

关于右导数的一点注記

馬 麟 浚

在学习欣欽的“公用事业理論的数学方法”一书的第一部分时,我們发现其中的导数实际上應該是右导数。在該书 § 10 巴尔姆公式的一节中更牵涉到右导数的积分問題。为此我們对于初等微积分的内容作了一些如下的补充。

引理 1 若 $f(x)$ 連續于 $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, 且于 $[a, b)$ 上右导数 $f'_+(x)$ 存在, 則必存在 $x_1, x_2 \in [a, b)$ 使

$$f'_+(x_1) \geq 0; f'_+(x_2) \leq 0.$$

〔証明〕 由 $f(x)$ 的連續性和 $f(a) = f(b)$, 可知 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上达到最小值与最大值, 分別令它們为 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$, $x_1, x_2 \in [a, b)$. 此时不难看出成立着

$$f'_+(x_1) \geq 0; f'_+(x_2) \leq 0.$$

引理 2 若 $f(x)$ 連續于 $[a, b]$, m, M 为常数而

$$m \leq f'_+(x) \leq M \quad \text{当 } x \in [a, b)$$

則有

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

〔証明〕 引入函数:

$$F(x) = f(x) - [f(b) - f(a)] \frac{x - a}{b - a}$$

不难驗明 $F(x)$ 滿足引理 1 之要求从而有 $x_1, x_2 \in [a, b)$ 使

$$f'_+(x_1) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

及

$$f'_+(x_2) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

于是便得

$$m \leq f'_+(x_2) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_+(x_1) \leq M.$$

定理 若 $f(x)$ 連續于 $[a, b]$, $f'_+(x)$ 存在且可积于 $[a, b)$ 則有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'_+(t) dt. \quad x \in [a, b].$$

因此, 当 $x \in [a, b]$ 且 x 为 $f'_+(t)$ 之連續点时, $f'(x)$ 存在。

[証明] 对 $[a, x]$ $x \in [a, b]$, 考虑任意的破分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x.$$

令 M_i, m_i 分别表示 $f'_+(x)$ 于 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的上、下确界。由引理 2 知

$$m_i \leq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \leq M_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \leq f(x) - f(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

由 $f'_+(x)$ 之可积性得

$$\int_a^x f'_+(t) dt \leq f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'_+(t) dt.$$

即

$$\int_a^x f'_+(t) dt = f(x) - f(a).$$

定理証毕。

仿此, 还可得到与通常微积分中許多类似結果, 这里不拟詳述了。

SOME REMARKS ON RIGHT-HAND DERIVATIVES

Ma Lin-tsun

ABSTRACT

If $f(x)$ is Continuous in $[a, b]$ and has a Riemann integrable right-hand derivative $f'_+(x)$ in $[a, b]$, then

$$\int_a^b f'_+(t) dt = f(b) - f(a)$$

It follows that if $x \in [a, b]$ is a point of continuity of $f'_+(t)$, then $f'(x)$ exists.