

n 阶 Айзерман 自动調整系統全局 稳定性判別法*

朱 思 銘

(数学力学系研究生)

М. А. Айзерман 于 1949 年提出了某类型自动調整系統的稳定性的問題 (称为 Айзерман 問題^[1]):

考虑綫性微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + a x_k \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (0.1)$$

其中假設 a_{pj} ($p, j=1, 2, \dots, n$) 为給定的实常数。而 a 为任意滿足不等式 $\alpha < a < \beta$ 的实数, 使方程組 (0.1) 的特征方程的根均具負实部。

問下面的論断是否成立: 对任何区間 (α, β) , 当 $\alpha < a < \beta$ 时方程組 (0.1) 的特征方程的根均具負实部的条件滿足, 又对于任何单值連續函数 $f(x)$ 滿足条件

$$\alpha x^2 < x f(x) < \beta x^2 \quad \text{对所有 } x \neq 0; \\ f(0) = 0. \quad (0.2)$$

則方程組

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f(x_k) \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (0.3)$$

其唯一平衡状态显然为坐标原点 $x_1 = \dots = x_n = 0$ 者。在坐标原点将有稳定的平衡状态, 它的吸引域包括系統 (0.3) 的全部相空間:

$$-\infty < x_s < +\infty \quad (s=1, \dots, n)$$

当然, 所給的 $f(x)$ 必須保証方程組 (0.3) 的解存在且唯一。

(这是改进了的提法, 見^[2])

* 本文为作者的大学毕业論文。承导师胡金昌教授、許淞庆教授和黎百恬老师詳加审閱, 謹此致謝。

Айзерман問題提出后,吸引了不少数学工作者的注意,并使全局稳定性理論出現新的面貌。对二阶 Айзерман問題,已完滿解决[3]。三阶 Айзерман問題亦得到詳盡的討論,并給出了充要条件[4][5]。同时,还将方程組(0.3)推广到广泛得多的某几类微分方程組中进行討論。但由于其方法的限制,对三阶以上的高阶 Айзерман問題的探討,不是无能为力,便是异常繁雜,很少人进行这方面的工作。在我国仅見赵素霞[6]利用降阶法考虑了較(0.3)特殊的方程〔条件与(0.3)全同〕

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f(x_1) \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (0.4)$$

本文将研究高阶 Айзерман自动調整系統全局稳定性的判別方法。特別对系統(0.4)提出三种切实可行的判別法,并将其方法推广到包含系統(0.3)的广泛得多的自动調整系統中研究。最后,討論了赵素霞的降阶法。

(一)

我們先对較特殊的自动調整系統(0.4)提出一全局稳定性判別法,它仅对 $f(x)$ 作了些少的限制。

定理1.1. 若有有限实常数 $\alpha_0, \beta_0: \alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \beta$. 使对任 $x \neq 0$

$$\alpha_0 x^2 \leq x f(x) \leq \beta_0 x^2$$

則方程組(0.4)的零解为全局稳定。

証. 先考虑含 n 变量的 $n-1$ 阶綫性方程組

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j \quad (s=2, \dots, n) \quad (1.1)$$

将 x_1 視为参量, 則(1.1)式的解可表为

$$x_s = \mathfrak{x}_s(x_1) \quad (s=2, \dots, n)$$

将解代入方程組(0.4)的第一式, 并用 $2x_1$ 乘其等式, 且令

$x_1^2 = u$, 則可化为

$$\frac{du}{dt} = 2\sqrt{u} \left[\sum_{j=2}^n a_{1j} \mathfrak{x}_j(\sqrt{u}) \right] + 2u \left[a_{11} + \frac{f(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \right] \quad (1.2)$$

仿上, 对方程組

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j + \beta_0 y_1 \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} y_j \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} (1.3)_1 \\ (1.3)_2 \end{matrix} \right\} (1.3)$$

有与式(1.2)类似的式

$$\frac{dv}{dt} = 2\sqrt{v} \left[\sum_{j=1}^n a_{1j} \bar{y}_j(\sqrt{v}) \right] + 2v(a_{11} + \beta_0) \quad (1.4)$$

其中 $v = y_1^2$ 而 $\bar{y}_s(y_1)$ ($s=2, \dots, n$) 是 n 变量的 $n-1$ 阶线性方程组 (1.3)₂ 的解 (将 y_1 视为参量)。因式 (1.3)₂ 和式 (1.1) 的系数完全相同, 故对同一初值条件, 解 $x_s(x_1)$ 和 $\bar{y}_s(y_1)$ ($s=2, \dots, n$) 的表达式亦完全相同。即

$$x_s(\sqrt{w}) \equiv \bar{y}_s(\sqrt{w}) \quad (s=2, \dots, n)$$

而得不等式

$$\begin{aligned} 2\sqrt{w} \left[\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j(\sqrt{w}) \right] + 2w \left[a_{11} + \frac{f(\sqrt{w})}{\sqrt{w}} \right] &\leq \\ &\leq 2\sqrt{w} \left[\sum_{j=2}^n a_{1j} \bar{y}_j(\sqrt{w}) \right] + 2w(a_{11} + \beta_0) \end{aligned}$$

根据 [7], 由解的连续性, 知若方程 (1.2) 与方程 (1.4) 取同一初值条件时, 其解有

$$u(t) \leq v(t) \quad \text{当 } t \geq t_0.$$

$$\text{即} \quad x_1^2(t) \leq y_1^2(t) \quad \text{当 } t \geq t_0. \quad (1.5)$$

其中 $x_1(t)$, $y_1(t)$ 各为方程组 (0.4), (1.3) 的解。但对 n 阶线性方程组 (1.3), 由定理条件知其解为渐近稳定。且有

$$|y_s(t)| < B e^{-A(t-t_0)} \quad (s=1, \dots, n)$$

其中 A , B 为正实常数, 由式 (1.5) 便得

$$|x_1(t)| < B e^{-A(t-t_0)} \quad (1.6)$$

为证明方程组 (0.4) 的其余的解 $x_s(t)$ ($s=2, \dots, n$) 的渐近稳定性, 任取一 μ_0 值, 使 $\alpha < \alpha_0 < \beta_0$ 。于是对阵

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha_0 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

有满秩线性变换 T , 使 $T^{-1}PT$ 化为 Jordan 标准形

故方程组 (0.4) 可写为

$$\frac{dX}{dt} = PX + f(X) \quad (0.4)'$$

$$\text{其中} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(X) = \begin{pmatrix} \left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \alpha_0 \right) x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

