_1 \dots m_n)}$ 可得

$$\frac{dA_s^{(m_1 \dots m_n)}}{d\theta} = (p_{ss} - m_1 q_{11} - \dots - m_n q_{nn}) A_s^{(m_1 \dots m_n)} + B_s^{(m_1 \dots m_n)}(\theta) \quad (1.11)$$

这里 $B_s^{(m_1 \dots m_n)}$ 是已算出的系数的线性函数, 其系数连续有界。若已算出的系数是 θ

的有界连续函数, 则 $B_s^{(m_1 \dots m_n)}$ 也是 θ 的有界连续函数, 即有

$$|B_s^{(m_1 \dots m_n)}(\theta)| < C_s^{(m_1 \dots m_n)} = \text{const} \quad \text{对任 } \theta > 0 \quad (1.12)$$

因方程(1.11)有特解

$$\begin{aligned} A_s^{(m_1 \dots m_n)} &= \\ &= e^{\int_0^\theta (p_{ss} - m_1 q_{11} - \dots - m_n q_{nn}) d\theta} \int_0^\theta e^{-\int_0^\theta (p_{ss} - m_1 q_{11} - \dots - m_n q_{nn}) d\theta} B_s^{(m_1 \dots m_n)}(\theta) d\theta \quad (1.13) \end{aligned}$$

而由正规组及三角阵的性质, 知对(1.7) $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta p_{ss}(\theta) d\theta$,

$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta q_{ss}(\theta) d\theta$ 存在且即为相应的特征指数, 于是, 由假设

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_0^\theta (p_{ss} - m_1 q_{11} - \dots - m_n q_{nn}) d\theta = 2d_s^{(m_1 \dots m_n)} > 0 \quad (1.14)$$

依(1.12)(1.14)知解(1.13)得对足够大的 θ :

$$\begin{aligned} |A_s^{(m_1 \cdots m_n)}(\theta)| &< \\ &< e^{\int_0^\theta (p_{ss} - m_1 q_{11} \cdots - m_n q_{nn}) d\theta} \int_\theta^\infty e^{-\int_0^\theta (p_{ss} - m_1 q_{11} \cdots - m_n q_{nn}) d\theta} C_s^{(m_1 \cdots m_n)} d\theta \\ &< \frac{C_s^{(m_1 \cdots m_n)}}{d_s^{(m_1 \cdots m_n)}} \end{aligned}$$

故此 $A_s^{(m_1 \cdots m_n)}(\theta)$ 亦为 θ 的有界連續函数。

再因 $\sum m_j = N$ 时 $B_s^{(m_1 \cdots m_n)}(\theta)$ 为(1.2)向量 $U(0, z, \theta)$ 的第 s 个分量对 $z_1, \dots, z_n$ 展式的 N 次型系数, 即为 θ 的有界連續函数。由数学归纳法, 知解(1.6)展式的系数均是 θ 的有界連續函数。再由Ляпунов变换的性质, 便证明了正则积分(1.3)的展式项的系数为 θ 的有界連續函数。引理得证。

推論. 若 u, U 是 $r \times p$ 維矩陣, 則定理1仍成立。

事实上, 只要取矩陣 U 的每一行作方程組(1.4)求解, 求得(1.6)型的 p 組解, 合成得 $r \times p$ 維解陣 u , 此即为(1.1)的正則积分(1.3)。

定理1. 考虑微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\theta} = Y(y, z, \theta) & p \text{ 阶} \\ \frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z + Z(y, z, \theta) & q \text{ 阶} \end{cases} \quad (1.15)$$

