

τ 衰变振幅解析性

郭 碩 鴻

(物理系)

I. 引 言

τ 衰变的能谱和角分布是提供低能 $\pi-\pi$ 作用的实验材料之一。一些作者〔1〕—〔4〕曾经用色散关系处理这个问题，并且企图找出 $\pi-\pi$ 散射长度的一些数值。本文的目的是利用费曼图解来研究 τ 衰变振幅的解释性，从而确定振幅的表示式。结果表明，在一定的近似下，通常的单重色散关系表示式成立。最后并讨论了解色散关系所遇到的问题。

II. 运 动 学

令 k 表示 K 介子的动量， k_i 表示 π_i 的动量。衰变振幅为不变量

$$S_i = (k - k_i)^2 \quad (1)$$

的函数。令 π 介子的质量为单位质量， K 介子的质量为 m ， S_i 之间有如下关系

$$S_1 + S_2 + S_3 = m^2 + 3 \cong 15.8 \quad (2)$$

在衰变物理区中， S_i 最小值为 4，最大值为 $(m-1)^2 \cong 6.7$ 。最大对称点为

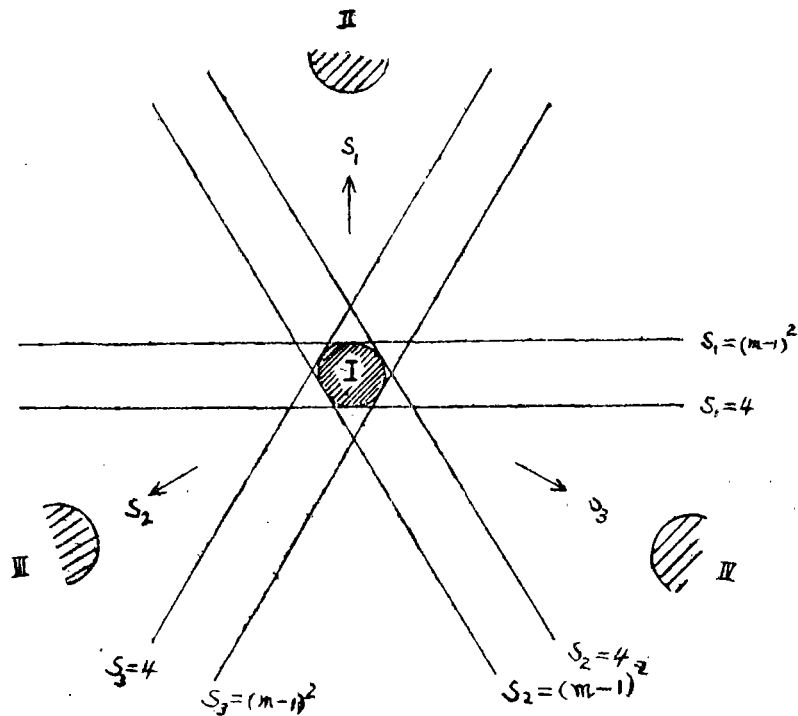
$$S_0 = \frac{1}{3} \sum_i S_i^2 \cong 5.3 \quad (3)$$

图 (I) 描绘了衰变物理区和三个碰撞过程 $\pi_i + k \rightarrow \pi_j + \pi_k$ 的物理区。

在 π_2, π_3 的质心坐标系中，令 P 为 π_2 的动量， P' 为 π_1 的动量， ω, ω' 为 π_2 和 π_1 的能量， θ 为 P, P' 的夹角， $\nu \equiv p^2$ ，有

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\omega^2 = 4(\nu + 1) \\ S_2 &= 2(1 + \omega\omega' + pp' \cos\theta) \\ S_3 &= 2(1 + \omega\omega' - pp' \cos\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

