

关于张弛振动的普遍方程式

$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ 的周期解

之唯一性定理

李 炳 熙

(数学力学系)

§ 1 序 言

远在廿一年前, Norman Levinson 与 Oliver K. Smith^[1]首創地研究了張弛振动的普遍方程式

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

的周期解, 給出了(1)的周期解之存在与唯一性定理。可是, 不但唯一性定理的条件应用起来不大方便, 而且1957年 Z. Mikołajska^[2]列举反例說明該定理是錯誤的 (但她沒有加以修正, 本文 § 4 将陈述其修正形式)。直到1954年, Antonio De Castro^[3]公布了一个存在与唯一性定理, 虽然其条件較便于掌握, 但定理仍是錯誤的。1959年, 張芷芬^[4]举出反例(其方程是 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ 型)說明 Antonio De Castro 定理 (唯一性部分) 当 $g(x) \neq x$ 时是不正确的, 并加以修正。

现把 Antonio De Castro 与張芷芬的結果簡介如下:

定理 1 (Antonio De Castro)

設微分方程式 (1) 的 $f(x, v)$ 及 $g(x)$ 滿足下列条件 1) — 4), 則 (1) 存在唯一的稳定周期解:

- 1) $g(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $g(x)$ 滿足李氏条件, 当 $x \neq 0$, $xg(x) > 0$, $G(\pm\infty) = +\infty$, 这里 $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, $g(x)$ 是 x 的增函数;
- 2) $f(x, v) \in C(|x| < +\infty, |v| < +\infty)$, $f(x, v)$ 在 (x, v) 平面的任何有限区域滿足李氏条件, $f(0, 0) < 0$,

3) 存在常数 $\alpha > 0$, $N > 0$ 及 $\alpha > 0$, 使当 $|x| > \alpha$ 时, $f(x, v) > 0$, 又当 $|x| > \alpha$, 对每个满足 $|v(s)| > N$ 的连续函数 $v(s)$, 有

$$\int_{-x}^x f(s, v(s)) ds \geq \alpha > 0,$$

4) 当 $|x|$, $|v|$ 增加时, $f(x, v)$ 不下降。

定理 2 (張芷芬)

設(1)的 $f(x, v)$ 及 $g(x)$ 满足定理 1 的条件, 并且 $g''(x)$ 存在和 $xg''(x) \leq 0$ (只要 $\lim_{x \rightarrow 0} \Omega(x)$ 存在和当 $|x|$ 增加时 $\Omega(x)$ 不下降便够, 这里 $\Omega(x) = \frac{\sqrt{2G(x)}}{g(x)} \operatorname{sgn} x$),

則(1)存在唯一的稳定周期解。

注意到(1)等价于方程組

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -g(x) - f(x, v)v,$$

則定理 1 和定理 2 的結論都可改用另一形式表达, 即: 在相应的条件下, (2) 存在唯一的稳定极限环。

本文的目的是: 列举反例說明下列事情

(甲) 当 $g(x) = x$ 时, 定理 1 也是錯誤的 (Antonio De Castro 先后在 1954 年 ([3]) 和 1958 年 ([5]) 提到定理 1 的証明时, 都是先假设 $f(x, v)$ 当 $|x|$, $|v|$ 增加时严格增加, 然后簡略地說, 去掉严格单調的条件, 定理仍真。其錯誤在于: 仅假设 $f(x, v)$ 当 $|x|$, $|v|$ 增加时不下降是不足以保証唯一性的, 这时还应对集合 $Z = \{(x, v) | f(x, v) = 0\}$ 作适当限制)。

(乙) 定理 2 关于 $f(x, v)$ 的条件应作适当修改 ([4] 的証明, 实际上是用到 $f(x, v)$ 当 $|x|$, $|v|$ 增加时严格增加这假定) 并可以减弱。

以下, § 2 列举反例, § 3 在 [4] 的基础上研究定理 1 的修正, § 4 陈述 Levinson 及 Smith 唯一性定理的修正形式, 并举出例子 (不能用 Levinson-Smith 的判別法, 但可用 § 3 的定理判別周期解的唯一性)。