其中 $\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z$ 是其特征指数均大于0的正規組, 而 Y, Z 在域 $\Omega(A) \times I_0$ 連續 ($I_0 \equiv [\theta_0, +\infty)$), 对 y, z 适合Lipschitz条件, 又

$$Y(0, 0, \theta) = Z(0, 0, \theta) = 0$$

且当 $\|y\| + \|z\| \rightarrow 0$ 时对任 $\theta \in I_0$ 一致有

$$\|Z(y, z, \theta)\| = o(\|y\| + \|z\|)$$

若对 p 阶方程組 (1.15^a), Oy 为拟稳定、拟条件稳定、拟渐近稳定、拟条件渐近稳定或拟不稳定, 則对全方程組(1.12), O 有相应的稳定状态。

只要注意到在所假设的条件下, 方程組 $\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z$ 的基解陣 $X(\theta)$ 适合条件

$$\|X(\theta)\| < B_1 e^{-r\theta} \quad \|X^{-1}(\theta)\| < B_2 e^{r\theta} \quad (\text{任何 } \theta \geq 0)$$

其中 B_1, B_2, r 为正实数。于是方程組(1.12^a)的解

$$z(\theta) = X(\theta)z(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} X(\theta)X^{-1}(u)Z(y(u), z(u), u)du$$

有估值

$$\|z(\theta)\| \leq n B_1 e^{-r\theta} \|z(\theta_0)\| + \int_{\theta_0}^{\theta} n^2 B_1 B_2 e^{-r(\theta-u)} \|Z(y(u), z(u); u)\| du$$

显然, (1) 定理 2 的证明过程全部有效。

2. 现在, 在方程组右端正则但非驻定的条件下, 求出乘积空间稳定性理论的更精致的结果, 利用这些结果便可以直接判断驻定方程组和周期系数方程组的各种临界情形。

首先, 改进、推广 ДИХМАН 定理

定理 2. 对右端正则微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\theta} = F(y, \theta) + Y(y, z, \theta) & P \text{ 阶} & (a) \\ \frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z + Z(y, z, \theta) & q \text{ 阶} & (b) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 F 、 Y 、 Z 对 y 、 z 的展式系数及矩阵 $Q(\theta)$ 均为 θ 的有界连续函数, 且¹⁾

$$\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z \text{ 为特征指数均大于 } 0 \text{ 的正规组}$$

$$F(y, \theta) = [y]_s \quad s \geq 1$$

$$Y(y; z; \theta) = \sum_{m \geq m_0} Y^{(m)}(z, \theta) y^{[m]}$$

$$Y^{(m)}(z; \theta) = [z]_{T_m} \quad m_0 \geq 0 \quad T_m \geq 1$$

$$Z(y; 0; \theta) = [y]_{K_1} \quad Z(0; z; \theta) = [z]_{K_2} \quad K_1 \geq 2, \quad K_2 \geq 2$$

若方程组

$$\frac{dy}{d\theta} = F(y; \theta) \quad (2.2)$$

的零解为不依赖于 N 次项稳定、渐近稳定、条件稳定、条件渐近稳定或不稳定²⁾, 则对方程组 (2.1a), Oy 有相应的拟稳定性态。因而, 依据定理 1 对方程组 (2.1), O 有相应的稳定性态。这里

$$N < K_1 + \min_{m=1}^{m_0} \left\{ m \right\} \quad (2.3)$$

証. 作正则变换

$$z \longrightarrow \bar{z} \quad \bar{y} = y - u^{(m)}(z, \theta) y^{[m]} \quad (2.4)$$

1) 当 $s=1$ 且 $m_0=0$ 时尚须加设组 (2.2) 的首次近似线性方程组是特征指数等于 0 的正规组。

2) 参见 [10] 页 374. 虽该书中没有“零解称为不依赖于高于 N 次的项是渐近稳定、条件稳定或条件渐近稳定”的定义, 但它们的意义异常明显。

其中 $p \times C_m^{m+p-1}$ 維矩陣 $u^{(m)}$ 對 z 正則, 其展式次數 ≥ 1 , 且係數連續有界。

因 $\left. \frac{\partial(z, \bar{y})}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1$ 故得 (2.4) 的逆變換

$$z \longrightarrow z \quad y = \bar{y} - v(\bar{y}, z, \theta)$$

存在, 且 $v = [\bar{y}]_m = [z]_1$, v 對 $\bar{y}, z$ 展式的係數仍有界連續 (否則, 與 (2.4) 有界性矛盾)。

