

近十年間李雅普諾夫函数V的推广

胡·金·昌

李雅普諾夫第二方法用函数 V 及沿着动力系统軌綫取 $\frac{dV}{dt}$ ，从它們的符号来判定运动的稳定性，已經众所周知。随着生产上技术革命的推进和自动調节的需要，李雅普諾夫函数 V 或泛函 V 的理論得到进一步的发展，它的应用被推广到全局稳定，时滞微分方程組，偏微分方程組，最佳方程，随机函数及其他泛函空間里，成为研究这些新领域中稳定性問題的重要工具。本文专論近十年間关于李雅普諾夫函数 V 的推广。至于經典的李雅普諾夫第二方法的推演，証明，和运用，已經有了很好的流行书本，本文不作重复。又与函数 V 的应用无关的稳定性文献，虽然多得很，也作为本文題外。为着避免引用文献及作者名称的冗冗，本文将簡略地表为文[·]引用的文献(从1951至1960止)附录在篇后。

一、普通理論

关于研究李雅普諾夫第二方法中的稳定性，漸近稳定性，不稳定性各定理的可逆問題，人們引入了許多定义和概念，如文[37]把各种稳定細分为九种定义，极为庞什。本节所謂普通理論，只略举与下文各节有联系的几种：

討論微分方程組：

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x; t)$$

其間 f 属于在域 G 內所定义的連續矢函数类 C ， $f(0; t) = 0$ ，且滿足 Lip. 条件，此后一般的以此假設条件为基础，个别情形則另行声明补充条件，下文常用記号 x ； f 表示 n 維矢量，有下标的字表示該矢量的分量例如： $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 。又設 $t \in I = [0, +\infty)$ 或 $t \in I_0 = [t_0, +\infty)$

1. 一致稳定，已給任何数 $\epsilon > 0$ 及任何 $t_0 \in I$ ，若可指出 $\delta(\epsilon)$ 使对于一切 $|x^0| < \delta$ 当 $t \geq t_0$ 时有 $|x(x^0, t_0, t)| < \epsilon$ 則称 (1) 的零解为 (关于 t_0) - 一致稳定。

[这里及此后均引用記号： $|x| = +\sqrt{(x, x)}$ ； $x(x^0, t_0, t)$ 表示半軌綫， (x, y) 表內积]

李雅普諾夫稳定性定理 I (按照他的原集所用号碼) 的可逆問題，要这定理 I 为可逆，在文[35]則把条件补充作“零解为一致稳定，而且要求 $v(x; t)$ 容許无穷小上限。但更弱的条件只在文[37]里只要求 $f(x; t)$ 属于可微函数类 C^1 ；而在文[60]里則要求零解为

一致穩定。文[38]將Передацкий工作及此兩文的條件作出聯系，說明對於這一類方程有諸開集 G_k 存在，組成遞降趨零序列，而在 G_k 外軌綫具有某種特性。比對在文[30]所謂“非臨界而均勻”的性質，亦即文[32]稱為軌綫在域 Γ 內滿足條件(A)如下：

條件(A):“對於每個給定有界域 H_0 ($H_0 \subset \Gamma$) 及整數 k ，可指出 T_k ，只要 $t_0 \geq T_k$ ， $x_0 \in \Gamma \setminus G_k$ ，當 $t \in [t_0 - T_k, t_0 + T_k]$ 時這一段軌綫 $x(x^0, t_0, t)$ 不會完全包含在 H_0 之內”。

(G_k 表點集: $|x| < h_k$ ，當 $k \rightarrow \infty$ 時 $h_k \rightarrow 0$)

2. 一致漸近穩定。[40] 定義：若零解除已經適合漸近穩定定義之外，且當任何 $t_0 \in I$ ，及任何初值 x^0 在吸引域 G_δ 之內，對於已給任何數 η ，若可指出 $T(\eta)$ ，使當 $t \geq t_0 + T(\eta)$ 時有 $|x(x^0, t_0, t)| < \eta$ 則零解稱為一致漸近穩定(關於 t_0 及關於 x^0) 由此定義，若在李雅普諾夫定理 I 推論中(即所謂漸近穩定定理)，引入一致漸近穩定這概念，則得可逆定理如下：

若零解在域 H_0 內一致漸近穩定，其間 $H_0 \subset G$ ，則在 H_0 存在有正定號函數 $v(x; t)$ ，容許無窮小上限，其全導數 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)}$ 在 H_0 為負定號；而且 $v(x; t)$ 具有連續且對於 $t \in I$ 一致有界的各一階偏導數。若再假設 $f(x; t)$ 在域 $H_1 \supset H_0$ 關於 $t \in I$ 為一致連續，則 $v(x; t)$ 在 $H_0 \times I$ 內有一致有界的各階各偏導數。

故可以說：李雅普諾夫漸近穩定定理中 v 函數的條件，是零解為一致漸近穩定的充要條件。

關於此款之討論，前人文獻很豐。老早在文[40]已解決了充分且必要條件，但該文假設 $f \in C^1$ 而 $v(x; t)$ 亦屬於 C^1 ，文[31][33]指出一致穩定的條件(A)與一致漸近穩定的聯系，其中列舉各種定義下的穩定性。文[57]也開列出一套，其中包括文古典的結果較多。文[58]利用核積分算子，證明在歐氏空間存在有 $v \in C^\infty$ ，[但在無窮維空間，只能証 $v \in C_0$]。

由上述各結果，可以推論：在漸近穩定的定義下，而不要求“一致”，則在李雅普諾夫的定理中的條件是過強的，還可能有較弱的條件，文[24]指出某一類型的非一致漸近穩定即要求有：

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(x^0, t_0, t) < L[B(x^0, t_0), (t - t_0)],$$

其間 $B(x^0, t_0) > 0$ ， L 在 $(-\infty, \infty)$ 為嚴格遞降函數，於是得充要條件為：有定負函數 $v(x; t)$ 存在，且有某 $r > 0$ ，使當 $\sum x_i^2 < r$ 時，有 $-1 < v(x; t) < 0$ 。

3. 對於初值 x^0 一致漸近穩定。若零解已經適合漸近穩定的定義之外，且對於已給 t_0 及 η ，若可指出 $T(\eta, t_0)$ 使當 $t \geq t_0 + T(\eta, t_0)$ 時有 $|x(x^0, t_0, t)| < \eta$ ，其間 x^0 為在域 H_0 內任何點。如此則特別稱這零解為對於初值 x^0 的一致漸近穩定。在此定義下，可刻畫出穩定域較明確的結果[32]：

若在域 H 內存在有正定號函數 $v(x; t)$ 容許無窮小上限，而 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)} \leq 0$ ，且 $\sup[v(x; t) \text{ 在域 } H_0, t \in I] < \inf[v(x; t) \text{ 在域 } H \setminus H_1, t \in I]$ ，

其間 $\bar{H}_0 \subset H_1$, $\bar{H}_1 \subset H$, 且对于任何小 $\eta > 0$ 有

$$\int \sup_{(1)} \left(\frac{dv}{dt} \right) dt = -\infty, \text{ 这里 } \sup \text{ 在域 } \{x \in H, \|x\| \geq \eta\} \text{ 内取值.}$$

[这里及此后用記号: $\|x\| = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$] 如此則零解为对于 x_0 的一致渐近稳定, 且对于 t 的一致稳定。

其逆定理亦真, 耳当 $\|x\| < H_1$, $t \in I$ 时, $v(x; t)$ 有一阶各連續偏导数。

1. 指数律渐近稳定。已給任何 $\varepsilon > 0$, 若存在有 $\lambda > 0$ 及 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使 $|x(x_0, t_0, t)| < \varepsilon \exp(-\lambda(t-t_0))$, 其間 $|x_0| < \delta$, $t \geq t_0 \in I_0$ 則零解称为指数律的渐近稳定。在此定义下,

就綫性組而論函数 v 与 $\frac{dv}{dt}$ 适合如下估值:

$$C_1 \|x\|^2 \leq v(x; t) \leq C_2 \|x\|^2, \quad \frac{dv}{dt} \leq -C_3 \|x\|^2, \quad \text{各 } \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leq C_4 \|x\|, \quad \text{这里 } C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ 为正数,}$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \text{ 表绝对值, 逆定理亦真:}$$

此类稳定也有称之为“对于初步近似的渐近稳定”, 因为若方程組(1)有这样的指数律渐近稳定, 而附加余項 $R(x, t) = o(\|x\|)$, 則所得的新方程組仍是稳定。这样一来, 凭初步近似而决定其全部 $f(x; t) + R(x; t)$ 的性质, 通常說做“粗略”性质。

例如文[17]取 $|R| \leq \|x\| \varphi(t)$, 其时 $\varphi(t)$ 为中值有界, 即对于一切 $t_0 \geq 0$ 有 $T > 0$, 使

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(\xi) d\xi < \text{常数 } \gamma; \text{ 又例如文 [11][18] 若取足够小的 } R, \text{ 則更能够保持一致渐近稳定的性质。}$$

定的性质。

5. 周期系数及駐定方程組。若 $f(x; t)$ 为具有同一周期的 t 的周期函数或駐定情形, 則以上各結果有相当的簡化或得到更深刻的結果。这都可以作为特种推論, 附此提及, 此后常有这种情形, 再不必縷述。若 f 为不同周期的 t 的函数, 甚至为概周期函数, 則因只用一条概周期軌綫, 常有可能稠密地填充某些有限区域, 故留待下节全局稳定討論。

6. 不稳定性。其次, 設已知零解为不稳定, 求函数 v 存在的充分条件。在文[20]已解答駐定組的情形。文[30]引入条件(A) [見款 1] 的概念, 則得結果如下:

若零解在适合于条件(A)的域 Γ 內为不稳定, 則在每个有界域 H_0 內 ($\bar{H}_0 \subset \Gamma$), 李雅普諾夫不稳定性的定理 II 的逆定理成立, 且 v 有連續的一阶各偏导数, 当 $t \in I$ 在 H_0 一致有界。

