

关于調和函数边界值問題

許 毅 然

(数学力学系)

本文采用一个較直接的方法去証明关于調和函数的边界值性質的法都定理，并且在这个証明方法的基础上对調和函数的边界值性質作进一步的探討。

引理 設 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可积的实函数。

置

$$M_f(b) = \sup_{0 < |h| < b} \left\{ \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt \right| \right\}$$

$$g_z(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\cos(t - \varphi) + \rho^2}$$

其中 $z = \rho e^{i\varphi}$

則对 $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ ($0 < \rho_0 < 1$, $0 \leq \varphi_0$

$< \frac{\pi}{2}$) 有不等式

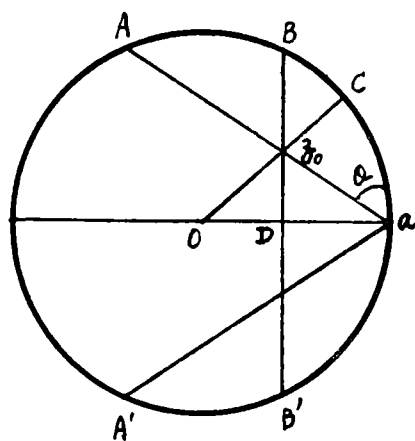
$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b), \quad z \in [\bar{z}_0, z_0] \quad (1)$$

成立。

其中 b 是过 $z_0, \bar{z}_0$ 两点的直綫与单位圆的交点 $B = e^{ib}$ 的幅角。

[証明*) 命

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (2)$$



图一

*) 証明的前部分实际上是引用那湯松的引理。見〔四〕中第十章。

据已知条件有

$$|F(t)| \leq M_f(b) |t| \quad t \in [-b, b] \quad (3)$$

利用部分积分法

$$\int_{-b}^b f(t) g_{z_0}(t) dt = F(b) g_{z_0}(b) - F(-b) g_{z_0}(-b) - \int_{-b}^b F(t) dg_{z_0}(t) \quad (4)$$

由于 $g_{z_0}(t)$ 在 $[-b, \varphi_0]$ 上递增而在 $[\varphi_0, b]$ 上递减以及利用 (3)

$$\left| \int_{-b}^b F(t) dg_{z_0}(t) \right| \leq M_f(b) \left[\int_{-b}^0 -t dg_{z_0}(t) + \int_0^{\varphi_0} t dg_{z_0}(t) + \int_{\varphi_0}^b -t dg_{z_0}(t) \right]$$

对上式右边的各项积分应用部分积分法

$$\begin{aligned} \left| \int_{-b}^b F(t) dg_{z_0}(t) \right| &\leq M_f(b) \left[-b g_{z_0}(-b) - b g_{z_0}(b) + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b}^0 g_{z_0}(t) dt + \int_{\varphi_0}^b g_{z_0}(t) dt - \int_0^{\varphi_0} g_{z_0}(t) dt \right] \quad (5) \end{aligned}$$

对 (4) 取绝对值及利用 (5)

$$\begin{aligned} \left| \int_{-b}^b f(t) g_{z_0}(t) dt \right| &\leq \left[|F(b)| g_{z_0}(b) - M_f(b) b g_{z_0}(b) + |F(-b)| g_{z_0}(-b) - \right. \\ &\quad \left. M_f(b) b g_{z_0}(-b) \right] + M_f(b) \left[2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0) + \int_{-b}^0 g_{z_0}(t) dt + \int_{\varphi_0}^b g_{z_0}(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\varphi_0} -g_{z_0}(t) dt \right] \end{aligned}$$

由 (3) 式知上式第一个方括弧的值为非正的, 由核的性质知第二个方括弧中三项积分的和小于 1. 所以

$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_{z_0}(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b) \quad (6)$$

对 $z = \rho e^{i\varphi} \in [x_0, z_0]$ ($z_0 = x_0 + iy_0$) 重复以上作法得

$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi g_z(\varphi)] M_f(b) \quad z \in [x_0, z_0] \quad (6')$$