將正則變換 (2.3) 代入 (2.1a), 求得

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{d\theta} &= F(\bar{y} + u^{(m)}y[m], \theta) + Y(\bar{y} + u^{(m)}y[m]; z; \theta) - \\ &\quad - u^{(m)} \frac{\partial y[m]}{\partial y} \left[F(\bar{y} + u^{(m)}y[m]; \theta) + Y(\bar{y} + u^{(m)}y[m]; z; \theta) \right] - \\ &\quad - \sum_{j=1}^q \frac{\partial u^{(m)}}{\partial z_j} \left[Q(\theta)z + Z(\bar{y} + u^{(m)}y[m]; z; \theta) \right]_j y^{[m]} - \\ &\quad - \frac{\partial u^{(m)}}{\partial \theta} y[m] \end{aligned} \quad (2.5)$$

現通過一系列 (2.3) 型正則變換, 使 (2.1a) 右端的 $Y(y, z, \theta)$ 均含對 y 高於 N 次的項, 即逐步令 $Y^{(m)}(z, \theta) \equiv 0 \quad m_0 \leq m \leq N$, 使 $Y(y, z, \theta) = [y]_{N+1}$

當 $m_0 = 0$ 時, 令 (2.4) 式的 $m = 0$, 即取變換 $z \longrightarrow z, \bar{y} = y - u^{(0)}(z, \theta)$ 由 (2.5) 式可知, 要使變換後的 $Y^{(0)}(z, \theta) \equiv 0$, 必須令 $u^{(0)}$ 適合方程組

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z_j} [Q(\theta)z + Z(u^{(0)}; z; \theta)]_j + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta} &= \\ &= F(u^{(0)}, \theta) + Y(u^{(0)}, z, \theta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

據引理知可解出 $u^{(0)} = u^{(0)}(z, \theta) = [z]_{T_0}$ 且其展式係數有界連續。

如已使 $Y^{(0)}(z, \theta) \equiv 0$ 即變換後的新方程組中 $m_0 \geq 1$ (為簡便計, 我們仍記 $\bar{y}$ 為 y , 即新方程仍寫為 (2.1) 式)。若 $m_0 = 1$, 現再取 $m = 1$ 的正則變換 (2.4), 使變換後的 $Y^{(1)}(z, \theta) \equiv 0$, 故必須使 $u^{(1)}$ 滿足

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z_j} [Q(\theta)z + Z(0, z, \theta)]_j + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \theta} &= \\ &= Y^{(1)}(z, \theta) - u^{(1)}Y^{(1)}(z, \theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

依引理的推論, $u^{(1)} = u^{(1)}(z, \theta)$ 存在且 $u^{(1)} = [z]_{T_1}$ 展式係數連續有界。

若已有 $Y^{(n)}(z, \theta) \equiv 0 \quad (n = 0, 1, \dots, m-1 \quad m \geq 2)$

要使 $Y^{(m)}(z, \theta) \equiv 0$ 应取适合下方程组的正则变换 (2.4) -

$$\sum_{j=1}^q \frac{\partial u^{(m)}}{\partial z_j} [Q(\theta)z + Z(0; z, \theta)]_j + \frac{\partial u^{(m)}}{\partial \theta} = Y^{(m)}(z, \theta) \quad (2.8)$$

而 (2.8) 的解 $u^{(m)} = u^{(m)}(z, \theta)$ 存在且 $u^{(m)} = [z]_{T_m}$, 其展式项系数为 θ 的有界连续函数

这样, 经过 $m = m_0, m_0 + 1, \dots, N$ 的正则变换 (2.4) 可使方程组 (2.1) 中 $m_0 > N$, 其余性质不变。

于是, 方程组 (2.1a) 变为

$$-\frac{dy}{d\theta} = F(y, \theta) + \sum_{m \geq N} Y^{(m)}(z, \theta) y^{[m]} \quad (2.1a)'$$