又若 $f(x; t)$ 在 $x \in H_0$ 內关于 $t \in I$ 为一致連續, 則当 $t \in I$ 时 v 有任何阶各偏导数在 H_0 內一致有界。

李雅普諾夫定理 III 及 Ч.раев 关于不稳定性的定理是可逆的, 即是說, 該两定理所开列条件, 为不稳定性的充要条件, 且 v 的光滑度与 $f(x, t)$ 的連續性关系, 仍如上述。証明見文[16], [34]。

7. 在临界情形 v 存在的問題。在第一临界情形, 李雅普諾夫原著在駐定情形已經具

体写出各种 v 。這問題在十年前已經有很多探討，總結在流行書本，近年對於時滯方程組，文[4]也寫出 v 。又文[9]把第一臨界情形推廣到 k 個 0 特征根，其結果顯然反映着 $v_1 + v_2$ 的兩部分趨勢——對應於零根這一部分的組要求為穩定，且其方程的右邊不受對應於負實部根這一部分的各變元的影響。

8. 函數 v 的構成。關於函數 v 的一般作法，在文[30], [34] 引用積分曲管（即域 $\{f(u(p, \delta), t)\}$ 的定義 [例如見涅梅茨基定性論]，所作出 v 如 $v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{kl} v_{kl}$ 的形式，但這種作法在奇點的很小鄰域才成立。

文[20]，舉出在漸近穩定域 A 內， v_1 為偏微分方程：

$$\sum \frac{\partial v_1}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n) = \rho(x)(1 + \sum f_i^2)(1 + v_1)$$

的解。這裡基本函數 $\rho(x)$ 可取為定號函數，

且 $\int_0^{\infty} \rho(x(s, x_0)) ds < k(x_0) < +\infty (x_0 \in A)$ 。然後令 $v = \ln(1 + v_1)$ ，此法只當能預先估計

趨零的解的遞降率時，作法才有效，文里舉兩例(1) 若 $x^2(s, x_0) < \frac{N}{s^\alpha}$ ，在充分大的 $s > S$ ，

$\alpha > 0$ ，則取 $\rho(x) = (x^2)^k$ ，其間 $ka > 1$ ， $ds/dt = 1 + (f, f)$ 。例(2)

若 $x^2(s, x_0) < \frac{M}{\ln s}$ ，則取 $\rho(x) = x^2 \exp\left(-\frac{m}{x^2}\right)$ 其間 $\frac{m}{N_1} > 1$ ，

文[6]用 Hurwitz 的 Δ 來表示出 v 使

$\frac{dv}{dt} = -2\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum x_i^2$ 。此表示公式如文內所說可用來作各種估值，例如時滯方程的時滯界限。

較為簡易的例子可舉文[41]。若在 f_i 為綫性的情形，已知零解為指數律漸近穩定，設已知基解組 $\{x_{ij}(t, t_0)\}$ ， $x_i(t_0, t_0) = \delta_{ij}$ ，則取任何正定號的齊 m 次式 $w(x_1, \dots, x_n, \tau)$ ，

令 $y_i = \sum x_{ij}(\tau, t)x_j$ ，可作出 $v = \int_0^{\infty} w(y_1, \dots, y_n, \tau) d\tau$

更若 f_i 為常數系數 p_{ij} ，則取 $y_i = \sum x_{ij}(\tau)x_j$ 代入 $\int_0^{\infty} w(y_1, \dots, y_n) d\tau$ 。

二、全局穩定

1. 全局一致漸近穩定。設 G 為某給定閉域或全個空間，若要求對於 t_0 及 $x^0 \in G$ 一致漸近穩定，先引進無窮大下限的概念：

若在域 G 上存在有連續函數 $w(x)$ ，適合下條件：

$$v(x, t) \geq w(x), \quad x \in G;$$

又當 $\max\left(\rho(0, x), \frac{1}{\rho(G \setminus G, x)}\right) \rightarrow \infty$ 時 $w(x) \rightarrow \infty$ ，則說 v 在 G (的界上) 容許無窮大下

限。若 G 为全空間，則 $v(x, t)$ 为无穷大函数。

A. 由此定义，文^[12], ^[13], ^[14] 証明下列定理在全个空間成立。文^[36]証明它在任何域 G 成立。

若有函数 $v(x, t)$ 在 G 上为正定号，容許无穷小上限，又容許无穷大下限，且 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)}$ 为負定号，則零解在 G 上为全局一致漸近稳定。其逆定理亦真：

B. 文^[58]証明：若在全空間內有正定号函数 $v(x, t)$ 使当 $\|x\| \rightarrow 0$ 及 $+\infty$ 时对于 $t \geq 0$ 一致地有 $v(x, t) \rightarrow 0$ 及 $+\infty$ ，而 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)}$ 为負定号，則零解为全局一致漸近稳定。其逆定理亦真。且 $v \in C\infty$ 。

C. 文^[12]在駐定情形証明：若存在有无穷大的正函数 $v(x)$ 及某集 M 使

$$dv/dt < 0 \text{ 在 } M \text{ 外}; \quad \frac{dv}{dt} \leq 0 \text{ 在 } M \text{ 上。}$$

該集 M 与 $v=c$ ($c \neq 0$) 的任何交集不含有半正軌綫，則零解在全空間为全局漸近稳定。此定理在实例上很好使用。

2. Айзерман 問題。由于自动調节系統在技术上的需要，提出 Айзерман 問題，推动李雅普諾夫函数 V 的理論。向前发展。文^[39]解决了两个方程的問題，开始把 v 表作一个二次齐式及非綫性部分的积分式的和。此后在自动調节工作中，常常应用此方法。概括來說，設方程組

(1') $\frac{dx}{dt} = Ax + B\Phi(x)$, x 表矢量, $A, B, \Phi(x)$ 表方陣。因为所提出的初值 x^0 可能很大, 故初步近似的研究方法无效, 但可以預設一个二次齐式 $\sum c_{ij}x_i x_j$ 及矩陣 $[\alpha_{ij}(B)]$ 使

$$v(x, t, B, \Phi) = \sum_{ij=1}^n c_{ij}x_i x_j + \sum_{ij=1}^n \alpha_{ij} \int_0^{x_j} \varphi_{ij}(\xi) d\xi$$

按照各題对于 v 及 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)}$ 的符号要求，分別选择各样适宜的 c_{ij}, α_{ij} 。此方法大可以灵活运用。

如文^[8]用 $\int_0^x -\frac{y}{0}$, 又各文^[7]用 $\int + \left[\begin{matrix} - \\ \cdot \end{matrix} \right]^2$

这問題的二阶組早已經解决了，結果說明这类型二阶組不容許有周期运动，且与在有界实軸上非綫性部分的性态无关。近年文^[45], ^[46], ^[48] 一連串解决此問題的三阶組且証明容許有周期解，其总结在文^[49]。在其中所划分的二十二类当中，首先用上列的 $v(x, t)$ 分別提取出大多数的全局稳定情形，腩下来的几种，則用定性方法和不动点論討論其有界解，周期解及不稳定性。基本已解决了这三阶問題。

在自动調节工作中早已解决的 Лурье 問題所用方法和 Айзерман 問題有些类似。文^[55], ^[56] 討論 n 阶組

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \alpha \rho(\sigma), \quad \text{其間 } \frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - \rho(\sigma)$$

其間 $\rho > 0$, $p(0) = 0$, $p(6) > 0$, a, b 为已知矢量, $\det(A - \lambda E) = 0$ 的各根实部皆为負, 解此問題用如下形式的

$$v = (Hx, x) + \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma \quad (H^* = H).$$

3. 一般全局稳定問題, 定性論起主导作用。这是文[62]很強調的見解。文里認為要証明沒有周期解时, 象在文[39]偶尔用 v 函数; 縱使如此, 只能起配合作用而已。文[62]更評論文[12]說: “解 $x(t)$ 在 $-\infty < t < +\infty$ 一般是不可开拓的, 光是靠用 $v > 0$, $v' < 0$, $v \rightarrow \infty$ 当 $x^2 \rightarrow \infty$ 来保証全局稳定性, 其間 v 的存在, 实成問題。” 文[14]对此評論作了答复。在 $t \geq t_0$ 时, 所考虑的全局稳定, 应用[40]的結果来証明其极大函数 v 的存在。文[14]末段举出时滯方程的全局稳定, 显然暗示不应该把 t 向左开拓的。

4. 概周期軌綫的全局漸近稳定。这里不打算叙述在定性論中常见的泊瓦松稳定, 因为涅梅茨基定性論一书中第五、六章已作了很好的闡明。本文只举最近文[26]的另一套意义: 設 $f(x; t)$ 为 t 的概周期函数, 且設在每个有限域內, $f(x; t)$ 对于 t 一致連續。若方程組(1)具有如下性質的唯一概周期解 $x = \varphi(t)$: 1° 对于每 $\varepsilon > 0$ 可指出 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使当 $|x^0 - \varphi(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, $t \geq t_0$ 有 $|x(x^0, t_0, t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, 2° 在相空間每一个有限域內, 当 $t - t_0 \rightarrow +\infty$ 时, 对于 $t_0 > -\infty$ 一致地有 $|x(x^0, t_0, t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ 。則組(1)称为具有收斂性。由于这收斂性, 便是証明这唯一解 $x = \varphi(t)$ 为全局漸近稳定, 見文[61]。

組(1)具有收斂性的充分且必要条件为: 存在有两个函数 $v_1(x; t)$, $v(x; y; z; t)$ 具有下列的性質 (这里 x, y, z 都表 n 維矢量):

1° 当 x, t 取有限值, $v_1(x; t)$ 为連續实函数; 在有限区域 $\{x\}$ 內, v_1 对于 $t < +\infty$ 一致有界; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对于 $t > -\infty$ 一致地有 $v_1 \rightarrow +\infty$; 更且 $\left(\frac{dv_1}{dt}\right)_{(1)}$ 在域 $x \geq y$ 內为非正号函数。