图 I

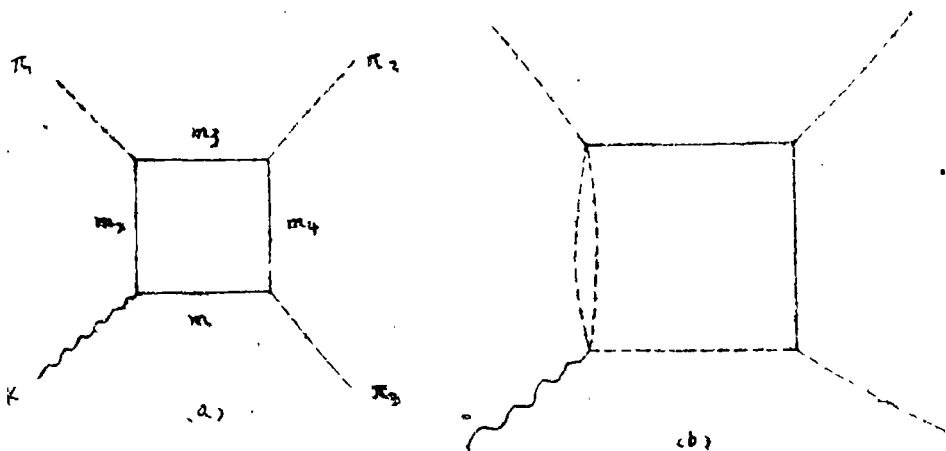


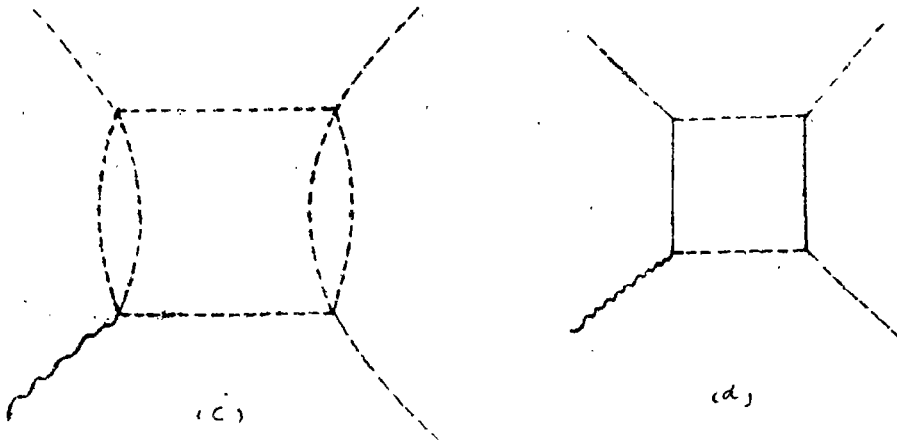
III. 四級微扰图形奇点

振幅的解析性质的主要特点往往可以从四级微扰图形的分析得到。下面我们分析 τ 衰变的一类四级微扰图。

图(II a)是一个典型的图形,其内线可以由 π 介子,核子和超子组成。假如与 K 介子线相邻的两条内线都不是单介子线,这种图形的解析性质就和稳定粒子碰撞振幅的解析

图 II





性质相同, 对这种图, 普通双重色散关系成立。所以, 为了探讨由于K介子的不稳定性所导致的特点, 只须考虑图(II b)所示的一类图形, 其中内线质量最低的是图(II c)。图(II c)和(II d)应对 π 衰变物理区内的振幅有特别重要的影响, 因此我们只讨论这类图形。

引入 y 变数(5)

$$y_{ik} = \left(m_i^2 + m_k^2 - p_{ik}^2 \right) / 2m_i m_k \quad (5)$$

其中 m_i, m_k 为内线质量, $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{41}$ 为外线动量,

$$p_{13} \equiv p_{12} + p_{23}, \quad p_{24} \equiv p_{23} + p_{34}.$$

令K介子的动量为 p_{12} , 则图形(II c)的特点是 y_{12} 可能 < -1 , 而 y_{23}, y_{34}, y_{41} 都 > 1 。为了不使计算过于复杂, 而同时保留主要的特点, 下面将令 $m_2 = m_4 (\geq 2)$, 即

$$y_{23} = y_{34} = y_{41} \equiv y$$

振幅中可能出现的奇点可以由一般方法求出。用文献(6)中的符号, 衰变振幅的奇点(其中有一些不在物理叶上)为

$$y_{13} = \pm 1, \quad y_{24} = \pm 1$$

$$y_{13} = y y_{12} \pm \sqrt{(y^2 - 1)(y_{12}^2 - 1)} \equiv \Delta(\pm), \quad y_{24} = \Delta(\pm) \quad (6)$$

$$y_{13} = \square_1(y_{24}), \square_2(y_{24}); \quad y_{24} = \square_1(y_{13}), \square_2(y_{13})$$