显然, 若方程组 $-\frac{dy}{d\theta} = F(y, \theta)$ 的零解为不依赖于高于 N 次项的稳定、渐近稳定、条件稳定、条件渐近稳定或不稳定, 则方程组 (2.1a) 有相应的 O 拟稳定性态, 于是全方程组 (2.1) 亦有同样的 O 稳定性态。

尚需证明, 经正则变换 (2.4) 后, 并不改变 (2.1a) 中 $F(y, \theta)$ 的对 y 不高于 N 次的项。事实上, 对变换 (2.4), 有解 $u^{(m)} = [z]_{T_m}$, 当 $T_m > 1$ 时, 由 (2.5) 可看出, 新变换完全不改变 (2.1a) 右端 $F(y, \theta)$ 的各项, 当 $T_m = 1$ 时, 因 $\frac{\partial u^{(m)}}{\partial z_j}$ 中存在不含 z 的项, 由 (2.5) 知, 此时变换仅影响到 y 的不低于 $K_1 + m$ 次的项。于是, 只要 (2.3) 式成立, 则变换 $m = m_0, m_0 + 1, \dots, N$ 不会影响到 y 的不高于 N 次的项。定理得证。

我们再考虑特殊形状的文件组

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\theta} = Y(y, z, \theta) & p \text{ 阶} & (a) \\ \frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z + Z(y, z, \theta) & q \text{ 阶} & (b) \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 Y, Z 在域 $\mathcal{D}(A) \times I_0$ 对 y, z 正则, 展式幂次 ≥ 2 且其系数为 θ 的有界连续函数, 同时

$$Y(y, 0, \theta) = 0 \quad Z(y, 0, \theta) = 0$$

而方程组

$$\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z$$

是特征指数均大于 0 的正规组。

定理3. 在上述的假定下, 方程組(2.9)对0稳定, 且当 $\theta \rightarrow +\infty$ 时, 解 $y(\theta)$ 、 $z(\theta)$ 趋于組(2.9)的某特解 $y=c$ 、 $z=0$ (c 为 p 維常向量、 0 为 q 維零向量).

事实上, 在所假設的条件下, 方程組 $\frac{dz}{d\theta} = Q(\theta)z$ 的基解陣 $X(\theta)$ 有如下估值

$$\|X(\theta)\| < B_1 e^{-\gamma\theta} \quad \|X^{-1}(\theta)\| < B_2 e^{\gamma\theta} \quad (\text{任何 } \theta \geq 0)$$

这里 B_1 、 B_2 、 γ 为正实数. 于是, 可同样証得^[1]的不等式(7).

3. 现考虑駐定运动的第二临界情形. 若扰动运动方程組的首次近似綫性方程組中仅有一对純虛根、其余特征根均具負实部. 則如所周知, 可經正則变换化为兩类型方程組 ([2]стр. 120)

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = rR(r, z, \theta) & 1 \text{ 阶} & (a) \\ \frac{dz}{d\theta} = Qz + Z(r, z, \theta) & n \text{ 阶} & (b) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 Q 为具負实部特征根的 n 阶常陣, rR 、 Z 对 r 、 z 正則, 其展式次数 ≥ 2 , 且系数为 θ 的 (2π) 周期函数.

(一) “一般情形”

$$\begin{cases} rR(r, 0, \theta) = gr^m + [r]_{m+1} & g = \text{const} \neq 0 \\ Z(r, 0, \theta) = [r]_m \end{cases} \quad (3.2)$$

(二) “特殊情形”

$$\begin{cases} rR(r, 0, \theta) \equiv 0 \\ Z(r, 0, \theta) \equiv 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

容易看出, 其“一般情形”及“特殊情形”刚好分別为(2.1)及(2.9)型的方程組. 于是, 应用定理2及定理3立即得到第二临界情形的Ляпунов的結果.