2° 在有限域 $z < \rho$ 內函数 $v(x; y; z; t)$ 为对于 z 的正定号函数, 对于 z 容許无穷小上限; 在空間 $R^n \times R^n \times R^n$ 的有界域內 $v(x; y; z; t)$ 的各偏导数連續且对于 t 一致有界; 且有

$$w(x; y; z; t) = \frac{\partial v}{\partial t} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x; t) + \frac{\partial v}{\partial y_i} f_i(g; t) + \frac{\partial v}{\partial z_i} (f_i(g + z; t) - f_i(g; t)) \right],$$

在每个有限域 $|z| < \rho$ 內, 函数 w 对于 z 为負定号。

5. 全局有界解。設方程組(1)如前, 但不規定 $f(0, t) = 0$, 若任給 $\varepsilon > 0$ 及 $t_0 \in I$ 可指出 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ 使凡 $|x^0| < \varepsilon$ 当 $t > t_0$ 有 $|x(x^0, t_0, t)| < \delta$, 則称組(1)的一切解有界; 若 δ 与 t_0 无关, (即所指出的 $\delta(\varepsilon) > 0$), 則称組(1)的一切解一致有界; 又若已給 $\varepsilon > \varepsilon^1 > 0$ 可指出 $\delta(\varepsilon^1) > 0$, $t(\varepsilon, \varepsilon^1) > 0$, 使凡 $t_0 \in I$, $|x_0| < \varepsilon$ 当 $t \geq t_0 + \tau$ 时有 $|x(x^0, t_0, t)| < \delta$, 則称組(1)的一切解毕竟有界。文[59]的結果如下:

設 N 为原点某一邻域, 以 N^c 表示 N 的补集 $R^n \setminus N$, 設在 $N^c \times I$ 存在有正定号函数 $w(x; t)$ 适合局部Lip条件, 且: 1° 若 $|x| \rightarrow \infty$ 时对于 t 一致地有 $w(x; t) \rightarrow \infty$, 而在 $N^c \times I$ 有

$$\frac{dw}{dt} \leq 0, \text{ 则 (1) 的一切解有界. } 2^\circ \text{ 此外若更对于原点的任一开球邻域 } S \supset N \text{ 使 } w(x; t)$$

在域 $(N^c \cap S^c) \times I$ 内有界, 则这一切解一致有界. 3° 若适合条件 1°, 2° 但 $\frac{dw}{dt}$ 为负定号, 则这一切解毕竟有界。

三、时滞微分方程組的稳定性

1. 引論。近来由于自动控制与无线电学科的发展, 时滞微分方程組成为现代的尖端学科, 书[42]把1951年以前这学科的发展作了出色的总结, 其中专論一阶二阶綫性方程的解折理論。在这理論的基础上, 本文只叙述时滞方程組零解的稳定性, 李雅普諾夫函数 v 及泛函 V 。先論时滞为 t 的函数 $\tau_{ki}(t)$ 的情形, 設时滞微分方程組:

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i\{x_j(t - \tau_{kj}(t)), t\}, \quad (i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$$

这里 f_i 为其变元的連續函数。

設初始集 $E(t_0)$ 由 t_0 点及小于 t_0 的各差值 $t - \tau_{ki}(t)$ 所組成。(这里 $t \geq t_0$)。在 $E(t_0)$ 上設初始函数 $x_j^0 = \varphi_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) 当 $t \in E(t_0)$ 为連續函数。又設各 f_i 适合解唯一性条件, 所得的解为 $\{x_j(\varphi_j, t_0, t)\}$ 。文[53]亦即[54]作稳定的定义如下:

若对于每一个 $\epsilon > 0$ 及一切 $\bar{t}_0 \geq t_0$, 可求得 $\delta(\bar{t}_0, \epsilon)$ 使在初始集 $E(\bar{t}_0)$ 內, 任何初始函数 $\varphi_j(t)$, 适合 $|\varphi_j(t) - x_j(\varphi_j, \bar{t}_0, t)| < \delta(\bar{t}_0, \epsilon)$ 的, 随着有

$$|x_j(\varphi_j, \bar{t}_0, t) - x_j(\varphi_j, \bar{t}_0, t)| < \epsilon, \quad (j = 1, \dots, n), \text{ 当 } t \geq \bar{t}_0.$$

則解 $\{x_j(\varphi_j, t_0, t)\}$ 称为稳定, 若更有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_j(\varphi_j, \bar{t}_0, t) - x_j(\varphi_{j_0}, t_0, t)| = 0,$$

則解 $\{x_j(\varphi_j, t_0, t)\}$ 称为渐近稳定

文[63]更推广之, 作出时滞方程的全局稳定及拟渐近稳定的定义。

2. 微分差分方程組的稳定性。当(2)式的各 τ_{ki} 为常数, 則得微分差分程組:

$$(2') \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i[x_j(t - \tau_{kj}), t] \quad (i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m)$$

則李雅普諾夫原著定理, 立即可照搬进来。

1° 稳定性定理: 若能找出正定号函数 $v(x; t)$ 使 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(2')}$ 为负常号或 0, 則(2')的零解为稳定。

2° 渐近稳定性定理: 若能找出正定号函数 $v(x; t)$, 且容許无穷小上限, 又使

$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(2)}$ 为負定号, 則(2')的零解为漸近稳定。

注一。以上两定理, 函数 v 在域 $\{t > t_0, |x_i| < h\}$ 定义, 而 $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(2)}$ 則在域 $\{t > t_0, |x_i| < h, |x_j(t - \tau_{j\alpha})| < h\}$ 內考虑。

注二。以上两定理为不可逆, 在上述文献中写出一个例子

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau) \text{ 与 } \frac{dx}{dt} = k[ax(t) + bx(t - \tau)]$$

在参数平面 (a, b) 上的稳定域图形, 两者不相同。

3° 不稳定性定理: 若找出函数 $v(x; t)$ 在原点某个 h 邻域內适合 1) $v(0; t) = 0$; 2) 无论 h 如何小, 可求得与 t 无关的区域 U , 使在 U 內有 $v > 0$; 3) 在 U 內 v 有界; 4) 在 U 內

$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(2')} > 0$; 5) 在另一区域 $U_\alpha = \{x | v > \alpha > 0\}$ 內,

$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(2')} \geq 1 > 0$ 。則(2')的零解为不稳定。

3. 具有常数系数的綫性部分的微分差分方程組。首先举出常系数綫性微分差分方程組:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij,k} x_j(t - \tau_{j,k}), \quad (i = 1, \dots, n)$$

以 $k_{ij} e^{-\lambda \tau_{j,k}}$ 代入 x_j , 立即得特征方程:

$$\det \left(\sum_{j=1}^m a_{ij,k} e^{-\lambda \tau_{j,k}} - \delta_i^j \lambda \right) = 0$$

設有 p 个根的实部为負, q 个实部为正, s 个实部为零, 即 (p, q, s) 可作如下分类: $(\infty, 0, 0)$ 为广义稳定結点或焦点; $(0, \infty, 0)$ 为广义不稳定結点或焦点; $(p, q, 0)$, $p \neq 0, q \neq 0$ 为 p 級鞍点。但比拟于心点的 $(0, 0, \infty)$ 不会存在。

老早已知一切 $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\alpha < 0$ 为漸近稳定情形。文^[52]証明若有限多个单根的实部为零而其余一切的 $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\alpha < 0$, 則亦得稳定。但若有一根实部为正, 文^[19]在附加条件之下, 得証不稳定性。

其次, 在上列方程組的右边再可加上变系数的綫性項或非綫性項, 十余年前已有証明当所附加的項在某些条件之下, 且一切 $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\alpha < 0$ 的情形, 仍是漸近稳定。但与常微分方程組的稳定性問題, 有某些区别, 文^[3]所举的一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - ax(t - \tau) + F_2$$

虽然当在时滞界限內 $0 < \tau < \Delta$ 时, 綫性部分方程为稳定, 但也可选取 F_2 使在任何 $\tau > 0$, 非綫性方程不稳定。因此, 利用 v 函数作初步近似, 是否具有其粗略性?

4. 时滞方程与微分方程的等价。虽然二者之間有上述的区别, 但在时滞界限 $0 < t < \tau$ 之內, 时滞方程与其对应的微分方程具有密切的等价性关系, 文^[3], ^[1]詳細开列出非綫性方程等价性九条定理。从此李雅普諾夫稳定性理論有各样的推广。例如文^[4]把李

雅普諾夫第一临界情形推广到时滞方程組，即是說把原来的 m, g 推广为 $m, g+1$ ，这里时滞部分 $Y^0(0, \dots, 0, x) = lx^m$ ，非滞部分依然取 gx^m ，〔比較下文第 8 款照原用一个 g 的結果〕又文〔2〕証明当特征根实部为負且 $|a_{ii} + b_{ii}e^{i\omega} - \delta_{ii}(iy)| \neq 0$ ，(ω 为实数， $y \neq 0$) 的情形为“无条件稳定”。至于中型方程的等价性，文〔5〕只論一阶而已。

5. 李雅普諾夫泛函 $V[y(-\theta), t]$ 。我們还可以把时滞函数推广到依赖于別一變元 θ ， $0 \leq \theta \leq h$ ，在此区間內定义 n 个片段連續函数 $y_1(-\theta), \dots, y_n(-\theta)$ ，或簡写为矢函数 $y(-\theta) = (y_1(-\theta), \dots, y_n(-\theta))$ 。在这矢函数空間

$R^{(h)}: \{y(-\theta); \theta \in [0, h]\}$ 之內，定义泛函函数 $F(g(-\theta))$ ，这一个抽象概念很早已經有提出了(例如在文〔47〕591 頁及以后各頁指出这概念在自动調节应用及軌綫图解)。現討論如下的时滞微分方程組：

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i[x(t-\theta); t] \quad (i=1, \dots, n)$$

这里各 F_i 为在空間 $R^{(h)}$ 所定义的泛函。在空間 $R^{(h)}$ 內取范数記号：

$$\|y(-\theta)\|^{(h)} = \sup\{|y_i(-\theta)|; \theta \in [0, h], i=1, \dots, n\},$$