其中 $\square_1, \square_2$ 为

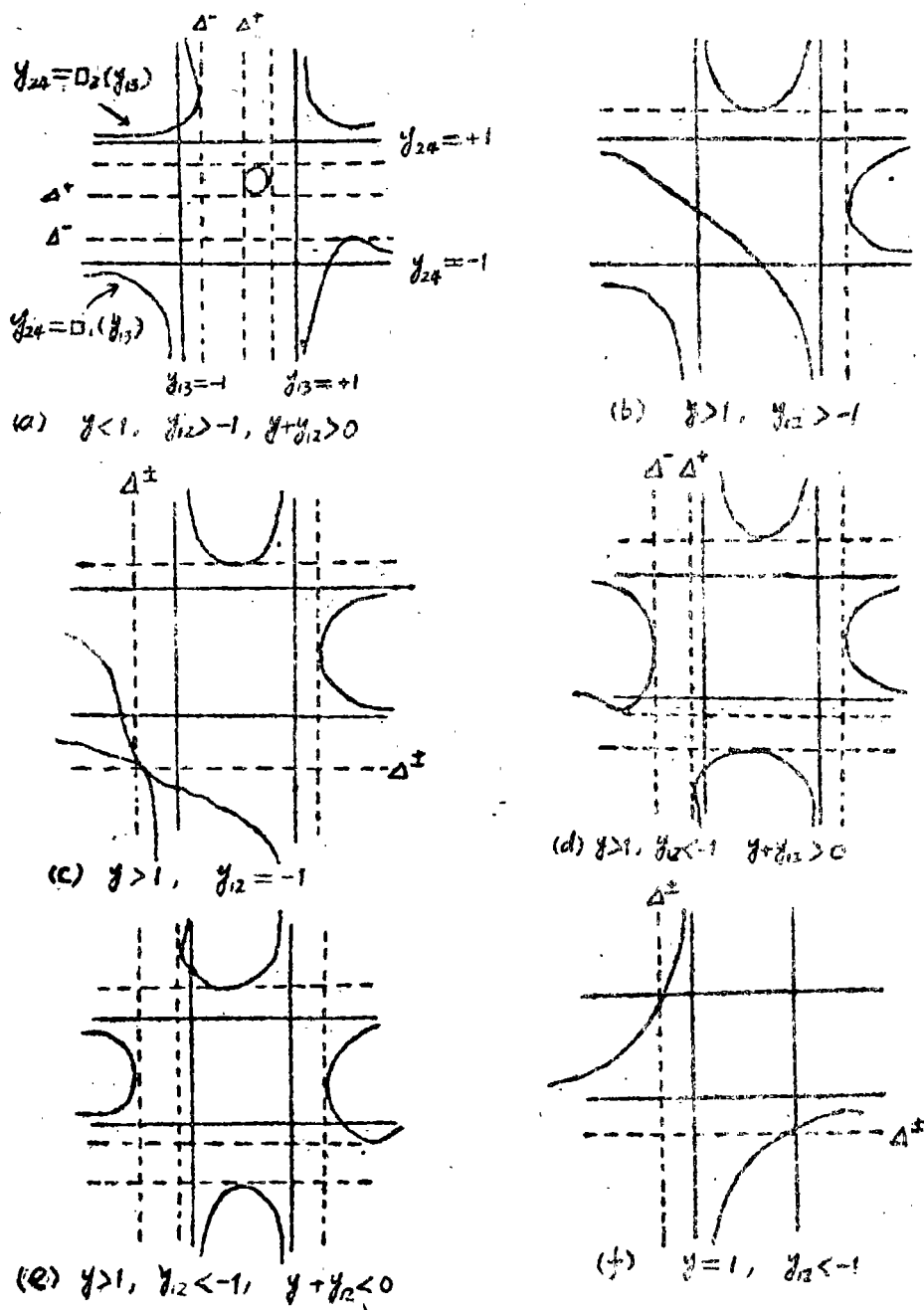
$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} & y \\ y_{12} & 1 & y & y_{24} \\ y_{13} & y & 1 & y \\ y & y_{24} & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

的根。图(III)表示几种情形下奇异曲线的位置。

因为 m_2 和 m_4 在 $2-\infty$ 区间内, 故 $1 < y < \infty$ 。最后求衰变振幅时, 要把图(II c)的貢

献对 m_2 和 m_4 积分。所以振幅的奇点的位置应由图 (III f) 所示 ($m_2 = m_4 = 2$)。但是在讨论振幅的解析性质时, 仍然要参考其它几个情形的奇点位置 (图 III b—3e)。