4. 在周期运动情形, 依据Ляпунов的研究^[2], 可以利用周期系数的非奇異綫性变换將扰动运动方程組的綫性部分化为常系数, 其高次項系数仍为周期函数. 而对特征方程中有一个模等于1或两个模为1的根而其余根的模均小于1的第一或第二临界情形, 可再經适当的正則变换化为(2.1)或(2.9)型的方程組(此时 Q 为常数矩陣). 于是, 应用定理2及定理3, 立即可以得到相应的Ляпунов定理.

为避免积分首次近似方程組的困难, Ш.С. Нугманова 曾用取周期平均值的方法代替Ляпунов方法. Калинин 更用此方法研究周期运动临界情形^{[4]~[7]},

但他所用的基本工具仍然是Ляпунов的 V_- 函数理论。其实,他通过繁杂的论证所得到的一切结论完全可以直接应用定理 2 得到。如他在 [4][5] 所研究的一零根情形的周期运动

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (g + \epsilon G) x^m + X \\ \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s=1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 g 是不为 0 的常数; $p_{sv} = c_{sv} + \epsilon f_{sv}(t)$ $c_{sv} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p_{sv}(t) dt$, G, f_{sv} 均是 t 的 ω 周期函数; 且特征方程 $\|c_{sv} - \delta_{sv} \lambda\| = 0$ 的根均具负实部, 而 X, X_s 是 $x, x_1, \dots, x_n$ 的正则函数, 展式项系数为 t 的 ω 周期函数, 且其展式中仅含 x 的项的幂次 $> m$ 、其余项幂次 ≥ 2 。

他应用 V_- 函数方法, 得到未被扰动运动当 m 为偶数时为不稳定; m 为奇数而 $g < 0$ 时稳定、 $g > 0$ 时不稳定。

实际上, 由 c_{sv} 的条件易知, 只要取 ϵ 足够小, 则周期阵 (p_{sv}) 的特征指数均大于 0 [11], 再因周期组必为正规组, 应用定理 2 立即得到方程组 (4.1) 的稳定性态由方程

$$\frac{dx}{dt} = (g + \epsilon G) x^m$$

的稳定性态所决定, 而 G 有界, 只要取 ϵ 适当小, 便轻易地得到所需要的结果¹⁾。

Калинин 在 [6][7] 进一步研究的特征方程有一对纯虚根及两个零根的临界情形亦可同样处理。

5. 由文 [1] 及前面讨论的结果可以看出, 对于Ляпунов所研究过的驻定及周期运动的各种临界情形, 我们可以不利用 V_- 函数而直接得到同样的结果。而且还可以直接判断具多重零根及多重纯虚根的临界情形。在这里我们再考察Малкин [8]~[10] 曾详细研究过的各种临界情形。

驻定运动方程组中, 首次近似特征方程有两个简单初级因子的零根及 n 个负实部根的临界情形, 可化为下列形状的文件组。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Y^{(m)}(x, y) + X(x, y, z) & 1 \text{ 阶} & (a) \\ \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y) + Y(x, y, z) & 1 \text{ 阶} & (b) \\ \frac{dz}{dt} = Qz + Z(x, y, z) & n \text{ 阶} & (c) \end{cases} \quad (5.1)$$

1) 依据我们的结果, 当 m 为偶数时, 未被扰动运动应是条件渐近稳定, 而用 V_- 函数仅能得到不稳定。

其中 Q 为 n 阶常陣, 特征根具負实部, $X^{(m)}$ 、 $Y^{(m)}$ 为 x, y 的 m 次型 ($m \geq 2$), X, Y 及 Z 对 x, y, z 正則, 其展式次数 ≥ 2 , 且

$$\begin{aligned} X(x, y; z) &= [x, y]_{m+1} & Y(x, y; z) &= [x, y]_{m+1} \\ Z(x, y; 0) &= [x, y]_m \end{aligned}$$

我們首先研究方程組

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x, y) + \varphi_{m+1}(x, y) & (a) \\ \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y) + \psi_{m+1}(x, y) & (b) \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 φ_{m+1} 、 ψ_{m+1} 是 x, y 的正則函数, 展式項幕次不低于 m 次。