而式 (0.4)' 可化为

$$\frac{dZ}{dt} = T^{-1}PTZ + T^{-1}f(X) \quad (1.7)$$

其中 $X = TZ$ $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

(1.7)式中 $T^{-1}PT$ 为 Jordan 标准形, 由条件, 其特征根均具负实部。而

$$T^{-1}f(X) = \begin{pmatrix} d_{11}(\frac{f(x_1)}{x_1} - a_0)x_1 \\ \vdots \\ d_{n1}(\frac{f(x_1)}{x_1} - a_0)x_1 \end{pmatrix}$$

其中 d_{s1} 为实常数。而由定理条件 $|\frac{f(x_1)}{x_1} - a_0| < M$ (M 为正实常数) 利用式(1.6), 得

$$\left| d_{s1} \left[\frac{f(x_1)}{x_1} - a_0 \right] x_1 \right| < B_0 e^{-A(t-t_0)} \quad (s=1, \dots, n)$$

其中 $B_0 = B M \max_{j=1, \dots, n} |d_{j1}|$ 。即对式(1.7), 解 Z 渐近稳定。放解 X 亦渐近稳定。于是, 方程组(0.4)的所有的解 $x_s(t)$ ($s=1, \dots, n$) 均为渐近稳定。再注意到初值条件的任意性, 便证得方程组(0.4)的零解为全局稳定。

定理1.2. 若 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 处连续, (或有 $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x)}{x} \neq -\infty$) 且有 $\beta_0: \alpha < \beta_0 < \beta$

使对任 $x \neq 0$ 有

$$\alpha x^2 < xf(x) \leq \beta_0 x^2$$

则方程组(0.4)的零解为全局稳定。

证. 由式(1.6)易知在当 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 处连续或有 $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x)}{x} \neq -\infty$ 且 β_0 有限的条件下, 可以保证 $\left| \frac{f(x)}{x} - a_0 \right| < M$ 必成立。这样, 定理1.1的证明过程便全部有效。

即完全可仿定理1.1的证明证得定理1.2成立。

定理1.3. 若有 $\beta_0: \alpha < \beta_0 < \beta$ 使对任 $x \neq 0$ 有

$$\alpha x^2 < xf(x) \leq \beta_0 x^2$$

且 $n-1$ 阶矩阵

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征根均具负实部。则方程组(0.4)的零解为全局稳定。

证. 由本定理所给的条件, 知定理1.1的证明过程中, (1.6)式以上的部分完全成立。若对 $n-1$ 阶线性方程组(1.1)的含 x_1 的项视为非齐次项时, 由(1.6)式, 如取 $B' = B \max_{s=1, \dots, n} |a_{s1}|$, 其非齐次项便有

$$|a_{s1}x_1| < B' e^{-A(t-t_0)} \quad (s=2, \dots, n)$$

再由方程组(1.1)所对应的齐次方程组的系数矩阵 A_0 的条件, 推知显然有解

$$|x_s(t)| < B_s e^{-A_s t} \quad (s=2, \dots, n) \quad (1.8)$$

其中 B_s, A_s 为正实常数。

注意到初值条件的任意性, 由式(1.6)和式(1.8)便知方程组(0.4)的零解为全局稳定。

定理 1.4. 若 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 处连续(或有 $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x)}{x} \neq -\infty$ 与 $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x)}{x} \neq \beta$), β 为有限实常数, 且矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} + \beta & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征方程所具的零根或纯虚根的首级因子均为一次。则方程组(0.4)的零解为全局稳定。

证. 先证 n 阶线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} z_j + \beta z_1 \\ \frac{dz_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} z_j \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (1.9)$$

的特征根均不具正实部。若不然, 如方程组(1.9)的特征根中含有具正实部的根, 则由组(0.4)的条件及组(1.9)所对应的特征方程左边的 n 次多项式的连续性, 知有实数 β' : $\alpha < \beta' < \beta$, 使矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \beta' & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

存在具零实部的根, 此与原方程组(0.4)满足广义霍尔茨条件的假设矛盾。

这样, 再由矩阵 A' 的条件, 便得方程组(1.9)的特征根或为具负实部的根, 或为单重初级因子的零根或纯虚根。于是, 方程组(1.9)的解均有界

$$|z_s(t)| \leq M \quad (s=1, \dots, n \quad M \text{ 为实常数}) \quad (1.10)$$

重复定理 1.1 的证明, 只将方程组(1.3)易为方程组(1.9)。当方程组(1.9)与方程组(0.4)取同一初值条件时, 便得与式(1.5)相仿的结果

$$x_1^2(t) \leq z_1^2(t) \quad \text{当 } t \geq t_0$$

再由式(1.10), 于是有

$$|x_1(t)| \leq M \quad (1.11)$$

因在 $\frac{f(x_1)}{x_1}$ 于 $x_1 = 0$ 连续或 $\lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_1)}{x_1} \neq -\infty$ 与 $\lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_1)}{x_1} \neq \beta$ 且 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \beta <$

$+\infty$ 的条件下, $\frac{f(x_1)}{x_1}$ 对任有界域必有界。故对有界域(1.11)知有限实常数 α_0, β_0 : 使 $\alpha \leq$

$\alpha_0 \leq \beta_0 < \beta$ 使对任 $x_1 \neq 0$ 均有

$$\alpha_0 x_1^2 \leq x_1 f(x_1) \leq \beta_0 x_1^2$$

于是由定理1.1, 知方程組(0.4)的零解为全局稳定。

例. 考虑六阶方程組

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 4x_2 - 2x_4 - 2x_5 - x_6 + f(x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 + 2x_6 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 + 2x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} &= x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 - x_6 \end{aligned} \quad (1.12)$$