以区别于在 R^n 內矢量 x 所取的范数 $\|x\| = \sup_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}, x \in G$ 。

設在此两种尺度 $\|\cdot\|^{(h)}, \|\cdot\|$ 意义之下，各泛函 F_i 在 $R^{(h)}$ 为片段連續且适合 Lip 条件。同样，在此两种尺度之下，可以仿照第一节写出各稳定性的定义，正定号泛函的定义，容許无穷小上限定义等，见〔27〕。但在建立零解为稳定这一定义，須要补充如下假設：

若在初始集 $E(t_0)$ 內所給的初始函数 $\psi(t)$ 是在 $t < t_0$ 定义的，当然对应于某一个 $x^0(t_0 - \theta)$ 。但若 $\psi(t)$ 在 $t > t_0 + h$ 定义的，只有很少数的这样扰动能够在 $E(t_0)$ 內有其对应的初始函数。然而不論如何，下文只考虑在 $E(t_0)$ 內有其对应初始函数的情形。

再者，我們沿 (3) 式的軌綫 $x[x^0(t_0 - \theta_0), t]$ 取右上导数 $\overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{(3)}$ ，这里 ΔV 涵意为以 $x[x^0(t_0 - \theta_0), t, \theta]$ 代入 V 內的 y 所产生的变差。若存在有連續函数 $w_1(r) > 0$ ，当 $r \neq 0$ ；且在区域 $\{\|x[x^0(t_0 - \theta_0), t - \theta]\|^{(h)} < H, t \geq 0\}$ 內有

$$\overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{(3)} < -w_1\{\|x[x^0(t_0 - \theta_0), t - \theta]\|^{(h)}\}$$

則此右上全导数称为負定号函数。

由此，文〔27〕，〔32〕推得如下各結果：

(甲) 可逆的定理。若从方程組 (3) 可找出泛函 $V[y(-\theta), t]$ 在域 $\{\|y(-\theta)\|^{(h)} < H, t \geq 0\}$ 內为正定号泛函，容許无穷小上限，且 $\overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{(3)}$ 为負定号函数，則 (3) 的零解为漸近稳定。

若更适合下条件(文〔28〕)：

$$\inf(V, \text{当 } \|y(-\theta)\|^{(h)} = H_1) > \sup(V, \text{当 } \|y(-\theta)\|^{(h)} = H_0), (H_0 < H_1 < H)$$

則初始函数的域： $\{\|x^0(t_0 - \theta_0)\|^{(h)} < H_0\}$ 在 $x = 0$ 的吸引域內，而零解(对于初始函数及对于 t_0)一致漸近稳定。

逆定理亦真。而且在域 (H_0) 內存在正定泛函 V 容許無窮小上限;對於 $y(-\theta)$ 適合Lip條件;又有右導數 $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ 存在,在域 (H_0) 內為負定泛函。

(乙)若只論漸近穩定的充分條件,則有下列兩結果:

1°若有泛函 $V(x(t-\theta), t)$ 容許無窮小上限,且可找出連續函數 $f(r)$, $\varphi(r)$, 當 $r \neq 0$ 時取正值, 又有數 $0 \leq h_1 \leq h$ 及 $0 \leq h_2 \leq h_3 \leq h$ 使

$$V[x(t-\theta), t] \geq f[\|x(t-\tau)\|^{(h_1)}], \quad 0 \leq \tau \leq h_1$$

$$\overline{\lim}_{dt \rightarrow +0} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{(3)} \leq -\varphi[\|x(t-\tau)\|^{(h_3, h_2)}], \quad h_2 \leq \tau \leq h_3$$

則(3)的零解為漸近穩定。

2°若有泛函 $V[x(t-\theta), t]$ 且可找出連續函數 $w(r)$, $w_1(r)$, $w_2(r)$, $\varphi(r)$, 其間 $w(r)$ 與 $\varphi(r)$ 當 $r \neq 0$ 時取正值, $w_1(r)$, $w_2(r)$ 當 $r \geq 0$ 時為單調, 且 $w_1(0) = w_2(0) = 0$,

$$w[\|x(t)\|] \leq V[x(t-\theta), t] \leq$$

$$\leq w_1[\|x(t)\|] + w_2\left(\left\{\int_0^h |x(t-\theta), t|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\overline{\lim}_{dt \rightarrow +0} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{(3)} \leq -\varphi[\|x(t)\|]$$

則零解為漸近穩定。

(丙)最後,若零解為指數律漸近穩定,即軌綫適合于:

$$\|x[x^0(t_0-\theta_0), t_0, t]\|^{(h)} \leq B\|x^0(t-\theta_0)\|^{(h)} \times \exp\left[-\alpha(t-t_0)\right], \quad t \geq t_0$$

$$\|x^0(t-\theta_0)\|^{(h)} < H_0 = HB^{-1}$$

則可作出泛函 $V(y(-\theta), t)$ 適合Lip條件且

$$C_1\|y(-\theta)\|^{(h)} \leq V[y(-\theta), t] \leq C_2\|y(-\theta)\|^{(h)}$$

$$\overline{\lim}_{dt \rightarrow +0} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{(3)} \leq -C_3\|y(-\theta)\|^{(h)}.$$

由此可討論非綫性方程組

$$\frac{dx}{dt} = F[x(t-\theta)] + R[x(t-\theta), t]$$

的初步近似法。若取其綫性部分 $F(x(t-\theta))$, 則得特征方程

$$\det[(F_{ij}) - \lambda E] = 0, \text{ 其間 } F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & e\lambda\theta & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

若一切根 $\operatorname{Re} \lambda_i < -r < 0$, 則可作 $V(x(t-\theta), t)$, 由此可指出 $\beta > 0$, 若非綫性部分

$|R_i(x(t-\theta), t)| \leq \beta\|x(t-\theta)\|^{(h)}$, 則非齊次組為漸近穩定。文^[17]更推廣為

$|R_i[x(t-\theta), t]| \leq \varphi(t)\|x(t-\theta)\|^{(h)}$, 其間 $\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \varphi(\xi) d\xi < \beta$. 初步近似與經常擾動系

的穩定, 其處理方法時相聯系。

文[31], [18], [51], [10]求得这些处理的类似結果。

6. 李雅普諾夫函數 $v(x, t)$ 。正如款 1 的微分差分方程組一样, 我們可以把李雅普諾夫原来定理照搬进去, 其文上虽然成立, 但效用很微, 甚至于无用: 例如一个一阶时滯方程具有振动性态且适合李雅普諾夫的漸近稳定条件的情形, 不会存在。因此要从另一方面考虑李雅普諾夫泛函 V 。文[50]与第 6 款观点相类似, 但所作出的是函數 $v(x, t)$, 討論下方程:

$$(3') \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i[x_i(t); x_{jk}(t-\tau); t], \quad i=1, \dots, n;$$

$$j=1, \dots, n, \quad k=1, \dots, m$$

其間泛函 F_i 在域 $G\{\|x(-\tau)\|^k < H, t \geq t_0\}$ 連續有界, $F_i(0; 0; t) = 0$, 而 $m \cdot n$ 个函數 $x_{jk}(t-\tau)$ 在区間 $0 \leq \tau \leq h_{jk}(t)$ 內定义, $0 \leq h_{jk}(t) \leq \text{常数 } h$ 。

設函數 $v(x, t)$ 在域 G 內有連續各阶偏導數, 又由(3')得

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(3')} = U[x_i(t); x_{jk}(t-\tau); t]$$

設矢函數集 $\{y(\sigma)\}$ 适合下列条件: 当每 $t > t_0$ 时有

$$(A) \quad \begin{cases} y(t) = x(t), & x(t) \text{ 为 } (3') \text{ 的解} \\ v[y(\sigma); \sigma] \leq v[x(t); t], & \sigma \leq t \end{cases}$$

則有如下的定理: 若有正定号函數, $v(x; t)$, 由(3')求得 U , 若 $\{y(\sigma)\}$ 适合条件 (A), 而泛函 $U(y_j(\sigma); y_{jk}(\sigma-\tau); \sigma)$ 为負或恒等于 0, 則(3')的零解为稳定。

此外, 若 $v(x, t)$ 容許无穷小上限, 而 $U(y_j(\sigma); y_{jk}(\sigma-\tau); \sigma)$ 为負定号, 則此零解为漸近稳定。

在上述条件(A)中集 $\{y(\sigma)\}$ 的任意程度很大, 因而定理的应用功效遂微。我們可用如下条件 (B^k) , $k=1, 2, \dots$, 把 $\{y(\sigma)\}$ 的性質, 逐步深刻化:

$$(B^k) \quad \begin{cases} y(t) = x(t); & v[y(\sigma); \sigma] \leq v[x(t); t], \quad \sigma \leq t \\ |y_i(\sigma_2) - y_i(\sigma_1)| \leq S_i^{(k)} |\sigma_2 - \sigma_1|, & (i=1, \dots, n), \sigma_1, \sigma_2 \in [t_0, t] \end{cases}$$

其間 $S_i^{(k)} = \sup |F_i[y_j(t); y_{jk}(t-\tau); t]|$, 而 $\sup$ 号內的 y 适合于其前一个关系 (B^{k-1}) ; 其最前一个

$$S_i^{(1)} = \sup |F_i[x_j(t); x_{jk}(t-\tau); t]|。$$

該文[50]列举各种具有調节参数的方程組, 通过 (B^k) 的逐步逼近, 計算这些調节参数的稳定域, 逐步扩充之。

7. 不稳定条件

在最普遍形式 (3) 的时滯方程組, 其右边以 R^h 空間的泛函 X_i 表示者, 則文[65]已經成功証明了 Черасев 的不稳定性定理及李雅普諾夫的不稳定性定理 I, II, 在泛函空間 R^h 照样地成立。在此文第二部分还有初步近似定理。該文把方程組写成最普遍形式 (4)