卜阿桑核 $g_z(t)$ 可表如

$$g_z(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{z \text{ 点至 } -e^{it} \text{ 点的距离}}{z \text{ 点至 } e^{it} \text{ 点的距离}} \quad (7)$$

据这个几何表达式及一些几何知识易验证

$$z_z(\varphi) \leq z_{z_0}(\varphi_0) \quad z \in [x_0, z_0]$$

于是

$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b) \quad z \in [x_0, z_0]$$

同理可証

$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b) \quad z \in [\bar{z}_0, x_0]$$

即得到 (1)。証毕。

定理 1 設 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可积的实函数且 $\int_0^t f(t) dt = o(t)$, 則在 $|z| \leq 1$ 內任一頂点为 1 而 其他两个頂点在 $|z| < 1$ 內的三角形上, 函数 $u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_z(t) dt$, $u(1) = 0$ 連續。

[証] 过点 $a = 1$ 作弦 $\overline{aA}$ 、 $\overline{aA'}$, 它們与单位圆的交角都是 θ 。不失一般性, 只要証明在 $\Delta aAA'$ 上函数 $u(z)$ 在点 $a = 1$ 連續便可。为此, 我們在弦 $\overline{aA}$ 上任取一点 $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ ($0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$), 过 z_0 、 $\bar{z}_0$ 作弦 BB' ($B = e^{ib}$) 如图一所示。我們所要証明的命題便化为証明: 当 $b \rightarrow 0$ 时

$$u(z) = o(1) \quad z \in [\bar{z}_0, z_0] \quad (8)$$

首先估計积分

$$\int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \quad z \in [\bar{z}_0, z_0]$$

据引理

$$\left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| \leq [1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b) \quad z \in [\bar{z}_0, z_0]$$

据已知条件有 $M_f(b) = o(1)$

据卜阿桑核 $g_z(t)$ 的几何表式 (7) 知

$$\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0) = \widehat{ac} \cdot \frac{2 - \overline{z_0 c}}{2\pi \overline{z_0 c}}$$

不难看出当 $b \rightarrow 0$ 时 $\angle z_0 ca \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\angle ca z_0 \rightarrow \theta$, 因而 $(\widehat{ac} : \overline{z_0 c}) \rightarrow \cot \theta$

$\therefore \varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0) \rightarrow \frac{1}{\pi} \cot \theta$ 当 $b \rightarrow 0$ 时。

$$\therefore \left| \int_{-b}^b f(t) g_z(t) dt \right| = o(1) \quad z \in [\bar{z}_0, z_0] \quad (9)$$

其次估計積分

$$\int_{\widehat{BAB'}} f(t) g_z(t) dt \quad z \in [\bar{z}_0, z_0]$$

任給 $\varepsilon > 0$ 。據積分的絕對連續性必存在 $\delta > 0$ ，使對 $[-\pi, \pi]$ 上任一個可測子集 e 只要 $\text{mes } e < \delta$ 便有不等式

$$\int_e |f(t)| dt < \varepsilon \quad (10)$$

又由於 $f(t)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可積，在 $[-\pi, \pi]$ 上必存在一個可測子集 E ，使 $\text{mes } E < \delta$ 且 $|f(t)|$ 在集 $[-\pi, \pi] - E$ 上有界設其界為 N 。于是有

$$\int_E |f(t)| dt < \varepsilon \quad (10')$$

及

$$\left| \int_{\widehat{BAB'}} f(t) g_z(t) dt \right| \leq \int_{\widehat{BAB'} - E} N g_z(t) dt + \int_{\widehat{BAB'} - E} |f(t)| g_z(t) dt \quad (11)$$

據調和測度的知識，（例如見〔二〕154頁）

$$\int_{\widehat{BAB'} - E} N g_z(t) dt \leq N 2b \quad (12)$$

據 $g_z(t)$ 的幾何表示式 (7) 易知

$$g_z(t) \leq g_{z_0}(b) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} \quad z \in [\bar{z}_0, z_0]$$

