

一类非线性方程的V函数作法及其解的全局稳定性问题

徐 詠

李雅普諾夫第二方法是研究調节系統稳定性的有效办法，应用这个方法的关键是作出滿足一定要求的函数V，通常我們称它为李雅普諾夫函数。而到目前为止构造V函数的一般方法还没有很好解决。但是对于研究調节系統稳定性問題中所遇到若干特殊类型的方程，特别是二三阶的方程，很多研究工作者用各种灵巧的办法作出了V函数并用它解决解的全局稳定性問題。所作出的V函数可归結为如下形式：

$$2V = \vec{x}^* \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots 0 \end{pmatrix} \vec{x} + 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} a_{ii}(x) x dx \quad (1)$$

其中 $a_{ij}(i \neq j)$ 为常数， a_{ii} 为常数或 x_i 的函数。 $\vec{x}^* = (x_1 \cdots x_n)$ ， $\vec{x}$ 为 $\vec{x}^*$ 的轉置陣。

本文的目的是提供一种构造形式(1)的V函数的方法。我們常见的很多如此形状的V函数，用它可以很快作出。为了便于讀者了解这个方法的精神和作为这个方法的应用，我們將首先研究若干三、四阶方程，說明V函数的作法和給出解为全局稳定的条件。文末才介紹整个方法的内容。

§1 研究一些三阶方程

1. А. И. Лурье 和 В. Н. Поптныков[2] 在研究調节系統稳定性理論中，提出了如下方程：

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + f(x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = -f(x_3); \quad \frac{dx_3}{dt} = (\alpha - 1)x_1 + \alpha x_2 - rf(x_3). \quad (2)$$

的解的全局稳定性問題。其中 $\alpha > 0, r > 0, r + 1 - \alpha > 0$ ，非线性項 $f(x_3)$ 除了可于 $x_3 = \pm \delta$ 有间断点外，其他点是連續的。这个 $\delta > 0$ 是一个确定的常数，此外 $f(x_3) = 0$ 当 $|x_3| \leq \delta$ 时， $x_3 f(x_3) > 0$ 当 $|x_3| > \delta$ 时。

他們作出了如下的V函数：

$$2V = (\alpha - 1)x_1^2 + \alpha x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x) dx \quad \text{当 } \alpha > 1 \text{ 时, } 2V = (1 - \alpha)x_1^2 + \alpha x_2^2 + 2 \int_0^{x_3} f(x) dx$$

当 $\alpha < 1$ 时。显然，当 $\alpha = 1$ 时它不适用，現在我們来研究当 $\alpha = 1$ 时，如何作V。設所求的V为形式(1) ($n = 3$)，則它通过組(2)的全导数为：

$$\frac{dV}{dt} = x^* \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{13} & a_{11} \frac{f}{x_3} - a_{12} \frac{f}{x_3} - a_{13} r \frac{f}{x_3} \\ -a_{12} & a_{23} & a_{12} \frac{f}{x_3} - a_{12} \frac{f}{x_3} - a_{22} r \frac{f}{x_3} \\ -a_{13} & a_{33} & a_{13} \frac{f}{x_3} - a_{23} \frac{f}{x_3} - a_{33} r \frac{f}{x_3} \end{pmatrix} x \quad (3)$$

由 $\frac{dV}{dt}$ 的表达式(3)我們可以用如下办法确定 a_{ij} , 令 $\frac{dV}{dt}$ 中尽可能多的项为零, 只要

不违反下面两个原则:

- 1) 它所确定的 a_{ij} 除 a_{33} 可以为 x_3 的函数外, 其余的 a_{ij} 为常数。
- 2) 余下的项是关于 $K (K < 3)$ 个变元的完全二次型 (即包含此 K 个元素的平方项),

因为我們要求 $\frac{dV}{dt}$ 是常号型 (对此 K 个变元来说是定号型)。

显然, 令(3)式所有常系数的项为零不违反 1), 但可能违反 2), 因此我們首先考察(3)式中含变系数的项。 $x_1 x_3$ 项的系数为:

$$-a_{13} + a_{11} \frac{f}{x_3} - a_{12} \frac{f}{x_3} - a_{13} r \frac{f}{x_3}$$

这一项不能为零, 因为 $a_{11} \neq 0$ (否则 V 不是定号型), 而 a_{13} 只能为常数。根据原则 2), x_1^2 项和 x_3^2 项也不能为零。剩下 $x_2 x_3$ 项, 它的系数含有 a_{33} , 而 a_{33} 可以为 x_3 的函数, 故此这一项不妨令它为零。由此可见除了 $x_1^2, x_1 x_3, x_3^2$ 三项外, 其余的皆可为零, 因而得方程:

$$a_{13} - a_{12} = 0; \quad a_{23} = 0; \quad a_{33} + a_{12} \frac{f}{x_3} - a_{22} r \frac{f}{x_3} - a_{23} r \frac{f}{x_3} = 0 \quad (4)$$

設 $a_{13} = 0$, 則由(4)得:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = a_{22} r \frac{f}{x_3} \quad (5)$$