〔见下面第8款〕。若綫性泛函部分适于局部 Lip 条件 (系数 L 足够小), 則零解为不稳定。

8. 第一临界情形的推广

文〔64〕作出时滞方程的第一临界情形, 考虑一般形式:

$$(4) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \int_{-\tau}^0 x_j(t+\vartheta) d\eta_{ij}(\vartheta) + X_i[x_1(t+\vartheta), \dots, x_n(t+\vartheta)]$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

这里各 $X_i(x_1(\vartheta), \dots, x_n(\vartheta))$ 为在函数空間 $\{x_i(\vartheta); -\tau \leq \vartheta \leq 0\}$ 的非綫性泛函。其初步近似組的特征方程

$$\det \left[-\delta_{ij}\lambda + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda\vartheta} d\eta_{ij}(\vartheta) \right] = 0$$

的根 $\lambda_1 = 0$, $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -2\alpha < 0$, $j = 2, 3, \dots$ 。在这函数空間里, 仍可仿拟李雅普諾夫的方法, 作出一个变换, 把方程右边化成为 $gx^m + \dots$ 之形。所得的結論与李氏的第一临界情形的結果相同。

四、在刚性空間动力系統的稳定

1. 单参数連續群。模仿微分方程組所定的动力系統在欧氏空間內 R^n 內所組成的单参数运动群, 可以把这概念推广到抽象的尺度空間 R 。設在 R 內有尺度 $\rho(\dots)$, 用这尺度, 按照下列三个性质把动力系統作为算子 $x(p, t)$ 的定义:

- 1) 空間 R 自身映象, 即: 若 $p \in R$, 則 $X(p, t) \in R$, $t \in (-\infty, +\infty)$ 。
- 2) 算子 $X(p, t)$ 对于 (p, t) 連續, 即: 已給 $\varepsilon > 0$, 可指出 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使当 $\rho(p, q) < \delta_1$, $|t_1 - t_2| < \delta_2$ 时有 $\rho(X(p, t_1) - X(q, t_2)) < \varepsilon$ 。
- 3) 群性:

$$X(X(p, t_1), t_2) = X(p, t_1 + t_2), \quad X(p, 0) = p.$$

由此可见 $\{X(p, t)\}$ 为参数 t 的連續群, 因而不有不变集 M , 用这集 M 代替未扰动运动的位置, 用这尺度 $\rho(\dots)$ 作出与第一节各种稳定性相模似的定义。在駐定情形的假設下, 文〔25〕,〔21〕等証明如下結果:

2. 局部稳定性。設在不变閉集 M 的微小邻域 $S(M, r)$ 可作为泛函 V :

(A) M 为稳定的充要条件为: 1° 已給任意小 $c_1 > 0$, 可指出 $c_2 > 0$ 使当 $p \in S$, $\rho(p, M) > c_1$ 有 $V(p) > c_2$; 2° 已給任意小 $r_2 > 0$ 可指出 $r_1 > 0$, 使当 $\rho(p, M) < r_1$ 有 $V(p) \leq r_2$; 3° 对于 $p \in S$, $t \geq 0$ 或对于凡令 $X(p, t) \in S$ 所有的 t , (在任指定 p), $V(X(p, t))$ 作为 t 的函数, 不随 t 而递升。

〔附注〕这里所取的 V , 是根据文〔60〕的假設:

$$V(p) = \sup_{t \geq 0} \rho[X(p, t), M].$$

以此为开端。下面各款所用的 \$V\$, 有些与此相关, 但不尽是。

(B) \$M\$ 为渐近稳定的充要条件为: 有泛函 \$V\$ 满足 (A) 的 \$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ\$, 此外对于任何 \$X(p, t) \in S, t \in [0, +\infty]\$ 有 \$V(X(p, t)) \rightarrow 0\$ 当 \$t \rightarrow +\infty\$。

(C) \$M\$ 为一致渐近稳定的充要条件为: 条件 (B) 此外有 \$\delta_1 > 0\$, 使当 \$t \rightarrow +\infty\$ 时, 对于 \$p \in S(M, \delta_1)\$ 一致地有 \$V(X(p, t)) \rightarrow 0\$。

(D) \$M\$ 为不稳定的充要条件为: 在 \$M\$ 的某一个邻域 \$S\$ 内有泛函 \$V\$ 满足下列条件: \$1^\circ\$ 泛函 \$V(p)\$ 在 \$S\$ 内有界; \$2^\circ\$ 在 \$M\$ 的任何小邻域最少有一点 \$P\$ 使 \$V(p) > 0\$; \$3^\circ\$ 对于任何 \$p \in S\$ 有

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W, \text{ 其中 } \lambda > 0, \text{ 而 } W \text{ 为在 } S \text{ 内的非负泛函。}$$

3. 大范围稳定性。作不变开集 \$A\$ 包含上述闭集 \$M\$ 在内, 即 \$M \subset A \subset R\$。则 \$M\$ 为一致渐近稳定且一致吸引, 而以 \$A\$ 为其渐近稳定域的充要条件为具备下列性质的泛函 \$V(p)\$ 及 \$\Phi(p)\$ 存在: \$1^\circ\$ \$V(p)\$ 定义并连续于 \$A\$, \$\Phi(p)\$ 定义并连续于 \$R\$; \$2^\circ\$ 当 \$p \in A, -1 < V(p) < 0\$; 当 \$p \in M\$ 有 \$\Phi(p) > 0\$; 当 \$p \in M\$ 有 \$\Phi(p) = 0\$; \$3^\circ\$ 对于充分小 \$r_2 > 0\$ 可指出 \$r_1, \alpha_1\$, 使当 \$\rho(p, M) \geq r_2\$ 同时有 \$V(p) < -r_1, \Phi(p) > \alpha_1\$; \$4^\circ\$ 当 \$\rho(p, M) \rightarrow 0\$ 时, 泛函 \$V\$ 与 \$\Phi\$ 皆趋于 \$0\$; \$5^\circ\$ 若有点 \$q \in M, q \in \bar{A} \setminus A\$, 则当 \$\rho(p, q) \rightarrow 0\$ 时 \$\lim V(p) = -1\$; \$6^\circ \left(\frac{dV}{dt} \right)_{t=0} = \Phi(p)(1 + V(p))\$。

若 \$\bar{A} \setminus A\$ 为真空集, 则 \$M\$ 在空间 \$R\$ 全局稳定。

4. 轨线 \$X(p, t)\$ 与 \$M\$ 的距离的估值。设在集 \$M\$ 之外给定具有如下性质的泛函 \$V(p)\$

$$\varphi_1(\rho(X, M)) \leq V(p) \leq \varphi_2(\rho(X, M))$$

这里函数 \$\varphi_1(x), \varphi_2(x)\$ 在 \$x \in [0, +\infty)\$ 定义, 且严格地由 \$0\$ 逆升至 \$+\infty\$, 则 \$\rho(X, M)\$ 的估值为:

$$\varphi_2^{-1}(V(p)) \leq \rho(X, M) \leq \varphi_1^{-1}(V(p)).$$

设在 \$M\$ 的邻域 \$S\$ 内有两个泛函 \$V_1, W\$, 具有下列四条件: \$1^\circ\$ 当 \$p \in S\$ 时 \$a, V_1^{k_1} \leq V_1 \leq aV_1^{k_2}\$, 其中 \$a_1, a_2, k_1, k_2\$ 为正数; \$2^\circ\$ 当 \$p \in S\$ 时, \$-bV_1^{k_1} \leq W \leq -bV_1^{k_2}\$ 其中 \$b_1, b_2, k_1, k_2\$ 为正数; \$3^\circ\$ 当 \$X(p, t) \in S, V[X(p, t)]\$ 连续可微, 且 \$\frac{dV_1}{dt} = W\$; \$4^\circ \lambda_i = \frac{k_i}{k_1} \geq 1 (i=1, 2)\$, 则 \$M\$ 为

渐近稳定。且 \$V[X(p, t)]\$ 的估值如下:

当 \$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1\$, 则 \$g^*(p, t) \leq V[X(p, t)] \leq g(p, t)\$

当 \$\lambda_1 = 1, \lambda_2 > 1\$, 则 \$g_1(p, t) \leq V[X(p, t)] \leq g(p, t)\$

当 \$\lambda_1 = \lambda_2 = 1\$, 则 \$g_1(p, t) \leq V[X(p, t)] \leq g_1^*(p, t)\$

这里

$$g(p, t) = [1 + (\lambda_2 - 1)(a_1 V_1^{k_1})^{\lambda_2 - 1} b_2 a_2^{-\lambda_1} t]^{\frac{1}{\lambda_2 - 1}} (a_2 a_1^{-1} V_1^{k_2})^{\frac{1}{\lambda_1}},$$

$$g_1(p, t) = \left(a_1 a_2^{-1} v_1 q - b_1 a_1^{-1} t \right) q_2^{-1} \quad * \text{表示把下标1,2对調写。}$$

此估值可以应用于多方面。如文[23]用此得出渐近稳定一系列条件。又如在书[22]用这估值方法可于有限时, 区間的技术稳定。

5. 抽象模型的作用 以上的单参数运动群算子, 是从常微方程組軌綫的实质抽象出来, 作为其零解稳定条件的模型。即是說, 若以軌綫 $x(x^0, t_0, t)$ 代替算子 $X(P, t)$, 以函数 $v(x(x^0, t_0, t), t)$ 代替泛函 $V(p, t)$, 零解代替 M , 便得一套常微方程零解的稳定条件, 也可得一套駐定系数偏微分方程組的稳定条件。

对于非駐定的常微組(1), 可引入新自变数 s 令 $ds = [1 + (f, f)]^{\frac{1}{2}} dt$ 原組(1)化为在空間 $R^n \times T$, ($T = (-\infty, \infty)$), 的駐定組:

$$dx/ds = (1 + (f, f))^{-\frac{1}{2}} f, \quad dt/ds = [1 + (f, f)]^{-\frac{1}{2}}$$