由此及 (10')

$$\int_{\widehat{BAB'} \cdot E} |f(t)| g_z(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} \varepsilon \quad z \in [\bar{z}_0, z_0] \quad (13)$$

依圖一

$$\overline{Dz_0} = (1-x_0)\cot\theta, \quad \overline{DB} = \sqrt{1-x_0^2} \quad \text{因而}$$

$$\frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} = \frac{\sqrt{1-x_0^2} + (1-x_0)\cot\theta}{\sqrt{1-x_0^2} - (1-x_0)\cot\theta}$$

当 $b \rightarrow 0$ 时 $x_0 \rightarrow 1$ 而 $(\overline{B'z_0} : \overline{Bz_0}) \rightarrow 1$ 即

$$\frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} = 1 + o(1) \quad (14)$$

由 (11)、(12)、(13)、(14)

$$\left| \int_{\widehat{BAB'}} f(t) g_z(t) dt \right| \leq N 2b + \frac{\varepsilon}{2\pi} (1 + o(1)) \quad z \in [\overline{z_0}, z_0] \quad (15)$$

由 (9)、(15) 及注意到 ε 、 N 和 b 无关便得 (8)。证毕。

定理 2 设 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒贝格可积的实函数且 $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ 在 $t=0$ 有左右导数 $F'_-(0)$ 、 $F'_+(0)$ 存在, 则

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_z(t) dt = \frac{\theta}{\pi} F'_-(0) + \frac{\pi - \theta}{\pi} F'_+(0) \quad (16)$$

其中 $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}}$ 表示 z 沿一条与单位圆在 $z=1$ 点的交角为 θ 的光滑曲线 L_θ 自圆内

趋于 $z=1$ 时所取的极限。

【证】 命

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) - F'_+(0) & 0 < t \leq \pi \\ f(t) - F'_-(0) & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

则 $f_1(t)$ 完全满足定理 1 的条件, 据定理 1 有

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) g_z(t) dt = 0$$

于是有

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_z(t) dt = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}} \int_0^{\pi} F'_+(0) g_z(t) dt + \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \theta}} \int_{-\pi}^0 F'_-(0) g_z(t) dt$$

上式的成立是据上式的右边的两个极限存在而成立。下面我们将证明此二极限的确是存在的, 且知它们分别等于 $\frac{\pi - \theta}{\pi} F'_+(0)$ 、 $\frac{\theta}{\pi} F'_-(0)$ 。并由此得到 (16)。定理也就得到了证明。

任給 $\varepsilon > 0$ 。过 1、-1 两点作二个圆弧，它們分别与 $|z| = 1$ 的交角为 $\theta - \varepsilon$ 、 $\theta + \varepsilon$ ，那么存在 $z = 1$ 点的邻域，使在这邻域内 L_θ 完全落在此二圆弧所围成的透鏡形內。

对透鏡內任一点 z_0 ，过 1、 z_0 、-1 三点的圆弧与 $|z| = 1$ 的交角 α 必介乎 $\theta - \varepsilon$ 、 $\theta + \varepsilon$ 之間。据調和測度的知識（例如見〔二〕154頁）

$$\int_0^\pi F'_+(0) g_z(t) dt = -\frac{\pi - \alpha}{\pi} F'_+(0)$$

$$\int_{-\pi}^0 F'_-(0) g_{z_0}(t) dt = \frac{\alpha}{\pi} F'_-(0)$$

其中 $|\alpha - \theta| < \varepsilon$ 。

于是証毕。

推論，設 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可积的函数，若 $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ 在 t_0 点有导数 $F'(t_0)$ 。則当 z 沿一条不切于 $|z| = 1$ 的路径趋于 e^{it_0} 点时

$$\lim_{z \rightarrow e^{it_0}} \int_{-\pi}^\pi f(t) g_z(t) dt = F'(t_0) \quad (17)$$

在〔三〕131頁我們可以找到与定理2类同的定理，至于推論在一般专著例如〔五〕中都可以找到。这类定理緣于法都研究解析函数的边界性質而引导出来的。原来〔一〕一文的法都定理是这样叙述的：