考察两个 $m+1$ 次型

$$\begin{cases} P(x, y) = xX^{(m)}(x, y) + yY^{(m)}(x, y) \\ Q(x, y) = xY^{(m)}(x, y) - yX^{(m)}(x, y) \end{cases} \quad (5.3)$$

令 $m+1$ 次齐次方程

$$Q(x, y) = 0 \quad (5.4)$$

的实根为 (x^0, y^0) (其个数必不超过 $m+1$)。

依据定性理論的研究^[12], 我們知道:

当 (5.4) 的实根 (x^0, y^0) 存在时必有且仅有有限多或无限多軌綫趋于或离开原点 (視 $P(x^0, y^0) < 0$ 或 > 0 而定),

当 (x^0, y^0) 不存在且

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)} d\theta \neq 0 \quad (5.5)$$

时, 軌綫螺旋趋于或离开原点 (視 $\lambda G < 0$ 或 > 0 而定),

其余情况則須考察高于 m 次的項才能决定。

于是我們在方程 (5.1a)、(5.1b) 中只要令 $\|z\| < \varepsilon$ 适当小, 便可化为方程組 (5.2) 而得到与上述相应的不依賴高于 m 次的稳定性态及拟稳定性态的結論。

依据定理 2 有

1° 当 (x^0, y^0) 存在且恒有 $P(x^0, y^0) < 0$ 时未被扰动运动为漸近稳定。

2° 当 (x^0, y^0) 存在且恒有 $P(x^0, y^0) < 0$ 时未被扰动运动为不稳定。

3° 当 (x^0, y^0) 存在且既有 $P(x^0, y^0) < 0$, 亦有 $P(x^0, y^0) > 0$ 时未被扰动运动为条件漸近稳定。

4° 当 (x^0, y^0) 不存在且 (5.5) 式成立时, 若 $\lambda G < 0$ 則未被扰动运动为漸近稳定, 若 $\lambda G > 0$ 則为不稳定。

5° 其余的情形须考虑高于 m 次的项才能决定其稳定性态。

这样,便重新得到了Малкин[8][10]用 V -函数理论才能得到的结论。

因具两对纯虚根及一零根一对纯虚根的驻定运动或周期运动临界情形均可经过适当变换化为(5.1)型的方程组[9][10],故可同样处理。

对具两零根但对应的初级因子非简单的临界情形,Каменков[13]曾作了详尽的研究,可惜无法找到原文,未能予以对比。

参 考 文 献

- [1] 朱思铭 乘积空间稳定性与微分方程组临界情形 (I) 中大学学报 1962, 第4期
- [2] Ляпунов. А.М. Собрание сочинений, том II, М.-Л., 1956.
- [3] 1. Lefschetz S. Differential Equations: Geometric Theory, London, 1957.
2. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений И.-Л., 1961.
- [4] Калинин С.В. Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю, ПММ, т.12, вып. 5, 1948.
- [5] Калинин С.В. Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю, ПММ, т.13, вып. 3, 1949.
- [6] Калинин С.В. Об устойчивости периодических движений в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет одну пару чисто мнимых корней (упрощенные метод), ПММ, т.21, 1937.
- [7] Калинин С.В. Об устойчивости периодических движений в случае двух нулевых корней ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
- [8] Малкин И.Г. Некоторые вопросы теорий устойчивости движения в смысле Ляпунова, Сб. Трудов Казанского авиац. ин-та, вып. 7, 1937.
- [9] Малкин И.Г. Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения, ПММ, т.15, вып. 5, 1951.
- [10] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
- [11] Малкин И.Г. О характеристическим числам линейных дифференциальных уравнений, ПММ, т. 16, 1952.
- [12] 秦元熏 微分方程所定义的积分曲线 (上册) 科学出版社, 1959.
- [13] Каменков Г.В. Об устойчивости движения, Сб. Трудов Казанского авиац. ин-та, вып. 9, 1939.