应用稳定域的L-划分法^[9], 可求得 $\alpha = -\infty$, $\beta = 2$ 。即对式(1.12), 当

$$-\infty < \frac{f(x_1)}{x_1} < 2$$

时适合广义霍尔茨条件。

若取: 1°). $f(x_1) = 4x_1^3 e^{-|x_1|}$

2°). $f(x_1) = -x_1^5$

3°). $f(x_1) = -\sqrt[3]{x_1}$

4°). $f(x_1) = 2e^{-\frac{1}{x_1^2}} \cdot x_1 \cdot \sin x_1$

则对1°): 有

$$0 \leq \frac{f(x_1)}{x_1} = 4x_1^2 e^{-|x_1|} \leq 16e^{-2} < 2$$

根据定理1.1, 知具1°)的方程組(1.12)的零解为全局稳定

对2°): 因 $\frac{f(x_1)}{x_1} = -x_1^4$ 在 $x_1 = 0$ 处連續, 且有

$$-\infty < \frac{f(x_1)}{x_1} = -x_1^4 \leq 0 < 2$$

故虽不滿足定理1.1的条件, 但由定理1.2知具2°)的方程組(1.12)的零解为全局稳定。

对3°): 虽 $\frac{f(x_1)}{x_1} = -x_1^{-\frac{2}{3}}$ 在 $x_1 = 0$ 处不連續, 且有

$$-\infty < \frac{f(x_1)}{x_1} = -x_1^{-\frac{2}{3}} < 0 < 2 \quad \text{当 } x_1 \neq 0 \text{ 时。}$$

不适合定理1.1和定理1.2的条件。但因矩陣

$$A_0 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征根为 $-1, -1, -1, -2$ 均具负实部, 满足定理 1.3 的条件。故具 3°) 的方程组 (1.12) 的零解亦为全局稳定。

对 4°): 因 $\frac{f(x_1)}{x_1} = 2e^{-\frac{1}{x_1^2}} \cdot \sin x_1$ 在 $x_1 = 0$ 处连续, 且有

$$-2 < \frac{f(x_1)}{x_1} = 2e^{-\frac{1}{x_1^2}} \cdot \sin x_1 < 2$$

同时矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} 1+2 & 4 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征根为 $0, +\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i, -1, -2, -3$, 其零根与纯虚根所对应的初级因子均为一次的。故虽 $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = 2$, 不适合定理 1.1、1.2 及 1.3 的条件, 但据定理 1.4, 具 4°) 的方程组 (1.12) 的零解仍为全局稳定。

(二)

这里, 对方程组 (0.4) 再提出一全局稳定性判别法, 且将其方法推广到比方程组 (0.3) 更为广泛的一类自动调整系统中去。

对方程组 (0.4), 作行列式记号:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2s-1} & a_{2s} & a_{2s+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (s=1, \cdots, n)$$

$$\Delta = \left(\sum_{j=1}^n \Delta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \left\{ \det \left[\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理 2.1. 若存在实常数 α , 使特征方程 $\det(a_{si} + \alpha \delta_{si} - \delta_{si} \lambda) = 0$ (其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号) 的所有根均具负实部, 且满足下列三条件之一:

1°) $\Delta \pm \Delta_1 = 0$ 时 $\beta < -a_{11}$;

2°) $\Delta \pm \Delta_1 \neq 0$ 且

$$\left(\alpha - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} \right) \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1} \geq \beta \geq \left(\beta + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} \right) \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1};$$

3°) $\Delta \pm \Delta_1 \neq 0$ 且

$$\left(\alpha + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} \right) \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1} > \alpha > \left(\beta - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} \right) \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1}$$

則方程組(0.4)的零解為全局穩定。

証. 由定理條件, 知存在唯一的定負二次型

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (b_{ij} = b_{ji}, i, j = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

滿足偏微分方程

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n (a_{si} + \partial_{s1} \partial_{11} a) x_i \right] \frac{\partial V}{\partial x_s} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (2.2)$$

將式(2.1)代入式(2.2), 比較等式兩邊係數, 易解得

$$b_{1s} = \frac{\Delta_s}{\Delta_0 + a \Delta_1} \quad (s = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

且由定理條件, 知必然 $\Delta_0 + a \Delta_1 \neq 0$ 故解(2.3)存在且唯一。

依方程組(0.4)可求得 V 對 t 的全導數

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left[\sum_{s=1}^n (x_s^2 + K \cdot b_{1s} x_1 x_s) \right] \quad (2.4)$$

其中 $K = \frac{f(x_1)}{x_1} - a$. 把 K 視為參量, 則(2.4)為一二次型。其係數行列式為

$$\frac{1}{2} D_0 = \begin{vmatrix} 1 + Kb_{11} & \frac{1}{2} Kb_{12} & \frac{1}{2} Kb_{13} & \dots & \frac{1}{2} Kb_{1n} \\ \frac{1}{2} Kb_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} Kb_{13} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} Kb_{1n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} Kb_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \frac{1}{2} Kb_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} Kb_{1n} & \frac{1}{2} Kb_{1n-1} & \dots & \dots & 1 + Kb_{11} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

由(2.5)知(2.4)為定正二次型的充要條件為

$$1 + Kb_{11} - \sum_{s=2}^n \frac{1}{4} K^2 b_{1s}^2 > 0 \quad (2.6)$$

此時可分兩種情況進行討論: 當 $\Delta \pm \Delta_1 = 0$ 時即 $\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n = 0$ 或 $b_{12} = b_{13} = \dots = b_{1n} = 0$ 時, 式(2.6)變為 $1 + Kb_{11} > 0$ 即

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - a \right) \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + a \Delta_1} + 1 > 0 \quad (2.7)$$

由 $\Delta_0 = a_{11} \Delta_1$ 且 $\Delta_1 \neq 0$ (否則, $\Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$ 方程組(0.4)不適合廣義霍爾茨條件, 與原題設矛盾) 於是(2.7)式化為

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - a \right) \frac{1}{a + a_{11}} > -1 \quad (2.8)$$

但因特征方程 $\det(a_{si} + \partial_{s1} \partial_{11} a - \partial_{s1} \lambda) = 0$ 的根須具負實部, 得 $a + a_{11} < 0$. 於是(2.8)

化为

$$\frac{f(x_1)}{x_1} < -a_{11}$$

故1°)成立时上式必成立, 即(2.6)式成立。

当 $\Delta \pm \Delta_1 \neq 0$ 时, (2.6)式化为

$$\left[K \sqrt{\sum_{s=2}^n b_{1s}^2} - \frac{2(b_{11} + \sqrt{\sum_{s=1}^n b_{1s}^2})}{\sqrt{\sum_{s=2}^n b_{1s}^2}} \right] \left[K \sqrt{\sum_{s=2}^n b_{1s}^2} - \frac{2(b_{11} - \sqrt{\sum_{s=1}^n b_{1s}^2})}{\sqrt{\sum_{s=2}^n b_{1s}^2}} \right] < 0$$