法都定理：設 $u(z)$ 是 $|z| < 1$ 內的有界調和函数，則对几乎所有 $|z| = 1$ 上的点 e^{it} ，当 z 沿不切于 $|z| = 1$ 的路径趋于 e^{it} 时 $\lim_{z \rightarrow e^{it}} u(z)$ 存在。

它的証明可以归結到定理2的推論。詳見书〔三〕135頁。

定理3 設 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可积的实函数，且 $\int_0^t f(t) dt = o(t^2)$ 。則在 $|z| \leq 1$ 內任一个与单位圆相切于 $z = 1$ 的閉圆盘上，函数

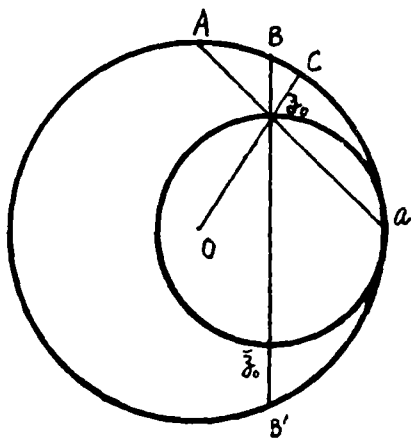
$$u(z) = \int_{-\pi}^\pi f(t) g_z(t) dt, \quad u(1) = 0$$

連續。

〔証〕：不妨取此閉圆盘为

$$\left| z - \frac{1}{p} \right| \leq \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

其中 $p \geq 2$ 。



图二

在小圓周上取一点 z_0 ($z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0} = x_0 + iy_0$, $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$)

过 $\bar{z}_0, z_0$ 作弦 $\overline{BB'}$, ($B = e^{ib}$) 如图二所示。

这里的証明和定理 1 的証明大致一样, 从定理 1 的証明知道只要証明下列两个等式, 此定理便可完全被証明。

$$[1 + 2\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0)] M_f(b) = o(1) \quad \text{当 } b \rightarrow 0 \quad (18)$$

$$\frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} = o(1) \quad \text{当 } b \rightarrow 0 \quad (19)$$

先証 (18)

$$\text{据已知条件有 } M_f(0) = o(b) \quad (20)$$

由 (7) 知

$$g_{z_0}(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 - \overline{z_0 c}}{\overline{z_0 c}}$$

由于 (x_0, y_0) 点满足小圆方程 $(x - \frac{1}{p})^2 + y^2 = (1 - \frac{1}{p})^2$ 于是

$$\overline{z_0 c} = 1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{p}(1 - x_0)} \quad (21)$$

$$tg \varphi_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sqrt{(1 - x_0^2) - \frac{2}{p}(1 - x_0)}}{x_0} \quad (22)$$

当 $b \rightarrow 0$ 时 $\varphi_0 \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow 1$

$$\therefore \lim_{b \rightarrow 0} \varphi_0^2 g_{z_0}(\varphi_0) = \lim_{b \rightarrow 0} (tg^2 \varphi_0) g_{z_0}(\varphi_0)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x_0 \rightarrow 1} \left[\frac{(1 - x_0^2) - \frac{2}{p}(1 - x_0)}{x_0^2 \cdot 2\pi} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{p}(1 - x_0)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{p}(1 - x_0)}} \right] \\ &= \frac{2(p-1)}{\pi} \end{aligned}$$

据假设 $p \geq 2$. 知 $\overline{z_0 A} \leq \overline{az_0}$. 因而 $\widehat{ac} > \frac{1}{2} \widehat{aA} > \frac{1}{2} b$ 或 $\varphi_0 < b < 2\varphi_0$.

$$\therefore b\varphi_0 g_{z_0}(\varphi_0) < \frac{4(p-1)}{\pi} + o(1) \quad \text{当 } b \rightarrow 0 \quad (23)$$