§ 2 反 例

考虑微分方程組 (2), 其中 $g(x)$ 及 $f(x, v)$ 定义如次:

$$g(x) = \arctg x,$$

因此, 它滿足下列条件:

1) $g(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$,

2) $xg(x) = x \operatorname{arctg} x > 0$, 当 $x \neq 0$,

3) $g(x)$ 是 x 的增函数;

4) $G(x) = \int_0^x \operatorname{arctg} s \, ds = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, 故

$$G(\pm\infty) = +\infty,$$

5) $g''(x) = -2x/(1+x^2)^2$, $xg''(x) = -2x^2/(1+x^2)^2 \leq 0$,

6) 曲线 $\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c$, (其中 $c > 0$ 是常数) 是简单闭曲线。

在定义 $f(x, v)$ 之前, 先把 (x, v) 平面划分为下列区域:

$$D_1 = \left\{ (x, v) \mid 0 \leq \frac{1}{2}v^2 + G(x) < c_0 \right\},$$

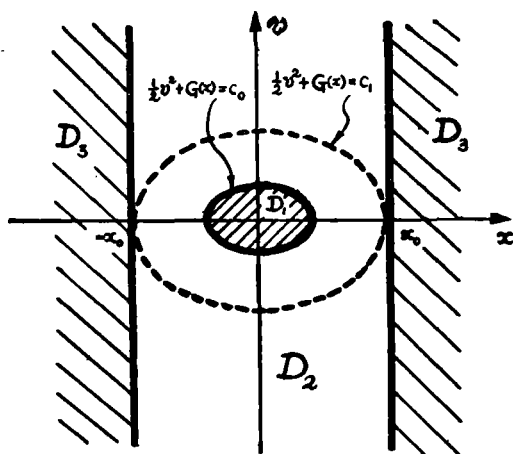
$$D_2 = \left\{ (x, v) \mid c_0 \leq \frac{1}{2}v^2 + G(x), |x| \leq x_0, x_0 = |\beta|, G(\beta) = c_1 > c_0 \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, v) \mid |x| > x_0 \right\},$$

这里 c_0, c_1 满足条件:

$$0 < c_0 < c_1,$$

且曲线 $\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c_0$, $\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c_1$ 都是简单闭曲线。



然后, 规定

$$f(x, v) = \begin{cases} -[\frac{1}{2}v^2 + G(x) - c_0]^2, & (x, v) \in D_1, \\ 0, & (x, v) \in D_2, \\ (x^2 - x_0)^2, & (x, v) \in D_3. \end{cases}$$

可以看出, $f(x, v)$ 满足下列条件:

1° $f(x, v) \in C^1(|x| < +\infty, |v| < +\infty)$, 从而在 (x, v) 平面上任何有限区域满足李氏条件,

2° $f(0, 0) = -c_0^2 < 0$, 存在 $\alpha = 2x_0 > 0$, 使当 $|x| > \alpha$, $f(x, v) > 0$,

3° 存在 $N = 2\sqrt{2c_0}$, $\alpha = 2 \int_{x_0}^{2x_0} (x^2 - x_0)^2 dx$, 使当 $|x| > \alpha$, 对任意连续函数 $v(s)$ ($|v(s)| > N$) 有

$$\int_{-x}^x f(s, v(s)) ds \geq \alpha > 0,$$

4° 当 $|x|, |v|$ 增加时, $f(x, v)$ 不下降。

因此, 方程组 (2)——其中的 $f(x, v)$ 及 $g(x)$ 定义如上——满足定理 1 或定理 2 的条件, 可是它却有无穷个 (连续统个) 周期轨线。事实上, 当 $(x, v) \in D_2$ 时 (2) 变为