将(2.3)式与 $K = \frac{f(x_1)}{x_1} - a$ 代入, 可化得

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} - \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1} a \right) \left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} - \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1} a \right) < 0 \quad (2.9)$$

注意到 $\Delta \pm \Delta_1 > 0$ 及 $\alpha < \frac{f(x_1)}{x_1} < \beta(x_1 \neq 0)$, $f(0) = 0$ 可知当2°)或3°)成立时, 对 $x_1 \neq 0$:

式(2.9)必成立, 即式(2.6)成立。而对 $x_1 = 0$: 可直接由(2.4)式推得 $\frac{dv}{dt} = -2 \sum_{s=1}^n x_s^2$ 。

于是, 对任 x_1 , $\frac{dv}{dt}$ 均定正。得方程(0.4)的零解为全局稳定。

定理2.2. 定理2.1中, 若式2°)、3°)分别改为4°)、5°):

4°) $\Delta \pm \Delta_1 \neq 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} \right) \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1} \geq a \geq \left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} \right) \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1};$$

5°) $\Delta \pm \Delta_1 \neq 0$ 且 $x_1 \neq 0$ 时

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} \right) \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1} \geq a \geq \left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} \right) \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1}.$$

同时有某 $i, j \geq 2$, 使 $\frac{\Delta_i}{a_{i1}} \neq \frac{\Delta_j}{a_{j1}}$ 。则方程组(0.4)的零解为全局稳定。

证. 由定理2.1的证明中, 知4°)或5°)满足时, 仅当

$$\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{2\Delta_0}{\Delta - \Delta_1} \right) \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta + \Delta_1} = a \text{ 或 } \left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{2\Delta_0}{\Delta + \Delta_1} \right) \frac{\Delta + \Delta_1}{\Delta - \Delta_1} = a \quad (2.10)$$

成立时, 行列式(2.5)为0, 且此时亦仅 n 阶主子式(即原行列式 D_0)为0, 而其 $1, \dots, n-1$

阶主子式均大于0。当(2.10)不成立时, $\frac{dv}{dt}$ 仍定正。

令(2.10)成立的所有的 $x_1, \dots, x_n$ 值組成的集为 P' , 即对 P' 集而言, (2.4)式常正。现作滿秩綫性变换

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + K b_{11} x_1 \\ \xi_s = x_s + \frac{1}{2} K b_{1s} x_1 \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (2.11)$$

在 P' 集上 $D_0 = 0$, 即有 $1 + K b_{11} \neq 0$, $K \neq 0$ 。于是經变换(2.11)可将(2.4)式变为:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left(\sum_{s=2}^n \xi_s^2 \right) \quad (2.12)$$

当且仅当

$$\begin{cases} \xi_s = 0 & (s=2, \dots, n) \\ -\infty < \xi_1 < +\infty \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{1 + K b_{11}} \xi_1 \\ x_s = \frac{-\frac{1}{2} K b_{1s}}{1 + K b_{11}} \xi_1 \quad (s=2, \dots, n) \end{cases} \quad (2.13)$$

时才使(2.12)式有 $\frac{dV}{dt} = 0$ 。而由(2.3)式, 有

$$\sum_{s=1}^n a_{is} b_{1s} = \frac{\sum_{s=1}^n a_{is} \Delta_s}{\Delta_0 + a \Delta_1} = \begin{cases} \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + a \Delta_1} & i=1 \text{ 时} \\ 0 & i \neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

可化得 $\sum_{s=1}^n a_{is} x_s = a_{i1} (1 + \frac{1}{2} K b_{11}) x_1 \quad (i=2, \dots, n)$

于是, 当式(2.13)成立时, 方程組(0.4)变为

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1} (1 + \frac{1}{2} K b_{11}) x_1 \quad (s=2, \dots, n)$$

利用式(2.13)及式(2.3)便有

$$\frac{\Delta_i}{a_{i1}} = \frac{\Delta_j}{a_{j1}} \quad (2.14)$$

而由定理条件, 式(2.14)不能成立。于是, 滿足条件 $\frac{dV}{dt} = 0$ 所成的点集 P' 不全含方程組(0.4)的整半軌綫。此集与 $V=C$ (C 为实常数)集的交集更不含方程組(0.4)的整半軌綫。这样, 由^[8]知方程組(0.4)的零解为全局稳定。定理得証。

现在, 再将定理2.1和定理2.2推广到更广泛的方程組(2.15)中去:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j + \mu_s f(x_k) \quad (s=1, \dots, n \quad 1 \leq k \leq n) \quad (2.15)$$

其中 a_{sj} , μ_s ($s, j=1, \dots, n$)为实常数; $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上定义且单值連續, 同时适合

$$\begin{aligned} \alpha x^2 < x f(x) < \beta x^2 \quad \text{对所有 } x \neq 0; \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

且方程组(2.15)满足广义霍尔茨条件, 即对任实数 a , 只要 $\alpha < a < \beta$ 则矩阵 $(a_{sj} + a\mu_s\delta_k)^j$ 的特征方程的根均具负实部。

若作记号

$$\Delta_0(a) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} + \mu_1 a & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} + \mu_n a & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j(a) = \sum_{s=1}^n \mu_s \Delta_{sj}(a) \quad \Delta(a) = \left[\sum_{s=1}^n \Delta_s^2(a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\Delta_{sj}(a)$ 为行列式 $\Delta_0(a)$ 中第 s 行第 j 列元素的代数余子式。

和定理 2.1 及定理 2.2 的证明完全类似, 易证得下面两定理:

定理 2.3. 若存在实常数 a , 使对应行列式 $\Delta(a)$ 的矩阵的特征根均具负实部, 且满足下列三条件之一:

$$6^\circ). \quad \Delta(a) \pm \Delta_k(a) = 0 \text{ 时} \quad \text{若 } \frac{\Delta_k(a)}{\Delta_0(a)} > 0 \text{ 则有 } \alpha - a > -\frac{\Delta_0(a)}{\Delta_k(a)};$$

$$\text{若 } \frac{\Delta_k(a)}{\Delta_0(a)} < 0 \text{ 则有 } \beta - a < -\frac{\Delta_0(a)}{\Delta_k(a)}$$

$$7^\circ). \quad \Delta(a) \pm \Delta_k(a) \neq 0 \text{ 且}$$

$$\alpha - \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) - \Delta_k(a)} \geq a \geq \beta + \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) + \Delta_k(a)};$$

$$8^\circ). \quad \Delta(a) \pm \Delta_k(a) \neq 0 \text{ 且}$$

$$\alpha + \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) + \Delta_k(a)} \geq a \geq \beta - \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) - \Delta_k(a)}.$$