此时取 t -軸作为不变集 M , 故仍可得組(1)的解 $x=0$ 为稳定的另一套条件。但此方法不可施用于非駐定的偏微分方程。

6. 两参数运动族 循此抽象空間的概念, 再行推广, 作为(非駐定)偏微分方程組零解的稳定条件的模型。在尺度空間 Φ 作含两参数 t, t_0 的算子族 $\{U(\varphi, t_0, t)\}$ 的定义如下:

- 1) 对于 $t_0 \geq 0$, $\varphi \in \Phi$, 当 $t \geq t_0$ 时有 $U(\varphi, t_0, t) \subset \Phi$
- 2) 当 $t \rightarrow t_0 + 0$, 有 $U(\varphi, t_0, t) \rightarrow \varphi$
- 3) 若 $\varphi \in U(\varphi, t_0, t_1)$ 則 $U(U(\varphi, t_1, t), t) = U(\varphi, t_0, t)$, $t \geq t_1$

設这两参数运动族有不变集 M , 利用空間 Φ 的尺度, 可以作出各种稳定性的定义。然后仿前 1.2, 3 款写出一系列的稳定条件。为避免一路抽象下去, 留待下节在偏微分方程組零解的稳定性討論, 把这样抽象模型用偏微分方程組具体表现出来。而对于偏微分方程組来說, 条件 2) 可作为 $t \rightarrow t_0$ 。

五、偏微分方程組的稳定性

1. 說明 一般所說的适定性(有时也很流行用稳定性这名称)——即特解 u 或其偏导数連續依赖于該方程組的系数, 或初值条件, 或边界条件, 或数者兼有——这方面的討論, 超出本文范围之外。本文所指的稳定性意义, 即在有些偏微分方程文献中称之为“特解 u 当 $t \rightarrow \infty$ 时的渐近性态”。例如 Соболев 选集 Nos. 51—54 討論双曲型方程的稳定性的; 又例如 Bellman 在 TRAMS, V. 64 討論抛物型方程的稳定性, 都是指 $t \rightarrow \infty$ 时特解的渐近性这一意义。本文只列举那些利用李雅普諾夫泛函 V 可得到的更广泛的结果。討論偏微分方程組:

$$(5) \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(t, x_j, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \dots) \\ s, i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

設柯西問題：初值条件为 $t=t_0$, $u=\varphi$, 这里 u, φ 表 n 維矢函数, 例如 $\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 而 $\varphi_i=\varphi_i(x_1, \dots, x_k)$ 。設对于任一个元 $\varphi \in \Phi$ 及 $t_0 \geq 0$ 可以构造(5)的一个解： $U=U(\varphi, t_0, t)$ 当 $t \in (-\infty, +\infty)$, 則 $U \in \Phi$, 于是形成了上节的两参数变换族 $\{U(\varphi, t_0, t)\}$ 。又因通常不要求唯一解, 故不变集 M 所对应的零解 $U \equiv 0$ 定义如下：

“当一切 $t \geq t_0$ 由 $\varphi=0$ 推得 $U(\varphi, t_0, t)=0$ ” 其余稳定性的各种定义, 可按照抽象空間 Φ 所有的尺度 $\rho(\dots)$ 模拟地逐一写出[21]。

2. 定駐偏微分方程組

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(x_i, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \dots)$$

$$s, i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, k.$$

討論此組零解的稳定性, 只需用单参数运动群 $\{U(\varphi, t)\}$ 亦即如前节第1.2.3款的 $\{X(P, t)\}$, 故可把前节的局部稳定性条件, 大范围稳定性条件的模型, 照样套进便得。

3. 非定駐偏微分方程組的柯西問題

茲取方程組(5)及其初值条件 $t=t_0$, $u=\varphi$ 。又[21]利用两参数运动族的理論, 得如下結果：

(A)使(5)的解 $U=0$ 为稳定的充要条件为存在有单参数族的泛函 V_t 具有下列条件：

1°对于任何指定元素 $\varphi \in S(o, r)$, 当 $t \geq 0$ 当, t 的函数 V_t 有定义, 这里隣域 $S(o, r)=\{\varphi \mid 0 < \rho(\varphi, o) < r\}$, 2°对于充分小 $C_1 > 0$ 可指出 $C_2 > 0$ 使当 $\rho(\varphi, o) > C_1$ 及一切 $t \geq 0$ 时有 $V_t(\varphi) > C_2$; 3°当 $\rho(\varphi, o) \rightarrow 0$, 对于 $t \geq 0$ 一致地有 $V_t(\varphi) \rightarrow 0$; 4°对于 t 的函数 $V_t(U(\varphi, t_0, t))$ 有定义的一切 $t \geq t_0$, 此函数不随 t 而递增。

(B)使(5)的解 $U=0$ 为漸近稳定的充要条件为(A)的1°, 2°, 3°, 4°, 此外, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 对于一切 $t_0 \geq 0$ 及 $\rho(\varphi, o) < s_1$, 有 $[V_t(U(\varphi, t_0, t))] \rightarrow 0$, 这里 s_1 为足够小的正数。

(C)若(5)的柯西問題有唯一解, 則解 $U=0$ 为一致漸近稳定且一致吸引的充要条件为存在有两个单参数族的泛函 V_t 与 W_t 具有如下性质: 1°对于任何指定的 $\varphi \in S(O, r)$, ($r > 0$ 足够小), 当 $t \geq 0$ 函数 $V_t(\varphi)$, $W_t(\varphi)$ 有定义; 2°对于任給定足够小 $C_1 > 0$, 可指出正数 C_2, C_3 使当 $t \geq 0$, $\rho(\varphi, O) > C_1$ 有 $V_t(\varphi) < -C_2$, $W_t(\varphi) > C_3$; 3°当 $\rho(\varphi, O) \rightarrow 0$ 对于 $t \geq 0$ 一致地有 $V_t(\varphi) \rightarrow 0$, $W_t(\varphi) \rightarrow 0$; 4° $\frac{d}{dt} V_t(U(\varphi, t, t_0)) = W_t(U(\varphi, t, t_0))$ 。

(D)零解为不稳定的充要条件为有两个单参数族的泛函 V_t 与 W_t 存在, 具有如下性质: 1°对于任何指定的 $\varphi \in S(O, r)$, $r > 0$, 当 $t \geq 0$, 函数 $V_t(\varphi)$, $W_t(\varphi)$ 有定义; 2°在 $t \in (0, +\infty)$, $\varphi \in S(o, r)$, 函数 $V_t(\varphi)$ 有界; 3°对于任何 $\delta > 0$ 可指出 φ_0, t_0 使 $V_{t_0}(\varphi_0) > 0$, $\rho(\varphi_0, M) < \delta$; 4° $\frac{d}{dt} V_t(-[U(\varphi, t, t_0)]) = \lambda V_t(U(\varphi, t_0, t)) + W_t(U(\varphi, t_0, t))$,

其間 $(W_t \varphi) \geq 0$, 常数 $\lambda > 0$ 。

4. 混合条件問題

关于柯西問題与边界問題一起混合的某几种方程, 也可应用如上各定理。但由于偏

微分方程边界問題本身的个别性,使到定解論及存在論占主要探討方向,而对于 $t \rightarrow +\infty$ 时特解的漸近性态,資料不丰。举文^[15]拋物型方程組为例。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(t)u = 0$$

其間 $L(t)u$ 为强椭圆算子。設 u 及其对于 x_i 的偏导数(至 $m-1$ 阶)在域 Ω 的边界取 0 值, 初

始条件为 $u(x; t) \Big|_{t=0} = \varphi(x) \in L_2$ 。此时取 $V = (u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u^2 dx$, $\frac{dV}{dt} = -2(Lu, u)$, 故差

$(Lu, u) \geq \alpha(u, u)$, 常数 $\alpha > 0$, 則当 $t \rightarrow \infty$ 时。此特解 $u(t)$ 趋于 0, 因为此时有 $\frac{dV}{dt} \leq -2\alpha V$ 。

5. 其他偏微分方程之例

文^[66]所列舉的稳定性与不稳定性定理大致与上文相类似, 略为簡些。該文解决一个弹性系統的稳定性的問題。

已給偏微分方程:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a^2 N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

已給边界条件:

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \text{ 当 } x=0 \text{ 及当 } x=1$$

这里假設 w 及其偏导数对 x , t 至二阶, 对 x 至四阶止在域 $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0 > 0$ 定义且連續。

茲取泛函空間 $R(w, \rho)$, 其間元素为

$$w = [w(x, t), w_t(x, t)]$$

$$\text{尺度 } \rho(w_1, w_2) = \left\{ \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^2 \left[\frac{\partial^k w_1(x, t_1)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k w_2(x, t_2)}{\partial x^k} \right]^2 + \left[\frac{\partial w_1(x, t_1)}{\partial t_1} - \frac{\partial w_2(x, t_2)}{\partial t_2} \right]^2 \right) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{若取泛函 } V(w) = \int_0^1 \left(w_{xx}^2 + \frac{a^2 N}{D} w_x^2 + w_t^2 \right) dx$$

則可証明若当 $N > N_1 \equiv -\frac{\pi^2 D}{a^2}$ 时, $V(w)$ 在边界問題之下为定正号, 容許无穷小上限, 全

导数 $V' \equiv 0$, 故当 $N > N_1$ 时, 零解为稳定。

$$\text{又若取泛函 } \bar{V}(w) = \begin{cases} -V(w)\psi(w), & \text{当 } V(w) < 0, \\ 0, & \text{当 } V(w) \geq 0, \end{cases}$$

$$\psi(w) = \int_0^1 w w_t dx$$

則可証明在域 $\bar{V}(w) > 0$ 內 $\bar{V}(w)$ 有界且 $\bar{V}'$ 为定正。当 $N < N_1$ 时在域 $\bar{V}(w) > 0$ 內实际可找出軌綫, 故零解为不稳定。