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -g(x),$$

它等价于方程式

$$\ddot{x} + g(x) = 0.$$

方程组 (3) 以

$$\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c,$$

$c_0 \leq c \leq c_1$, 为其闭轨线。

此例说明定理 1 及定理 2 关于 $f(x, v)$ 的不下降性的假设是不充分的。因为, 当 $|x|, |v|$ 增加时, $f(x, v)$ 不下降这条件容许 $f(x, v)$ 在 (x, v) 平面上某区域保持常值, 特别可以为零, 因此, 集合

$$Z = \left\{ (x, v) \mid f(x, v) = 0 \right\}$$

是值得注意的。

定理 2 的证明 ([4]) 实际上是暗中假设了 $f(x, v)$ 是严格增函数, 故该定理关于 $f(x, v)$ 当 $|x|, |v|$ 增加时不下降的假设改为: $f(x, v)$ 当 $|x|, |v|$ 增加时恒增, 则定理真确。但是, 我们可以把此条件减弱 (见 § 3)。([4] 的注意力主要集中于 $g(x)$ 身上。)

又若在上述反例中, 取 $g(x) = x$, 这时

$$\frac{1}{2}v^2 + G(x) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

其余不变, 则得到反例, 说明当 $g(x) = x$ 时, Antonio De Castro 唯一性定理也是不对的。

§ 3 Antonio De Castro唯一性定理的修正

在上述反例的启发下, 在[4]的基础上, 我们对 Antonio De Castro 唯一性定理修正如次。首先证明下列引理:

引 理

考虑方程式

$$(4) \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0,$$

或其等价方程组

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -x - f(x, v)v,$$

如果 $f(x, v)$ 满足下列条件 I)–V), 则 (5) 存在唯一的稳定极限环:

I) $f(x, v) \in C(|x| < \infty, |v| < +\infty)$, $f(x, v)$ 在 (x, v) 平面上任何有限区域满足李氏条件,

II) $f(0, 0) < 0$;

III) 存在常数 $\alpha > 0$, $N > 0$ 及 $\alpha > 0$, 使当 $|x| > \alpha$, $f(x, v) > 0$; 又当 $|x| > \alpha$, 对每个满足 $|v(s)| > N$ 的连续函数 $v(s)$, 有

$$\int_{-x}^x f(s, v(s)) ds \geq \alpha > 0,$$

IV) 当 $|x|, |v|$ 增加时 $f(x, v)$ 不下降,

V) 最多存在一个 $c_0 > 0$, 使得

$$K \subseteq Z,$$

这里 $K = \left\{ (x, v) \mid \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_0 \right\}$, $Z = \left\{ (x, v) \mid f(x, v) = 0 \right\}$.

证明:

1. 周期解的存在性, 参见[3].

2. 周期解的稳定性和唯一性: 参照[3]进行证明如次。

由条件 IV) 推出 (5) 的任一闭轨线都是星形的 (即自原点 $O(0, 0)$ 出发的任一半射线与此闭轨线只交于一点)。(见[3]或[4])

现来证明 (5) 的任一闭轨线都是孤立的并有轨道稳定性 ([6]), 从而证明了极限环是稳定的和唯一的 ([1])。

设 Γ 是 (5) 的任一闭轨线 (由上述知, Γ 是星形的), 显然 Γ 包含 (5) 的唯一的奇点 $O(0, 0)$ 于其内部, 作相似变换

$$T_k: A = (x, v) \rightarrow A_k = (kx, kv),$$

其中 $k > 0$, 于是 Γ 的象 $\Gamma_k = T_k(\Gamma)$ 是简单闭曲线 (且是星形的), 此外

$$\text{Int } \Gamma_k \subset \text{Int } \Gamma, \quad (k < 1),$$

$$\text{Int } \Gamma \subset \text{Int } \Gamma_k, \quad (k > 1),$$

$$\Gamma_1 = \Gamma.$$

曲线 Γ_k 在点 A_k 的切线斜率为 (当 $v \neq 0$),

$$-\frac{x}{v} - f(x, v),$$

而 (5) 所定义的向量场在 A_k 的方向角的正切是

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{A_k} = -\frac{kx}{kv} - f(kx, kv) = -\frac{x}{v} - f(kx, kv).$$