则方程组(2.15)的零解为全局稳定。

定理 2.4. 定理 2.3 中, 若式 $7^\circ)$, $8^\circ)$ 分别改为 $9^\circ)$, $10^\circ)$:

$$9^\circ). \quad \Delta(a) = \Delta_k(a) \neq 0 \text{ 且 } x_k \neq 0 \text{ 时}$$

$$\frac{f(x_k)}{x_k} - \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) - \Delta_k(a)} \geq a \geq \frac{f(x_k)}{x_k} + \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) + \Delta_k(a)};$$

$$10^\circ). \quad \Delta(a) \pm \Delta_k(a) \neq 0 \text{ 且 } x_k \neq 0 \text{ 时}$$

$$\frac{f(x_k)}{x_k} + \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) + \Delta_k(a)} \geq a \geq \frac{f(x_k)}{x_k} - \frac{2\Delta_0(a)}{\Delta(a) - \Delta_k(a)}.$$

同时有 $i, j \neq k$ 使

$$\frac{\Delta_i(a)}{a_{ik}} \neq \frac{\Delta_j(a)}{a_{jk}}$$

则方程组(2.15)的零解为全局稳定。

(三)

前面所得的判别方法均须先知道 α, β 的值, 现提出只依据 $f(x)$ 及方程组系数进行全

局稳定判定的一个判别法。

先作几个记号。令 n 阶矩阵的特征根为 $\lambda_s (s=1, \dots, n)$, 其对应的初级因子均为一次, 而 $-\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_i$ 。对应 λ_s 的特征向量为 $b_s = (b_{1s}, \dots, b_{ns})$, 矩阵 $B^* = (b_{sj}^*)$ 表特征向量矩阵 $B = (b_{sj})$ 的逆阵。

定理3.1. 对方程组(0.3), 若 $f(x)$ 满足(0.2)且 α, β 均为有限实常数。同时有实常数 a , 使矩阵 $A = (a_{sj} + \delta_{sj} \delta_{jk} a)$ 的初级因子均为一次, 且有不等式:

$$0 < B_0 M < \lambda \quad (3.1)$$

其中 $B_0 = \frac{1}{2} \left[\sum_{s=1}^n |b_{ks} b_{sj}^*| + \delta_{1k} \right]$, $\left| \frac{f(x_k)}{x_k} - a \right| \leq M$ (对所有 $x_k \neq 0$)。

则方程组(0.3)的零解为全局稳定。

证. 取特征向量矩阵 $B = (b_{sj})$ 作变换矩阵。即令

$$x_s = \sum_{j=1}^n b_{sj} y_j \quad (s=1, \dots, n) \quad (3.2)$$

则可将式(0.3)化为

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s y_s + b_{sj}^* [f(x_k) - a x_k] \quad (s=1, \dots, n) \quad (3.3)$$

取初值 $y_s(0) = c_s$ ($s=1, \dots, n$) 则(3.3)有解:

$$y_s(t) = c_s e^{\lambda_s t} + \int_0^t c_s e^{\lambda_s(t-t_1)} \cdot b_{sj}^* \left[\frac{f(x_k(t_1))}{x_k(t_1)} - a \right] x_k(t_1) dt_1 \quad (s=1, \dots, n) \quad (3.4)$$

故有 $\sum_{s=1}^n b_{ks} y_s(t) = \sum_{s=1}^n c_s b_{ks} e^{\lambda_s t} +$

$$+ \int_0^t \left[\sum_{s=1}^n b_{ks} b_{sj}^* e^{\lambda_s(t-t_1)} \right] \left[\frac{f(x_k(t_1))}{x_k(t_1)} - a \right] x_k(t_1) dt_1 \quad (3.5)$$

由变换(3.2)知 $x_k = \sum_{s=1}^n b_{ks} y_s$ 且由 $\sum_{s=1}^n b_{ks} b_{sj}^* = \delta_{1k}$ 显然可得

$$\left| \sum_{s=1}^n b_{ks} b_{sj}^* e^{\lambda_s t'} \right| < \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^n |b_{ks} b_{sj}^*| + \delta_{1k} \right) e^{-\lambda t'} \quad (t' \geq 0)$$

于是(3.5)式可化为

$$\begin{aligned} |x_k(t)| &\leq \sum_{s=1}^n |c_s b_{ks}| e^{-\lambda t} + \int_0^t \left| \sum_{s=1}^n b_{ks} b_{sj}^* e^{\lambda_s(t-t_1)} \right| \left\| \frac{f(x_k(t_1))}{x_k(t_1)} - a \right\| |x_k(t_1)| dt_1 \\ |x_k(t)| e^{\lambda t} &\leq c + \int_0^t B_0 M |x_k(t_1)| e^{\lambda t_1} dt_1 \end{aligned}$$

其中 $c = \sum_{s=1}^n |c_s b_{ks}|$ 。因 $0 \leq c < +\infty$, 故由 Bellman 引理, 得

$$|x_k(t)| \leq c e^{-(\lambda - B_0 M)t} \quad (3.6)$$

将不等式(3.6)代入(3.4), 易化得

$$|y_s(t)| \leq \left(|c_s| + \frac{|b_{s1}^*|}{B_0} c \right) e^{-\lambda t} + \frac{|b_{s1}^*|}{B_0} c e^{-(\lambda - B_0 M)t} \quad (s = 1, \dots, n)$$

由不等式(3.1), 知 $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_s(t)| = 0 \quad (s = 1, \dots, n)$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_s(t)| = 0 \quad (s = 1, \dots, n)$

再由初值条件的任意性, 得方程组(0.3)的零解为全局稳定。

例. 考虑四阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -16x_1 - 23x_2 - 21x_3 + 6x_4 + \frac{\sqrt{35}x_3^2}{35+x_3^2} \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 7x_2 - 11x_3 - x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} = -3x_1 - 9x_2 - 13x_3 - x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = -3x_1 - 9x_2 - 7x_3 - 7x_4 \end{cases} \quad (3.7)$$

易计算得其系数矩阵

$$\begin{pmatrix} -16 & -23 & -21 & 6 \\ 5 & 7 & -11 & -1 \\ -3 & -9 & -13 & -1 \\ -3 & -9 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