当 $N = N_1$ 則由其物性本身决定零解为不稳定。

六、在两种尺度下的稳定性

1. 条件稳定

关于条件稳定与不稳定这古典問題，早在1938年И.Г.Малкин已經在其工作的附注里开列出来，大致如下：若在 $x_1, \dots, x_n$ 之中只求考虑关于 $x_1, \dots, x_k (k \leq n)$ 的稳定性問題，則取 $v(t; x_1, \dots, x_n)$ ，只要依照李雅普諾夫的稳定性定理，漸近稳定性推論，及不稳定性定理I，专就部分变元 $x_1, \dots, x_k (x_{k+1}, \dots, x_n$ 为任意)来檢驗 v, v' 的正负性质等。至于这些附注的証明，則见于近年文^[67]証之。該文且举了很多例子。

2. 在两种尺度下的稳定性

由此可见，对于初始位置 $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ 及对于过程中部分变元 $(x_1, \dots, x_k)$ 在两个不相同尺度之下考虑，现在分别以 ρ_0, ρ 表之。文^[68]論此問題。設 T_0 为初始集，初始時間 $t_0 \in T_0$ ； T 为整个过程的时间， $T_0 \subseteq T$ 。若 T 有限，則这問題相当于适定性問題；若 T 为「不截止的」，則它相当于在 $t \rightarrow \infty$ 时的漸近性态問題。該文把軌綫 $x(x_0, t_0, t)$ 在某些条件之下称之为过程，以 $x^0(t)$ 表未扰动过程，而其他 $x(x_0, t_0, t)$ 为扰动过程。在所設这两种尺度之下，对于每一偶 $\{x, t\}$ 定义出两种「距离」 $\rho(x, t), \rho_0(x, t)$ 。在某 $R > 0$ ，若在整个过程內恒有 $\rho(x(x_0, t_0, t), t) < R$ ，則称之为 R -过程。一切 R -过程的偶 $\{x, t\}$ 的集合以 RZT 表之。

未扰动过程 $x^0(t)$ 称为在 T 上对于任何 $t_0 \in T_0$ 按尺度 ρ_0, ρ 为稳定(或一致稳定)若适合下条件：对于任何 $\epsilon > 0$ ，可找出 $\delta(\epsilon, t_0) < 0$ (或 $\delta(\epsilon) < 0$)使凡初值在 $\rho_0(x_0, t) < \delta$ 时，扰动过程 $x(x_0, t_0, t)$ 在它的整个定义域內总有 $\rho(x(x_0, t_0, t), t) < \epsilon$ 。

設在 T_0 內 $\rho(x, t)$ 关于 $\rho_0(x, t)$ 为連續(一致連續)，則 $x^0(t)$ 为稳定(一致稳定)的充要条件为：在集 RZT 上存在有泛函 $V(x, t)$ ，按尺度 ρ 为定正且不升，按尺度 ρ_0 在 T_0 上为連續(一致連續)。

更若当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $x(x_0, t_0, t)$ 按尺度 ρ 趋于 $x^0(t)$ ，則得漸近稳定。

相仿地，未扰动过程 $x^0(t)$ 在 T 上对于任何 $t_0 \in T_0 \subseteq T$ 按尺度 ρ_0, ρ 为不稳定(一致不稳定)的充要条件为：在集 RZT 上存在有泛函 $V(x, t)$ 在域 $(V > 0)$ 內有界且具有定正导泛函 V' ，使在最低限度对于任何 $\delta > 0$ 有一个 $t_0 \in T_0$ ，可找出 $\{x_0, t_0\}$ 适合 $\rho_0(x_0, t_0) < \delta$ ，这里 $x_0 = x_0(\delta)$ ，[这里 $x_0 = x_0(\delta)$ ， $t_0 = t(v)$]。

七、最佳李雅普諾夫函数

1. 最佳控制

远在1951年，文^[71]已經用 v 函数研究最佳問題。这文考虑方程組

$$dx_s/dt = \sum_i p_{si} x_i \quad (s=1, \dots, n)$$

其中各 p_{ii} 為依賴于某些調節參數的常數。設在這些參數所定的穩定域內，特征根經常保持着 $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ 的次序。若參數作如此選取使 $\lambda_n \log \frac{\Lambda \lambda_n}{\Theta \lambda_1} = \min$ 則軌綫以最短時間由球 $\Sigma x^2 = A$ 走到球 $\Sigma x^2 = \Theta$ 之上。

近六年來最佳系統的文獻大為盛行。Л. С. Понтрягин 等所用的變分法，推廣古典變分理論到閉集 $|u| \leq 1$ ；Н. Н. Красовский 等將最佳問題化成為矩論中的 L—問題；及 R. Bellman 的動態規劃皆同此類型問題。三者間的相互關係，只好介紹綜合性的文^[69]，在此文中已開列其他文獻。本文只寫出與 V 函數有關的結果。

2. 最佳李雅普諾夫函數

文^[70]討論幾種類型的方程的過渡關係，其中主要討論的類型如下方程組：

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\eta + e^1 \xi^1 + \dots + e^{n-1} \xi^{n-1}$$

這裡 A 為 n 階常方陣， $\eta(t), \xi^\alpha(t)$ 為控制函數， $x, b, e^\alpha (\alpha = 1, \dots, n-1)$ 皆為 n 維向量。設 $\eta(t), \xi^\alpha(t), (\alpha = 1, \dots, n-1)$ 在 $[0, T^0]$ 連續，這裡 T^0 為所求的最佳時間，即以最短時間 T^0 從點 x 達到坐標原點。且設

$$\eta^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^\alpha(t)]^2 \leq 1, \quad t \in [0, T^0]$$

設在合成問題， T^0 以初始位置表為 $T^0(x_1, \dots, x_n)$ 。設 η_0, ξ_0^α 為最佳控制，以此代入⁽⁶⁾得

最佳軌綫 $x(x_0 t, \eta_0 \{\xi_0^\alpha\})$ 。可以證明沿此最佳軌綫應有

$$\frac{dT^0}{dt} = -1.$$

因此我們設

$$v(x) = T^0(x)$$

隨着有

$$\min \left(\frac{dv}{dt} \right) = -1$$

此 $v(x)$ 稱為最佳的李雅普諾夫函數，而 $x=0$ 為最佳系統：

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\eta_0(x) + e^1 \xi_0^1(x) + \dots + e^{n-1} \xi_0^{n-1}(x)$$

的漸近穩定解：即當 $t \rightarrow T^0(x_0)$ 時， $x(x_0, t, \eta_0 \{\xi_0^\alpha\}) \rightarrow 0$ (注意這漸的意義不是當 $t \rightarrow \infty$)。

利用這理論，逐步作 $v_k(x)$ 可獲得最佳系統的近似作法。

3. 最佳廣義李雅普諾夫函數

從此再推廣，文^[72]考慮帶有隨機擾動的方程組

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + C\eta$$

這裡 A, B 為 n 階常方陣， x, c 為 n—維向量， $\eta(t)$ 為隨機函數， u 為依賴于 $\eta(t)$ 而選取的 control。由於 $\eta(t)$ 的各實現值，所選得各 u 的集合，以 U 表之。

設在初值 x_0, η_0, t_0 之下，(7) 的解為 $x(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)$ 。若

$$T[U] \equiv \int_{t_0}^{\infty} p[\|x(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)\| > \varepsilon] dt$$

为有限值, 这里 P 表示 $[]$ 内不等式的概率, $\|u\| \leq 1, u \in U$, 则 U 称为可取控制。在一切可取控制 $\{U\}$ 中求 $\min T[U]$ 所对应的 U , 称为最佳控制。

設函数 $v(x, \eta, t)$ 为定正号, 容許无穷小上限, 且有可积的定負导函数 $dM\{v\}/dt$, 則 $v(x, \eta, t)$ 称为广义李雅普諾夫函数, 这里 $M\{v\}$ 表示以 (7) 的解代入 $v(x, \eta, t)$ 所得的函数 $v(t)$ 的期望。

更若有广义李雅普諾夫函数 $v^0(x, \eta, t)$ 适合于

$$(7^6) \quad \min_U \frac{dM\{v^0\}}{dt} = -1$$

則 $v^0(x, \eta, t)$ 称为最佳广义李雅普諾夫函数, 于是有下結果:

若組 (7) 有最佳控制 U^0 , 則定正函数 $v^0(x, \eta, t) \equiv T(U^0, x, \eta, t)$ 为最佳的广义李雅普諾夫函数, 且在 U^0 之下, (7^b) 式左边达到其极小。逆定理亦成立。

在二阶組的情形, 这文举出一种图解作图法, 把各 V 函数逐层的水准綫作出。

4. 概率稳定

与上論題有附带关系引起概率論与 v 函数的联系。文^[73]考虑方程組

$$(8) \quad dx/dt = f[x, t, \eta(t)], (\|x\| < H, t \geq t_0 > 0)$$

其間矢函数 f 对于矢量 x 适合 Lip 条件, $\eta(t)$ 表具有有限多个常值的均匀馬尔可夫鏈。

設 (8) 的解为 $(n+1)$ -維随机矢函数 $\{x(x_0, t_0, \eta_0, t), \eta(t_0, \eta_0, t)\}$ 。

若已給任何小的 $\varepsilon > 0, p > 0$, 可找出 $\delta > 0$, 使当 $t = t_0, \|x_0\| \leq \delta$ 时, 使在一切 $t \geq t_0$ 时, 概率

$$p_1[\|x(x_0, t_0, \eta_0, t)\| < \varepsilon] > 1 - p$$

如是則 (8) 的零解称为概率稳定。

又若已知任何解 $x(x_0, t_0, \eta_0, t)$ 当 $\|x_0\| \leq H_0$ 皆适合。

$p_1[\|x(x_0, t_0, \eta_0, t)\| < H] > 1 - p(H)$, $p(H)$ 为某正数, 若零解为概率稳定且对于任何 $\eta > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1[\|x(x_0, t_0, \eta_0, t)\| < \eta] \geq 1 - p(H)$$

則零解称为关于初值 $\|x_0\| \leq H_0$ 的 $p(H)$ 漸近稳定, 于是有下列結果:

若能找得正定号函数 $v(x, t, \eta)$, 其导数 $dM\{v\}/dt$ 为常負号, 則 (8) 的零解为概率稳定, 这里 $dM\{v\}/dt$ 表示 t 的函数 $v(x(t), t, \eta(t))$ 的期望的右导数。

若 $v(x, t, \eta)$ 为正定号容許无穷小上限, 其导数为定負, 則对于任何正数 $p(H) < 1$ 可指出 H_0 , 使 (8) 的零解为关于初值 $\|x_0\| \leq H_0$ 的 $p(H)$ -漸近稳定。

其次, 設 $H = \infty$, 若存在有常数 B, α 使一切能当 $t \geq t_0$ 滿足

$$M[\|x(x_0, t_0, \eta_0, t)\|_2^2] \leq B \|x_0\|_2^2 \exp[-\alpha(t - t_0)]$$

(这里 $\|\cdot\|_2$ 表欧氏范), 則 (8) 的零解称为中值指数律稳定。

在此情形可得一系列的定理与尋常微分方程組的相仿拟。例如 $v(x, \eta, t)$ 的存在定理；在 $dM\{v\}/dt = -w < 0$ 的关系里，定正型 $v(x, \eta, t)$ ， $w(x, \eta, t)$ 的产生； $v(x, \eta, t)$ 的估值公式；关于經常作用扰动的定理等，在此文里皆証明，在此情形下皆成立。

在本文中所引用的文献

1. 秦元勋，刘永清，王联。稳定性理論中的微分方程与微分差分方程的等价問題。学报 9 卷 3 期（1959），科录 2 卷 4 期（1958）。
2. 秦元勋。有时滞的系統的无条件稳定性，学报 10 卷 1 期（1960）。
3. 秦元勋。稳定性理論中微分方程与微分差分方程的等价問題，学报 8 卷 4 期（1958）。
4. 王联。稳定性理論中第一临界情形的微分方程与差分方程的等价問題。学报 10 卷 1 期（1960），科录 2 卷 7 期（1958）。
5. 刘永清。微分差分方程解的稳定性，进展 4 卷二期（1958）。
6. 蔡遂林。常系数綫性微分方程的Лапунов函数公式。学报 9 卷 4 期（1959）。
7. 谷超豪。二阶非綫型方程稳定性問題的一解。学报 4 卷 3 期（1954）。
8. 张炳根。二阶常微分方程組的解的全局稳定性。学报 9 卷 4 期（1959）。
9. 赵施光。鞍形常微分方程組在具有临界情形的条件稳定性。科录 1 卷 5 期（1957）。
10. 王联。带有变时滞方程解的稳定性。科录 3 卷 7 期（1959）。
11. Барбашин Е.А. и Скалкин М.А. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ. 19 в. 5/1955/ стр. 623—624
12. Барбашин Е.А. и Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом ДАН т. 86 в. 3 /1952/ стр. 454—456
13. Барбашин Е.А. Об устойчивости Решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ т. 16. в. 5 /1952/
14. Барбашин Е.А. и Красовский Н.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ т. 18 в. 3 /1954/ стр. 345—350
15. Вишик М.И. и Ладыженская О.А. Краевые задачи для уравнения в частных производных и некоторых классов операторных уравнений. УМН т. 11. в. 6 /1956/ стр. 41—97
16. Вркоч И. (Vrkoč J.) / Обращение теоремы А.М.Ляпунова и Н.Г.Четаева. Чехосл. мат. журн. т. 5. /1955/
17. Германдзе В.Е. Об асимптотической устойчивости по первому приближению ПММ т. 21 в. 1 /1957/ стр. 133.135.
18. Германдзе В.Е. и Красовский Н.Н. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ т. 21 в. 6 /1957/ стр. 769.774.
19. Есенин Е.М. Об устойчивости решений одного класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. ПММ 15 /1951/ стр. 601—608
20. Зубов В.И. Вопросы теории второго метода Ляпунова, построения общего решения в Области асимптотической устойчивости. ПММ т. 19 /1955/ стр. 179—210
21. Зубов В.И. Методы А.М.Ляпунова и их применение. ЛГУ /1957/
22. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического

регулирования. /1959/

23. Зубов В.И. Некоторые задачи об устойчивости движения. УХН т. 11 в. 6 /1956/ стр. 250—252

24. Зубов В.И. К теории второго метода А.М. Ляпунова. ДАН 99. № 3 /1954/ стр. 341—344

25. Зубов В.И. К теории второго метода А.М. Ляпунова. ДАН. 100 № 5 /1955/ стр. 857—859

26. Зубов В.И. О почти периодических решениях систем дифференциальных уравнений. Вест. ЛГУ №. 1 /1960/ стр. 101—106.

27. Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнения с запаздываниями времени. ПММ 20. в.2 /1956/ стр. 315—327

28. Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием ПММ 20 в. 3. /1956/ стр. 513—518

29. Красовский Н.Н. Об обращении теорем А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева для стационарных систем дифференциальных уравнений. ПММ. т. 18. в 5 /1954/ стр. 513—532

30. Красовский Н.Н. К теории второго метода А.М. Ляпунов для исследования устойчивости. Мат. сб. 40 в. 1 (1956) ст р58—64

31. Красовский Н.Н. К теории второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения ДАН 109 /1956/ стр. 460—463

32. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения /1959/

33. Красовский Н.Н. Обращение теорем второго метода А.М. Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ т. 20 в. 2 /1956/ стр. 255—265

34. Красовский Н.Н. К вопросу об обращении теорем второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения. УМН т.11. в.3. /1956/ стр. 159—164.

35. Красовский Н.Н. Об обращении теорем К.П. Персидского о равномерной устойчивости ПММ т.19 в. 3. /1955/

36. Курцвейль Я. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехос. мат. журн. т. 6 № 2 стр. 217—259; №.4. стр. 455—484 “1956/

37. Курцвейль Я. К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения Чехос. мат. журн. т. 5 /1955/ стр. 382—398

38. Курцвейль Я. и Вржоч Н. Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. Чехос. мат. журн. т. 7 №.2/1957/ стр. 254—272

39. Малкин Н.Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ. т. 16 3 /1952/ стр. 365—374

40. Малкин Н.Г. К вопросу об обращении теоремы Ляпунов об асимптотической устойчивости. ПММ т. 18 в. 2 /1954/

41. Малкин Н.Г. О построении функций Ляпунова для систем линейных уравнений ПММ т. 16. в. 2 /1952/ стр. 239—242

42. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. 1951

43. Немыцкий В.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения МХЛГ СССР

44. Плисс В.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для

системы дифференциальных уравнений. ДАН.103. № 1. /1955/ стр. 17—18

45. Плисс В.А. Исследование одной нелинейной систем трех дифференциальных уравнений. ДАН. т.117 № 2. /1957/ стр. 184—187

46. Плисс В.А. О проблеме Айзерман для случая систем дифференциальных уравнений. ДАН т. 121 № 3. /1958/ стр. 422—425

47. Андронов-Витт-Хайкин. Теория Колебаний. 2 изд. /1959/ стр. 592 и след.

48. Плисс В.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для одной систем трёх дифференциальных уравнении. ДАН. т. 120. № 4 /1958/ стр. 708—710

49. Плисс В.А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. 1958

50. Разумихин. Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием. ПММ 20 в. 4/1956/ стр. 500—512

51. Репин Ю.М. Об устойчивости решений уравнении с запаздывающим аргументом ПММ т. 21 /1957/ стр. 253—261

52. Фрид И.А. Об устойчивости решения линейного дифференциального уравнения с запаздыванием в критическом случае. Моск. учен. зап. уп-та 181: мат. 8 /1956/ стр. 73—82

53. Эльсгольц П. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений УМН т. 9 в. 4 /1954/ стр. 95—112

54. Эльсгольц П.Э. Качественные методы в математическом анализе. /1955/

55. Якубович В.А. Об одном класс нелинейных дифференциальных уравнений ДАН т. 117 в. 1/1957/

56. Якубович В.А. Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования. Вест. ЛГУ № 19 в. 4 /1957/

57. Antosiewicz H.A. A survey of Lyapunov's second method. Contr. non-linear Osc. IV. Math. Study 41. /1958/

58. Massera J.L. Contributions to stability theory. Annals of Math. V.64 No.1. /1956/ p.182—206. With Erratum. ibid v.68, No.1. 1958.

59. Yoshizawa T. On the non-linear differential equations; and the two Notes. Mem. Univ. Kyo-to. Ser.A V.28 /1954/ pp.131—141, pp.153—159, pp.293—298.

60. Yoshizawa T. On the stability of solutions of a system of differential equations. Mem. Coll. Sc. of Univ. Kyoto. V.29. No. 1.ser.A. /1955/ pp.27 33.

61. Ляшенко Н.Я. К вопросу об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. ДАН 104 № 2, /1955/ стр. 177—179.

62. Еругин Н.П. методы А.М. Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. ПММ 17 в. 4 /1953/ стр. 389—400.

63. Эльсгольц Л.Э. Квазиасимптотическая устойчивость в целом. УМН 15 в. 5 стр. 224. (1960)

64. Пимапов С.Н. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последствием ПММ 24 в. 3 стр. 447—457 (1960)

65. Шимаков С. Н. О неустойчивости движения систем запаздыванием по временям. ПММ. 24. в. 1 стр. 55—63 (1960)
66. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем ПММ 23 в. 3 (1959) стр. 483—493
67. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вест МГУ № 4 стр. 9—16 (1957)
68. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам ПММ 24 в. 6 (1960) стр. 988—1001.
69. Розноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем 1, 11, 111, Автом. и Телемех. т. 20. Мов 10, 11, 12, (1959)
70. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования ПММ 23 в. 4 (1959) стр. 625—639
71. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической систем. ПММ 15 в. 3 (1951)
72. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях. ПММ 24 в. 1. (1960)
73. Кац И. Я. Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ 24 в. 5. (1960)