由条件 IV) 有 ($v \neq 0$)

$$(*) \quad -\frac{x}{v} - f(x, v) \leq \left. \frac{dv}{dx} \right|_{A_k}, \quad k < 1,$$

$$(**) \quad -\frac{x}{v} - f(x, v) \geq \left. \frac{dv}{dx} \right|_{A_k}, \quad k > 1.$$

但是, 由条件 V) 知, (*) 或 (**) 对任何 $k > 0$ 而言, 等号不能对一切 A_k ($v \neq 0$) 成立 (其理由见下段)。因此, 在 Γ 的任一邻域, 我们有一族与 Γ 相似的闭曲线 Γ_k ($k > 0$); (5) 的轨线当 t 增加时跑不出 $\text{Int } \Gamma_k$ ($k > 1$), 也跑不进 $\text{Int } \Gamma_k$ ($k < 1$), 故 Γ 是稳定的极限环。

现来陈述上段结尾的论断的理由。

假设此论断不对, 即存在某 $k > 0$ 使得

$$-\frac{x}{v} - f(x, v) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{A_k}, \quad A_k \in \Gamma_k, \quad v \neq 0,$$

即得

$$f(x, v) = f(kx, kv), \quad (x, v) \in \Gamma.$$

由条件 IV) 有

$$f(x, v) = f(kx, kv), \quad (x, v) \in L_\theta,$$

其中 $L_\theta = \left\{ (x, v) \mid v = xtg\theta \right\} \cap R$, R 是 Γ 与 Γ_k 所围的环域, 而 $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ 。再因 Γ 及 Γ_k 为星形的, 加上条件 IV) 与 $f(x, v)$ 的連續性, 得

$$f(x, v) = \text{const.}, (x, v) \in R,$$

故不妨令

$$f(x, v) = b, b = \text{const.}, (x, v) \in R.$$

可以証明 $b = 0$ 。事实上, 若 $b \neq 0$, 則綫性方程組

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -bv - x, \quad b \neq 0,$$

有閉軌綫 Γ , 矛盾。因此, 当 $(x, v) \in R$, (5) 呈形状

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -x,$$

故 Γ, Γ_k 皆为圆 $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2 = c, c = c_i (i=1, 2), c_1 \neq c_2$, 从而与条件 V) 矛盾。

引理得証。

定理 3 (Antonio De Castro 唯一定理的修正)

当 $f(x, v)$ 及 $g(x)$ 满足定理 2 的条件 ($g(x)$ 是 x 的增函数这假設除外), 且满足下面条件 (★):

最多存在 $-\tilde{c} > 0$, 使得

$$E \subseteq Z,$$

这里, $E = \left\{ (x, v) \mid \frac{1}{2}v^2 + G(x) = \tilde{c} \right\}, Z = \left\{ (x, v) \mid f(x, v) = 0 \right\}$, (E 是簡單閉曲綫), 則方程組 (2) 存在唯一的稳定极限环。

証明大意:

关于存在性, 見 [3], 关于唯一性及稳定性見 [4], 只要注意到这件事:

利用变换

$$u = \sqrt{2G(x)} \operatorname{sgn} x$$

把 (2) 变成

$$\frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u - F(u, v)v,$$

这里 $F(u, v) = f(x(u), v) u / g(x(u))$, 而且满足引理的条件, 再利用引理即可。

〔附注〕

1° $f(x, v)$ 是恒增函数 (当 $|x|, |v|$ 增加时), 则条件 (★) 满足, 反之, 不然.2° 条件 (★) 等价于: (2) 最多以一条闭曲线 $\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c$ 为积分曲线, 又若条件 (★) 的 c 值确存在, 则 (2) 的唯一稳定极限环就是 $\frac{1}{2}v^2 + G(x) = c$.

3° [4] 的定理 1 也可类似上方式加以修改.