的初级因子为 $(\lambda + 6)$, $(\lambda + 8)$, $(\lambda + 6)$, $(\lambda + 9)$ 均为一次, 而其特征向量矩阵

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } B_0 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^4 |b_{i3}, b_{i1}^*| + \delta_{13} \right] = 1.$$

$$\text{而对 } f(x_3), \text{ 有: } M = \sup_{x_3} \left| \frac{f(x_3)}{x_3} - 0 \right| = \sqrt{35} \quad (a=0)$$

即有 $B_0 M \leq \sqrt{35} < 6$. 适合定理3.1的所有条件, 故方程组(3.7)的零解为全局稳定。

这里, 并不用知道 α, β 之值即可判别其全局稳定性。省却了一套繁难的计算手续。

事实上, 我们可用稳定域的划分法[9]求得 $\alpha = -\infty$, $\beta = \frac{12454}{1953} \approx 6.37$ 。

(四)

现将赵素霞利用降阶法[6]简化方程组(0.4)的条件更加精确化, 并表达成易于判别的形式。同时, 给出其降阶的具体算法。

先将降阶法的适用范围加以扩大, 推广[6]的定理1得:

定理4.1. 对 n 阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n f_{ik}(x_k) & (i=1, \dots, m) \\ \frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k & (j=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.1)$$

和 m 阶方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n f_{ik}(x_k) \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.2)$$

其中 $f_{ik}(x_k)$ ($i, k=1, \dots, m$) 在 $-\infty < x_k < +\infty$ ($k=1, \dots, m$) 单值连续且有

$$\alpha_{ik} x_k^2 < x_k f_{ik}(x_k) < \beta_{ik} x_k^2 \quad \text{对所有 } x_k \neq 0; (i, k=1, \dots, m)$$

$$f_{ik}(0) = 0 \quad (i, k=1, \dots, m)$$

同时, $f_{ik}(x_k)$ 对方程组(4.1)满足广义霍尔茨条件。则方程组(4.1)零解的全局稳定性和方程组(4.2)零解的全局稳定性等价。

因其证明完全可仿照文[6]的证明, 故在此不赘, 现先推出方程组(0.3)的降阶条件, 再转而考虑方程组(0.4)和(0.3)的降阶判别法。

定理4.2. 对 n 阶 Айзерман 自动调整系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j + f(x_k) & (1 \leq k \leq m) \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{sj} x_j & (s=2, \dots, m) \\ \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j & (i=m+1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.3)$$

和 m 阶 Айзерман 自动调整系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j + f(x_k) \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{sj} x_j & (s=2, \dots, m) \end{cases} \quad (4.4)$$

若 $f(x_k)$ 及方程组(4.3), (4.4)的系数均满足(0.2)与(0.3)的条件, 则方程组(4.4)零解的全局稳定性和方程组(4.3)零解的全局稳定性等价。

証. 只要令

$$a_{sj}x_j = f_{sj}(x_j) \quad (s=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, m)$$

$$a_{1k}x_k + f(x_k) = f_{1k}(x_k)$$

即可从定理 4.1 推得定理 4.2。

现对方程组 (0.4) 作如下记号：其 $n-1$ 阶系数矩阵

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

所对应的实特征根 $\lambda_s (s=1, \dots, k, 0 \leq k \leq n-1)$ 各有 μ_s 重 ($\sum_{s=1}^k \mu_s \leq n-1, \mu_k \geq 1$)。且 $A_0 - \lambda_s I$

阵 (I 为 $n-1$ 阶单位阵) 的秩为 $n-1-\theta_s (1 \leq \theta_s \leq \mu_s)$ 即 A_0 对应于特征根 λ_s 有 θ_s 个互相独立线性无关特征向量 $c_{s1}, \dots, c_{s\theta_s}$ 。若对向量 $a = (a_{12}, \dots, a_{1n})$ ，特征向量组 $\{c_{s1}, \dots, c_{s\theta_s}\}$ 中满足条件 $a \cdot c_{sj} = 0$ 的有 p_s 个向量 $c_{s1}, \dots, c_{sp_s} (s=1, \dots, k, 0 \leq p_s \leq \theta_s)$

则可证明

定理 4.3. n 阶方程组 (0.4) 可降低 $n-m$ 阶 (m 的意义见证明) 即 n 阶方程组 (0.4) 零解的全局稳定性与某 m 阶方程组零解的全局稳定性等价。

証. 作新向量组

$$b_{sj} = \begin{cases} c_{sj} & 1 \leq j \leq p_s, \text{ 当 } 1 \leq p_s \text{ 时} \\ \frac{c_{s\theta_s}}{a \cdot c_{sj}} & p_s < j < \theta_s, \text{ 当 } p_s < \theta_s \text{ 时} \end{cases}$$

于是共得 $n-m = \sum_{s=1}^k m_s$ 个向量 $b_{sj} (s=1, \dots, k, j=1, \dots, m_s)$ 其中

$$m_s = \begin{cases} \theta_s - 1 & \text{当 } p_s < \theta_s \\ \theta_s & \text{当 } p_s = \theta_s \end{cases}$$

则显然 $a \cdot b_{sj} = 0$ 且 $b_{sj} (s=1, \dots, k, j=1, \dots, m_s)$ 互为线性无关。

现再选取 $m-1$ 个向量 $d_1, \dots, d_{m-1}$ 使 $n-1$ 个向量组成的向量组 $\{d_i, b_{sj}\} (i=1, \dots, m-1, s=1, \dots, k, j=1, \dots, m_s)$ 为线性无关组。

于是，作 $n-1$ 阶矩阵

$$T_0 = (d_1, \dots, d_{m-1}, b_{11}, \dots, b_{1m_1}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{km_k})$$

其中 d_i, b_{sj} 向量组成矩阵 T_0 的列。显然 $\det T_0 \neq 0$ 。

这样，对方程组 (0.4) 的 n 阶矩阵

$$A = (a_{sj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可作 n 阶变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

因 $\det T = \det T_0 \neq 0$ 故 T 有逆陣 T^* 存在。且可計得

$$T^*AT = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ e_{m+11} & e_{m+12} & \cdots & e_{m+1m} & e_{m+1m+1} & \cdots & e_{m+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nm} & e_{nm+1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

其中 e_{ij} 为实常数，而矩陣

$$\begin{pmatrix} e_{m+1m+1} & \cdots & e_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{nm+1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

