

条件独立級数的收斂性

戴永隆

(数学力学系)

条件独立是独立性的推广, 在〔2〕中对于条件独立的性质有所研究, 在〔1〕中也谈到条件独立的概念。这篇短文指出, 概率論中一些古典結果如零一律、三級数定理、大数定律等可以推广到条件独立的情形, 而把原来独立級数的情形作为一个特例来处理。

1. 設 (Ω, F, P) 为基本概率空間, F_0 为 F 的子 σ 代数, F_1, F_2 为包含于 F 內的子集类。若对任意 $A \in F_1, B \in F_2$, 成立

$$E(X_A X_B | F_0) = E(X_A | F_0) E(X_B | F_0) \quad a.e \quad (1)$$

則称 F_1, F_2 对 F_0 条件独立。記作 $F_1, F_2 c.i. | F_0$ 。

設 ξ_1, ξ_2 是 (Ω, F, P) 上之随机变量, $\sigma(\xi_1); \sigma(\xi_2)$ 分別为一切形如 $\{\xi_1 \in M\}, \{\xi_2 \in M\}$ 的集所产生的 σ 代数, 其中 M 为一維波雷尔集, 若 $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2) c.i. | F_0$, 則称 ξ_1, ξ_2 对 F_0 条件独立, 記作 $\xi_1, \xi_2 c.i. | F_0$ 。

根据上面的定义, 有穷多个随机变量称为对 F_0 条件独立, (記作 $\xi_1, \dots, \xi_n c.i. | F_0$) 是指对任意 $A_1 \in \sigma(\xi_1) \dots A_n \in \sigma(\xi_n)$ 成立

$$\begin{aligned} E(X_{A_1} \dots X_{A_n} | F_0) &= \\ &= E(X_{A_1} | F_0) \dots E(X_{A_n} | F_0) \quad a.e \end{aligned}$$

随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 称为对 F_0 整体条件独立, 如果这組变量任意有穷多个对 F_0 条件独立, 記作 $\{\xi_n, n=1, 2, \dots\} c.i. | F_0$ 。

2. 首先証明如下的基本定理。

定理 1: 設 $\{\xi_n, n=1, 2, \dots\} c.i. | F_0$,

$$f(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots) \quad (2)$$

为 Ω 到可数維实数空間 E_∞ 之映象, B_∞ 为可数維实数空間上之波雷尔集族。則存在 $\Omega \times B_\infty$ 上之函数 $P(\omega, A)$ 使

i) 对每一 $A \in B_\infty$ 有

$$P(\cdot, A) = p\{f^{-1}(A) | F_0\} \quad a.e \quad (3)$$

ii) 对每 $\omega \in \Omega, P(\omega, \cdot)$ 为 B_∞ 上之直积概率测度。

(証明) 仿照〔3〕中关于有限个随机变量存在广义条件概率分布的証明方法可以証明, 对于 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 存在 $P_1(\omega, A), \omega \in \Omega, A \in B_\infty$ 为 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 之广义条件概率分布并可参看〔1〕。下面証明, 对几乎所有 $\omega, P_1(\omega, A)$ 是直积概率测度。

設 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \in B_1$ (B_1 为一維波雷尔集系) 則 $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n$ 为 B_∞ 之柱集。(未

写出的坐标取为全空間, $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ 意味着最多第一, 第二, $\cdots$ 第 n 个坐标不为全空間。) 由广义条件概率分布与 f 的定义及 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的条件独立性有:

$$\begin{aligned} P_1(\omega, \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n) & \quad \alpha.e \\ &= P(\xi_1 \in \Gamma_1, \cdots, \xi_n \in \Gamma_n | F_0) \quad \alpha.e \\ &= P(\xi_1 \in \Gamma_1 | F_0) \cdots P(\xi_n \in \Gamma_n | F_0) \quad \alpha.e \\ &= P_1(\omega, \Gamma_1) \cdots P_1(\omega, \Gamma_n) \quad \alpha.e \end{aligned} \quad (4)$$

对于使 (4) 不成等式的 ω 集为一零测集。取 $\Gamma_i (i=1, \cdots, n)$ 为任意具有有理端点的区間, 令 N 为使 (4) 对所有这些柱集不成等式之 ω 集之并, 则 $P(N)=0$, 但 $\omega \in \mathcal{Q} \setminus N$ 时, (4) 式就对一切具有有理端点的区間組成的柱集成立等式, 于是就对一切 $\Gamma_i \in \mathcal{B}_1 (i=1, \cdots, n)$ 成立等式。(测度扩张定理。)