§ 4 例

在举例之前, 先陈述 Levinson 与 Smith 唯一性定理的修正形式 (Levinson 及 Smith 在 [1] 中实际上是暗中假设满足了条件 (★) 然后进行证明的, 若加上条件 (★) 后, 他们的证明是对的——除却关于周期解稳定性判据的证明那部分外):

设 (2) 的 $f(x, v)$ 及 $g(x)$ 满足条件 (★) 及下面的条件, 则 (2) 至多存在一个极限环, 如存在, 则是稳定的.

对每实数 c (使下面之 $m_2(c)$ 及 $M_1(c)$ 有定义的) 有

$$m_2(c) > 0,$$

$$M_1(c) < m_2(c),$$

这里

$$m_2(c) = \min_{R_2(c)} \left\{ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{vf(x, v)} \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right\}, \quad v \neq 0, f(x, v) \neq 0,$$

$$M_1(c) = \max_{R_1(c)} \left\{ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{vf(x, v)} \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right\}, \quad v \neq 0, f(x, v) \neq 0,$$

而

$$R_1(c) = \left\{ (x, v) \mid \frac{1}{2}v^2 + G(x) = c, f(x, v) < 0 \right\},$$

$$R_2(c) = \left\{ (x, v) \mid \frac{1}{2}v^2 + G(x) = c, f(x, v) > 0 \right\}.$$

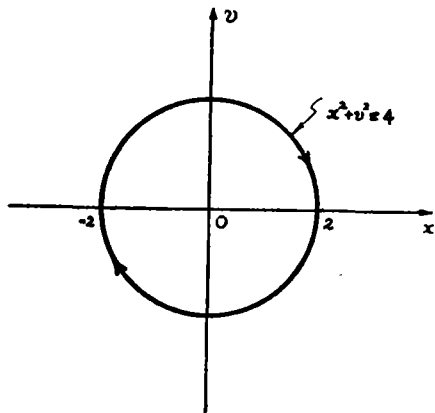
现举一例, 上述 Levinson-Smith 判据不能用, 而用定理 3 则可判定存在唯一的稳定极限环.

考虑方程组 (2), 其中取 $g(x) = x$, $f(x, v)$ 则定义如次:

$$D_1 = \left\{ (x, v) \mid x^2 + v^2 < 4 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, v) \mid x^2 + v^2 \geq 4 \right\},$$

$$f(x, v) = \begin{cases} -(x^2 + v^2 - 4)^2, & (x, v) \in D_1, \\ (x^2 + v^2 - 4)^2, & (x, v) \in D_2. \end{cases}$$



可以驗證, 这时定理 3 的全部条件滿足, 故(2)——其中 $f(x, v)$ 定义如上, $g(x) = x$ ——存在唯一的稳解极限环, 它显然就是 $x^2 + v^2 = 4$ 。但是, $R_1(c) = R_2(c) = \phi$, 从而 Levinson-Smith 判据不能下什么結論。

最后, 作者对胡金昌教授的热情鼓励与审阅指导, 表示衷心感謝。

参 考 文 献

- [1] N. Levinson and O.K. Smith, A General Equation for Relaxation Oscillations, Duke Math. Journ., 9, 1942, pp. 382—403.
- [2] Z. Mikołajska, Sur un théorème de MM. N. Levinson et O.K. Smith relatif à l'équation différentielle des oscillations entretenues, Ann. Polon. Math., 4—1, 1957, 1—7.
- [3] Antonio De Castro, Sull'esistenza ed unicita delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Serio III, Anno IX, N. 4, 1954, 369—372.
- [4] 张芷芬, 关于 Antonio De Castro 唯一性定理的反例及其修正, 北京大学学报, 1959, 第 4 期, 327—336.
- [5] Antonio De Castro, Estudios sobre la mecánica no-lineal, Revista Matematica Hispano-Americana, 4a. serie, Tomo XVIII, 1958, 99—112, 146—156, 181—200.
- [6] J.J. Stoker, Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, p. 253. (1950)