由(20)、(23)便得(18)。

最后往証(19)。

$$\text{由于 } I_m(B) = \sqrt{1-x_0^2}, \quad y_0 = \sqrt{(1-\frac{1}{p})^2 - (x_0 - \frac{1}{p})^2}$$

$$\frac{\overline{B'z_0}}{\overline{Bz_0}} = \frac{\sqrt{1-x_0^2} + \sqrt{(1-\frac{1}{p})^2 - (x_0 - \frac{1}{p})^2}}{\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{(1-\frac{1}{p})^2 - (x_0 - \frac{1}{p})^2}} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{1-\frac{1}{p}}}{1 - \sqrt{1-\frac{1}{p}}} \quad \text{当 } x_0 \rightarrow 1$$

即得証(19)，定理証毕。

推論：設 $f(t)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上勒貝格可積的函數，若存在一個連續函數 $\psi(t)$ 使 $\int_0^t [f(t) - \psi(t)] dt = o(t^2)$ ，則 $u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_z(t) dt$ ， $u(1) = \psi(0)$ 在定理3所說的閉圓盤上連續。

$$\text{例一 記 } U_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3}, \frac{1}{n} \right) \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} U_n$$

$$f_E(t) = \begin{cases} 1 & t \in E \\ 0 & t \notin E \end{cases}$$

顯然 $f_E(t)$ 滿足定理3的條件，但函數 $u_E(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f_E(t) g_z(t) dt$ 并非當 z 沿任何路徑自單位圓內趨於 $z=1$ 時都有極限存在。

$$\text{例二 記 } I_n = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} \right] \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$f_e(t) = \begin{cases} 1 & t \in e \\ 0 & t \notin e \end{cases}$$

顯然 $f_e(t)$ 滿足定理1的條件但 $u_e(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f_e(t) g_z(t) dt$ ， $u(1)=0$ 在 $|z-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ 上並不連續，（即沒有定理3的結果），其證明如下：（為方便計，沿用定理3的證明中符號和公式。）

對 n 取 $C_n = e^{i\varphi_n}$ ， $\varphi_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ， $J_n = e^{i\varphi_n + i\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}$ 聯 C_n 、 0 的直線交

小圆于 $z_n = x_n + iy_n$ 。

由 (21), (22) 及 $p = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{Z_n C_n}}{\varphi_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{p}(1 - x_n)})}{(1 - x_n^2 - \frac{2}{p}(1 - x_n))} = \frac{1}{2(p-1)} = \frac{1}{2}$$

即 n 充分大时 $\overline{C_n Z_n} < \varphi_n^2 = \overline{C_n J_n}$

亦即 n 充分大时 $\angle C_n Z_n J_n > \angle C_n J_n Z_n$

又不难看出 $\angle J_n C_n Z_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 当 n 充分大时 $\angle C_n J_n Z_n < \frac{\pi}{4}$

据调和测度知识

$$\int_{\widehat{C_n J_n}} f_z(t) g_z(t) dt = \int_{\widehat{C_n J_n}} g_z(t) dt \geq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \angle C_n J_n Z_n \right) \geq \frac{1}{8}$$

此示 $u(Z_n) > \frac{1}{8}$ 其中 Z_n 是沿小圆趋于 1 的。于是证毕。

还可验证 $\int_0^t f_z(t) dt \leq o(t^2)$ 。这说明定理 3 的条件 $\int_0^t f(t) dt = o(t^2)$ 中的 $o(t^2)$ 不可能再减弱。

例三. $f(t) = |t|^{1/2}$

显然 $u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_z(t) dt$, $u(1) = 0$ 在定理 3 中所述的闭圆盘上连续,

但 $f(t)$ 并不满足定理 3 的条件, 此示定理 3 的条件不是必要的。

最后, 对导师刘俊贤教授的教导和对本文的审阅, 表示感谢。

参 考 文 献

- [1] P.FATOU: Series trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. 30(1906)
- [2] C.CARATHEODORY: Theory of functions of a complex variable. vol I (Second English Edition)
- [3] M.TSUJI: Potential theory in modern function theory. (1959)
- [4] И.П.НАТАНСОН: Теория функций вещественной переменной(1957)(有中译本)
- [5] И.И.ПРИВАЛОВ: Граничные свойства аналитических функций(1950)(有中译本)