今令

$$P(\omega, A) = \begin{cases} P_1(\omega, A) & \text{当 } \omega \in N \\ \text{任意直积概率测度} & \text{当 } \omega \in N \end{cases}$$

则 $P(\omega, A)$ 满足定理条件。証完。

3. 根据上述定理, 每一个关于相互独立随机变量級数的定理就容易推广到条件独立的情形。例如,

定理 2 (零一律) 設 $\{\xi_n, n=1, 2, \cdots\} c.i. | F_0$, $S \in \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots)$ 对一切 n , 則

$$P(S | F_0) = 0 \text{ 或 } 1 \quad \alpha.e$$

証明 显然 S 可表为一个 $\mathcal{B}_\infty$ 中的“尾巴集” A 的反象, 由通常的零一律知道

$$P(\omega, A) = 0 \text{ 或 } 1 \quad \text{对每 } \omega \in \mathcal{Q}$$

由 (3) 即知

$$P(S | F_0) = 0 \text{ 或 } 1 \quad \alpha.e.$$

下面几个关于零一律的推論頗有意思。

推論 1 記 F_0^1 为 F_0 对 P 之完备化 (补充零测集。), 則 $S \in F_0^1$ 。

証明 令 $B = \{E(X_S | F_0) = 1\}$ 則 $B_1 \in F_0$, 由零一律知道

$$\begin{aligned} \int E(X_S | F_0) dp &= \int X_S dp = \\ &= \int_B X_S dp \end{aligned}$$

即 $P(B) = P(S) = P(SB)$ 。故 S 与 B 只差一零测集, 即 $S \in F_0^1$ 。

推論 2 在定理的条件下, 如对一切 n , f 是 $\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots)$ 可测函数, 則 f 必为 F_0^1 可测。

推論 3 設 $\{\xi_n, n=1, 2, \cdots\} c.i. | F_0$, 令 Λ 为使 $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ 收斂的集合, 則 $\Lambda \in F_0^1$ 。

这点由 Λ 是“尾巴事件”得出。

下面两个定理不再証明, 只是写出来, 因为証明可根据 (3) 及关于对应独立級数的定理可以作出。

設 F_0 为 F 的子 σ 代数, ξ 为随机变量, $D(\xi)$ 存在。取 $E((\xi - E(\xi | F_0))^2 | F_0)$ 的

固定版本, 记作 $D(\xi_1 | F_0)$, 并称之为条件方差。

定理 3 (三級数定理)

设 $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\} \subset F_0$, c 是正数, 令 $F_n = \{\omega: |\xi_n| < c\} (n = 1, 2, \dots)$

再令 $\Lambda = \left\{ \omega: \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \text{ 收敛} \right\}$

Λ_1 为使下面三級数同时收敛的集合

$$\text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(\chi_{F_n'} | F_0) \text{ 其中 } F_n' = \Omega - F_n.$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(\chi_{F_n} \xi_n | F_0)$$

$$\text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} D(\chi_{F_n} \xi_n | F_0)$$

则 $P(\Lambda) = P(\Lambda_1) = P(\Lambda \cap \Lambda_1)$

定理 4 (强大数定理)

设 $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\} \subset F_0$, 且存在 $E(\xi_1 | F_0)$ 一恒等于 0 的版本。

令 $\Lambda = \left\{ \omega: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D(\xi_n | F_0) < \infty \right\}$

$\Lambda_1 = \left\{ \omega: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \text{ 收敛于 } 0 \right\}$

则 $P(\Lambda) = P(\Lambda_1) = P(\Lambda \cap \Lambda_1)$

类似于独立级数的柯氏不等式, 波雷尔——坎特里引理照样可写出。这些定理可简单地利用定理 1 及独立级数所对应的定理推出。这些结果也可以直接用类似独立级数的证明方法导出, 而不利用定理 1。作者最初是用书(4)中第九章的方法来证明这些结果的, 而把独立级数的情形看作特例。上面这个简单的方法是郑曾同教授指出的, 指导这篇短文工作的尚有梁之舜老师, 一并致谢。(注)

参考文献

- [1] M. Loève Probability Theory
- [2] M. V. Johns. Tr and Ronald Pyke On conditional expectation and Quasi-rings Pacific of Math. vol. 9. No3. 1959.
- [3] J. Doob Stochastic Processes.
- [4] P. R. Halmos Measure Theory.

(注) 本文有些结果是作者与陈兆磐合写的毕业论文的一部分内容, 特此注明。