图 III



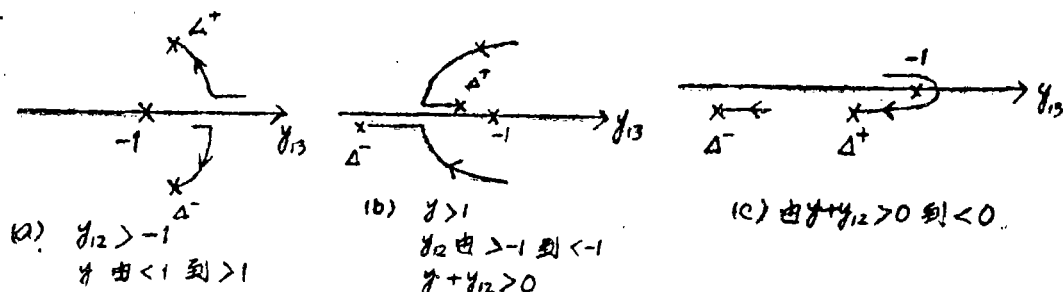
IV. 对外质量解析延拓

可以用对外质量解析延拓的方法来求得衰变振幅表示式。已知当 $y_{12} > -1, y < 1$, 并且外质量足够小时, 存在正常表示式 (没有反常阈, 双重色散关系成立)。过渡到我们讨论的衰变振幅时, 可以先对 y 延拓至 $y > 1$, 然后对 y_{12} 延拓。在延拓中, 令 $y \rightarrow y - i\epsilon$, $y_{12} \rightarrow y_{12} - i\epsilon$, 其中 ϵ 为趋于零的正数。

1. 奇点 $\Delta^{(\pm)}$

图 (IV) 表示由 $y < 1$ 和 $y_{12} > -1$ 顺次延拓到 $y > 1$ 和 $y_{12} < -1$ 时 $\Delta^{(\pm)}$ 的位置变化。由图可见, $\Delta^{(-)}$ 保持在 y_{13} 轴的下半平面, 所以它不是物理叶上的奇点。只有在 $-y < y_{12} < -1$ 范围内, $\Delta^{(+)}$ 为物理叶上的奇点。内綫质量 $m_2 = 2$ 时, $y_{12} < -y$, 这时属于图 (IVc) 的情形, $\Delta^{(+)}$ 不再是奇点。所以在衰变振幅中, 不存在 $\Delta^{(\pm)}$ 类型的奇点。

图IV



应该注意到, 虽然 $\Delta^{(\pm)}$ 不是衰变振幅的奇点, 但是它们是振幅的“吸收部分”的奇点。不难弄清楚这种奇点的物理意义。经过简单的计算表明, 在 $\Delta^{(-)} < y_{13} < \Delta^{(+)}$ 区间上, 三条内綫 m_1, m_2 和 m_3 可以同时质量壳层上, 并且它们的动量是实数。这是衰变情况的特点。在稳定粒子的相应图形中, 当动量为实数时, 这三条内綫是不能同在质量壳层上的。容易看出 (例如用 (7) 中分析振幅虚部的办法), 当三条内綫分母可以同时为零时, 振幅的吸收部分将变为复数。由于三条内綫动量为实数时, 外綫动量 p_{12}, p_{23} 也同时是实数, 所以 $(p_{12} + p_{23})^2$ 必然落在物理区内。由上面的分析, 知道当 S_i 在衰变物理区上 $4 < S_i < 6.7$

时, 相应的振幅吸收部分 $\bar{A}_i$ 为复数。

2. $\square_1$ 和 $\square_2$

在正常情形 (图 III a) 左下方的曲线 $y_{24} = \square_1(y_{13})$ 是振幅的奇异曲线。当过渡到衰变情形时, 在 $\Delta^{(-)}$ 和 $\Delta^{(+)}$ 之间, $\square_1$ 和 $\square_2$ 变为复数。因此, 对于衰变图形, 不存在 Mandelstam 的双重色散关系表示式。图 (III f) 绘出 $m_2 = m_4 = 2$ 时的曲线位置, 这时 $\square_1$ 和 $\square_2$ 都不

是物理叶上的奇点。所以,衰变振幅没有这类的奇点。但是, Π_1 是吸收部分的奇点。

不难验证, $\Pi_1 \leq y_{24} \leq \Pi_2$ 区间内, 四条内线可以同时质量壳层上, 这时它们的动量不能全为实数, 所以 Π_1 奇点必定在物理区以外。由图(III f)可见, 在衰变情形, Π_1 曲线是比较靠近物理区的。