是由实特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 的全部或部分的倍数所組成的 Jordan 标准形。

取綫性变换

$$x = Ty \quad \text{其中 } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

由(4.5)式知可将方程組(0.4)化为(4.3)类型的方程組，(其中 $k=1, a_{ij}=e_{ij}$) 再因綫性变换不改变稳定性性質，知 n 阶方程組(0.4)零解的全局稳定性和 m 阶方程組

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = e_{11}y_1 + \cdots + e_{1m}y_m + f(y_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = e_{21}y_1 + \cdots + e_{2m}y_m \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt} = e_{m1}y_1 + \cdots + e_{mm}y_m \end{cases}$$

零解的全局稳定性等价。定理得証。

现再考虑方程組(0.3)的降阶方法。为方便叙述起见，将(0.3)改写为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f(x_2) \\ \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=2, \dots, n) \end{cases} \quad (4.6)$$

設对应于(4.6)式的 $n-2$ 阶系数矩陣

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的实特征根 λ_s ($s=1, \dots, k, 0 \leq k \leq n-2$) 各有 μ_s 重 ($\sum_{s=1}^k \mu_s \leq n-2, \mu_s \geq 1$) 且矩陣 $A_0 - \lambda_s I$

(I 为 $n-2$ 阶单位陣) 的秩为 $n-2-\theta_s$ ($1 \leq \theta_s \leq \mu_s$) 即 A_0 对应于特征根 λ_s 有 θ_s 个綫性无关特征向量 $c_{s1}, \dots, c_{s\theta_s}$ ($s=1, \dots, k$)

若对向量 $a_1 = (a_{13}, \dots, a_{1n})$ 和 $a_2 = (a_{23}, \dots, a_{2n})$ 。特征向量組 $\{c_{s1}, \dots, c_{s\theta_s}\}$ 中同时

满足 $a_1 \cdot c_{sj} = 0$ $a_2 \cdot c_{sj} = 0$ 的有 p_s 个向量 c_{sj} ($j = 1, \dots, p_s$ $0 \leq p_s \leq \theta_s$)

而满足 $a_1 \cdot c_{si} = 0$ $a_2 \cdot c_{si} \neq 0$ 的有 $p_s' - p_s$ 个向量 c_{si} ($i = p_s + 1, \dots, p_s'$ $p_s \leq p_s' \leq \theta_s$)

满足 $a_1 \cdot c_{sk} \neq 0$ $a_2 \cdot c_{sk} = 0$ 的有 $p_s'' - p_s'$ 个向量 c_{sk} ($k = p_s' + 1, \dots, p_s''$ $p_s' \leq p_s'' \leq \theta_s$)

并设当 $p_s'' < \theta_s$ 时满足条件

$$a_2 \cdot \left(\frac{c_{si}}{a_1 \cdot c_{si}} - \frac{c_{s\theta_s}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s}} \right) = 0 \quad a_1 \cdot c_{si} \neq 0$$

的有 $q_s' - p_s''$ 个向量 c_{si} ($i = p_s'' + 1, \dots, q_s'$ $p_s'' \leq q_s' < \theta_s$)

当 $q_s' < \theta_s$ 时满足条件

$$a_1 \cdot \left(\frac{c_{sj}}{a_2 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{s\theta_s}}{a_2 \cdot c_{s\theta_s}} \right) = 0 \quad a_2 \cdot c_{sj} \neq 0$$

的有 $q_s'' - q_s'$ 个向量 c_{sj} ($j = q_s' + 1, \dots, q_s''$ $q_s' \leq q_s'' < \theta_s$)

若记:

$$m_s = \begin{cases} \theta_s - 4 & \text{当 } p_s < p_s' < p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' < \theta_s - 1 \\ \theta_s - 3 & \begin{cases} \text{当 } p_s = p_s' < p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' < \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s < p_s' = p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' < \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s < p_s' < p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' = \theta_s - 1 \end{cases} \\ \theta_s - 2 & \begin{cases} \text{当 } p_s = p_s' = p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' < \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s = p_s' < p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' = \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s < p_s' = p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' = \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s < p_s' < p_s'' = \theta_s \end{cases} \\ \theta_s - 1 & \begin{cases} \text{当 } p_s = p_s' = p_s'' \leq q_s' \leq q_s'' = \theta_s - 1 \\ \text{当 } p_s = p_s' < p_s'' = \theta_s \\ \text{当 } p_s < p_s' = p_s'' = \theta_s \end{cases} \\ \theta_s & \text{当 } p_s = p_s' = p_s'' = \theta_s \end{cases}$$

$$m = n - \sum_{s=1}^k m_s$$

则可证明:

定理 4.1. n 阶方程组 (4.6) 可降低 $n - m$ 阶。即 n 阶方程组 (4.6) 零解的全局稳定性和某 m 阶方程组零解的全局稳定性等价。

证. 作新向量组

$$b_{sj} = \begin{cases} c_{sj} & 1 \leq j \leq p_s \quad \text{当 } 1 \leq p_s \text{ 时} \\ \frac{c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{sp_s}}{a_2 \cdot c_{sp_s'}} & p_s < j < p_s' \quad \text{当 } p_s < p_s' - 1 \text{ 时} \\ \frac{c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{sp_s''}}{a_1 \cdot c_{sp_s''}} & p_s' < j < p_s'' \quad \text{当 } p_s' < p_s'' - 1 \text{ 时} \\ \frac{c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{s\theta_s}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s}} & p_s'' < j \leq q_s' \quad \text{当 } p_s'' < q_s' < \theta_s \text{ 时} \\ \frac{c_{sj}}{a_2 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{s\theta_s}}{a_2 \cdot c_{s\theta_s}} & q_s' < j \leq q_s'' \quad \text{当 } q_s' < q_s'' < \theta_s \text{ 时} \\ \frac{c_{si}}{a_1 \cdot c_{si}} - \frac{c_{s\theta_s-1}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s-1}} - \frac{c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{c_{s\theta_s}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s}} & q_s'' < j \leq \theta_s - 2 \\ \frac{a_2 \cdot c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{a_2 \cdot c_{s\theta_s-1}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s-1}} - \frac{a_2 \cdot c_{sj}}{a_1 \cdot c_{sj}} - \frac{a_2 \cdot c_{s\theta_s}}{a_1 \cdot c_{s\theta_s}} & \text{当 } q_s'' < \theta_s - 2 \text{ 时} \end{cases}$$

于是共得 $n-m = \sum_{s=1}^k m_s$ 个 $n-2$ 维向量 b_{sj} ($s=1, \dots, k$ $j=1, \dots, m_s$, $0 \leq m_s \leq \theta_s$) 且显然

$a_1 \cdot b_{sj} = 0$ $a_2 \cdot b_{sj} = 0$, 同时 $\{b_{sj}\}$ ($s=1, \dots, k$ $j=1, \dots, m_s$) 为线性无关组。

现再选取 $m-2$ 个 $n-2$ 维向量 $d_1, \dots, d_{m-2}$ 使 $n-2$ 个向量组成的向量组 $\{d_i, b_{sj}\}$ ($i=1, \dots, m-2$ $s=1, \dots, k$ $j=1, \dots, m_s$) 为线性无关组

于是可作 $n-2$ 阶矩阵

$$T_0 = [d_1, \dots, d_{m-2}, b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{km}]$$

其中 d_i, b_{sj} 向量组成矩阵 T_0 的列。显然有 $\det T_0 \neq 0$ 。

这样, 对方程组(4.6)的 n 阶矩阵

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & A_0 \end{pmatrix}$$

可作 n 阶变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & T_0 \end{pmatrix}$$

因 $\det T = \det T_0 \neq 0$, 故 T 有逆阵 T^* 存在。易计得

$$T^*AT = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ e_{m+11} & e_{m+12} & \dots & e_{m+1m} & e_{m+1m+1} & \dots & e_{m+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & & e_{nm} & e_{m+n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

其中 e_{sj} 为实常数。

由(2.7)式易知, 只要取线性变换

$$x = Ty \quad \text{其中} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 n 阶方程组(4.6)零解的全局稳定性等价 m 阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sum_{j=1}^m e_{1j} y_j + f(y_2) \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{j=1}^m e_{sj} y_j \quad (s=2, \dots, m) \end{cases}$$

零解的全局稳定性。定理证毕。

例1. 再考虑前面曾讨论过的六阶Айзерман自动调整系统(1.12)。因矩阵

$$A_0 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的实特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ 。而 $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1$
同时特征向量有:

$$C_{11} = (1, 1, 1, 1, 1), C_{12} = (1, 0, 1, 1, 1); \theta_1 = 2$$

$$C_{21} = (1, 1, 0, 1, 1), C_{22} = (1, 1, 1, 0, 1); \theta_2 = 2$$

$$C_{31} = (1, 1, 1, 1, 0), \theta_3 = 1$$

而对 $a = (4, 0, -2, -2, 1)$ 仅有 $a \cdot c_{31} = 0$ 。故得

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad m = 3$$

即方程组(1.12)可降低 3 阶, 化为 3 阶的 Айзерман 问题。事实上, 可求得

$$b_{11} = (0, -1, 0, 0, 0) \quad b_{21} = (0, 0, -1, 1, 0)$$

$$b_{31} = (1, 1, 1, 1, 0) = C_{31}$$

$$\text{令 } d_1 = (0, 0, 0, 0, 1) \quad d_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$$

则有变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

使六阶方程组(1.12)零解的全局稳定性和三阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2 - 2y_3 + f(y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 - y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} = -4y_1 - 2y_3 \end{cases}$$

零解的全局稳定性等价。

例 2. 考虑六阶

方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 42x_3 - 32x_4 - 3x_5 + 8x_6 + f(x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 18x_3 - 13x_4 - x_5 + 3x_6 \\ \frac{dx_4}{dt} = -4x_2 + x_4 \\ \frac{dx_5}{dt} = x_1 - 34x_3 + 26x_4 + 3x_5 - 6x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} = x_1 - x_2 - 102x_3 + 78x_4 + 6x_5 - 17x_6 \end{cases} \quad (4.8)$$

因矩陣

$$A_0 = \begin{pmatrix} 18-13-1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -34 & 26 & 3 & -6 \\ -102 & 78 & 6 & -17 \end{pmatrix}$$

的实特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ 。而 $\mu_1=3, \mu_2=1$

对向量 $a_2=(2, -2, 1, 0)$ $a_1=(42, -32, -3, 8)$

在特征向量

$$c_{11}=(1, 2, 3, 4), c_{12}=(2, 3, 1, 2), c_{13}=(1, 1, 1, -1) \quad \theta_1=3$$

$$c_{21}=(1, 0, -2, -6) \quad \theta_2=1$$

中, 仅有向量 c_{21} , 同时满足

$$a_1 \cdot c_{21} = 0 \quad a_2 \cdot c_{21} = 0$$

于是求得 $m_1=\theta_1-2=1$ $m_2=\theta_2=1$ $m=4$

即六阶的 Айзерман 問題 (4.8), 可降低二阶, 化为四阶的 Айзерман 問題。

事实上。通过計算, 可求得

$$b_{11} = \left(-\frac{3}{2}, -2, -1, -\frac{1}{2}\right) \quad b_{12} = (1, 0, -2, -6)$$

$$\text{令 } d_1 = (0, 0, 1, 0) \quad d_2 = (0, 0, 0, 1)$$

便得变换矩陣

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -6 \end{pmatrix}$$

于是有四阶方程組

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 - 3y_3 + 8y_4 + f(y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} = 3y_1 - 8y_2 + y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = 7y_1 + 20y_2 + y_4 \end{cases}$$

它的零解的全局稳定性和六阶方程組 (4.8) 零解的全局稳定性等价。

参 考 文 献

[1] Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем. Успехи матем. наук, т. IV, в. 4, 1949.

[2] Еругин Н.П. Качественные методы в теории устойчивости. П.М.М 19,

в. 5, 1955.

[3] Еругин Н.П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. П.М.М 16, в. 5, 1952.

[4] Тузов А.П. Вопрос устойчивости для одной системы регулирования. Вестник Л.Г.У. 1955, № 2.

[5] Плисс В.А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Издательство ленинградского университета, 1958.

[6] 赵素霞 一类自动调整系统的全局稳定性问题 山东大学学报 (数学版) 1960年 第一期

[7] И.Г.彼得罗夫斯基 常微分方程讲义 §13 习题 6

[8] Барбашил Е.А.И Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом. Д.А.Н. 86, № 3, 1952.

[9] В.В.索洛多夫 尼柯夫主编 自动调整原理 第一分册 第十一章 稳定域的划分。