根据上面的分析, 对衰变振幅不能写出双重色散关系, 但普通的只有正常阈的一维色散关系仍然成立。

V. 衰变振幅表示式

令 α, β, γ 为三个 π 介子的同位旋指标。假设衰变满足选择定则 $\Delta I = \pm 1/2$, 则三介子的总同位旋为 1。令 ρ 为总同位旋的 z 分量, 衰变振幅 $M_{\alpha\beta\gamma}(S_1, S_2, S_3)$ 可以写为

$$M_{\alpha\beta\gamma} = A \delta_{\rho\alpha} \delta_{\beta\gamma} + B \delta_{\rho\beta} \delta_{\gamma\alpha} + C \delta_{\rho\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (7)$$

A, B, C 为 S_i 的函数。由波色对称性, 有

$$\begin{aligned} S_1 \rightarrow S_2: & \quad A \rightarrow B, \quad C \rightarrow C \\ S_2 \rightarrow S_3: & \quad B \rightarrow C, \quad A \rightarrow A \\ S_3 \rightarrow S_1: & \quad C \rightarrow A, \quad B \rightarrow B \end{aligned} \quad (8)$$

对 A, B, C 可以分别写出色散关系。作变数变换

$$S_1 = 4(\nu_1 + 1) \quad (9)$$

$$Z_1 = S_2 - S_3, \quad Z_2 = S_3 - S_1, \quad Z_3 = S_1 - S_2 \quad (10)$$

用 ν_1 和 z_1 作为独立变数, 根据(8)式第二式, 有

$$A(\nu_1, z_1) = A(\nu_1, -z_1) \quad B(\nu_1, z_1) = C(\nu_1, -z_1) \quad (11)$$

由(8)的第一和第三式, 有

$$\begin{aligned} \nu_1 \rightarrow \nu_2, \quad z_1 \rightarrow -z_2: & \quad A \rightarrow B \quad C \rightarrow C \\ \nu_1 \rightarrow \nu_3, \quad z_1 \rightarrow -z_3: & \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow B \end{aligned} \quad (12)$$

利用这些对称性, 可以把振幅表为

$$\begin{aligned} A(\nu_1, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{A}(\nu', z_1)}{\nu' - \nu_1} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{B}(\nu', -z_2)}{\nu' - \nu_2} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{B}(\nu', z_3)}{\nu' - \nu_3} d\nu' \\ B(\nu_1, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{B}(\nu', z_1)}{\nu' - \nu_1} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{A}(\nu', z_2)}{\nu' - \nu_2} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{B}(\nu', -z_3)}{\nu' - \nu_3} d\nu' \end{aligned} \quad (13)$$

谱函数 $\bar{A}, \bar{B}$ 可以由过程 $\pi + \kappa \rightarrow \pi + \pi$ 的么正条件的解析延拓定出。如前所述, 在衰变物理区内, 谱函数应为复数。

VI. 讨论

如果 $\bar{A}, \bar{B}$ 可以对 z 展开

$$\bar{A} = \bar{A}_0 + 3z\bar{A}_1 + \dots$$

則我們得到Cini—Fubini〔8〕的一維色散关系表示式。其他作者在处理 τ 衰变时,都从只包含 $\bar{A}_0$ 的色散关系出发,即只考虑 $\pi-\pi S$ 波作用。但是必須注意到,在解衰变物理区的振幅时,需要用到非物理区的振幅,而 $\bar{A}, \bar{B}$ 在接近物理区处有奇点。(见图III f) 这样,对 z 的展开式将有問題。这种解法是不能认为滿意的。由于 τ 衰变振幅的解析性质与 $\pi-\pi$ 散射振幅的不同,在解 τ 衰变問題时也就不能完全引用解散射問題的方法。关于这个問題,将作进一步的研究。

附記: 本文完成时,作者注意到G.Barfon和C.Kacsér(Nuo. Cim. 21(1961), 988)研究了相同的問題,其中一些結論和本文的相同。

参 考 文 献

- 〔1〕 N.N. Khuri, S.B. Treiman, Phys. Rev. 119(1960), 115.
- 〔2〕 R.F. Sawyer, K.C. Wali, Phys. Rev. 119(1960), 1429.
- 〔3〕 Б.Н. Грибов, жэтф 41 (1961), 1221.
- 〔4〕 Ю. Вольф, Б. цеглер жэтф 41 (1961), 835.
- 〔5〕 R. Karplus, C.M. Sommerfield, E.H. Wichmann, Phys. Rev. 114 (1959), 376.
- 〔6〕 Б.Н. Грибов, Г.С. Данилов, И.Т. Дямлов, жэтф, 41 (1961), 924, 1215.
- 〔7〕 S. Mandelstam, Phys. Rev. 115 (1959), 1741.
- 〔8〕 M. Cini, S. Fubini, Ann. of Phys. 10. (1960), 352.