把(5)代入(3)得:

$$\frac{dV}{dt} = -a_{11} \left(x_1 - \frac{1}{2} f \right)^2 - (a_{22} r - \frac{1}{2} a_{11}) f^2$$

为了使 $\frac{dV}{dt} < 0$, 必須 $a_{11} > 0$, $a_{22} r - \frac{1}{2} a_{11} > 0$, 我們不妨取 $a_{11} = 4$, $a_{22} = \frac{2}{r}$ 。結果求得:

$$V = 2x_1^2 + \frac{1}{r}x_2^2 + \frac{2}{r} \int_0^{x_3} f(x) dx, \quad \frac{dV}{dt} = -4 \left(x_1 - \frac{1}{2} f \right)^2 - f^2$$

而区域: $x_1 = 0, |x_3| \leq \delta$, 不包含組(2)的正半軌綫, 按文[1]定理4, 立刻可知組(2)的零解是全局稳定的*。

2 E. A. Барбашин[3]研究了方程:

- * 这里的全局稳定是指: 任何初值所确定的解, 当 $t \rightarrow \infty$ 时都进入区域: $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
 $|x_3| \leq \delta$

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} + a \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + f(x_1) = 0 \quad (6)$$

他把它化为如下形式的等价組:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3 - ax_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = -\varphi(x_2) - f(x_1) \quad (7)$$

其中 $a \neq 0$ 为常数, $f(x_1)$ 連續可微, $\varphi(x_2)$ 連續, 此外 $\varphi(0) = f(0)$ 。对組(7)作得:

$$V = a \int_0^{x_1} f(x) dx + f(x_1)x_2 + \int_0^{x_2} \varphi(x) dx + \frac{1}{2} x_3^2$$

現在我們提出另一种作 V 函数的方法, 它不必把(6)化为組(7)这种特殊形式的方程組, 而是采用最自然的方程組。

第一步: 考虑 $f(x_1) \equiv b x_1$ 的情形, b 为常数。把(6)写成:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -bx_1 - \varphi(x_2) - ax_3 \quad (8)$$

設所求的 V 的形式(1), 則它通过組(8)的全导数为:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} -a_{13}b, & a_{11} - a_{13}\frac{\varphi}{x_2} & a_{12} - a_{13}a \\ -a_{23}b & a_{12} - a_{23}\frac{\varphi}{x_2} & a_{22} - a_{23}a \\ -a_{33}b & a_{13} - a_{33}\frac{\varphi}{x_2} & a_{23} - a_{33}a \end{pmatrix} \rightarrow_x \quad (9)$$

和第一款一样, 根据那两个原則, 令(9)式充分多的項为零。显然, 这里除 x_2^2 項外, 其余各項均可为零, 故此得方程組:

$$\begin{cases} a_{13}b = 0, & a_{11} - a_{13}\frac{\varphi}{x_2} - a_{23}b = 0, & a_{12} - a_{13}a - a_{33}b = 0 \\ a_{22} - a_{23}a + a_{13} - a_{33}\frac{\varphi}{x_2} = 0, & a_{23} - a_{33}a = 0 \end{cases} \quad (10)$$

解(10)得:

$$a_{11} = ab, \quad a_{12} = b, \quad a_{13} = 0, \quad a_{22} = a^2 + \frac{\varphi}{x_2}, \quad a_{23} = a, \quad a_{33} = 1$$

$$\therefore 2V = \frac{b}{a}(ax_1 + x_2)^2 + (ax_2 + x_3)^2 + 2 \int_0^{x_2} \left(\varphi(x) - \frac{b}{a}x \right) dx; \quad \frac{dv}{dt} = \left(b - a \frac{\varphi(x_2)}{x_2} \right) x_2^2 \quad (11)$$

第二步, 在(8)式中把 bx_1 換回 $f(x_1)$, 相应地在(11)式的 V 的右边把 abx_1^2 項改为 $2a \int_0^{x_1} f(x) dx$, $2bx_1x_2$ 項改为 $2f(x_1)x_2$, 便得新 V^* :

$$2V^* = 2a \int_0^{x_1} f(x) dx + 2f(x_1)x_2 + 2 \int_0^{x_2} \varphi(x) dx + (ax_2 + x_3)^2$$

这就是我们要求的, 但此时它通过新(8)组的全导数为:

$$\frac{dv^*}{dt} = \left(f'(x_1) - a \frac{\varphi(x_2)}{x_2} \right) x_2^2$$

至此我们不难给出方程(6)的零解为全局渐近稳定的条件, 读者可参考文[3]。

3. 所求的(11)式的V还可应用于方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -bx_1 - \varphi(x_1, x_2) - ax_3 \quad (12)$$

其中a, b为常数; $\varphi(x_1, x_2)$ 连续, 对 x_1 有连续偏导数, 且满足解的唯一性条件, 此外 $\varphi(0, 0) = 0$ 。

它与(8)的不同点只是 $\varphi(x_2)$ 换为 $\varphi(x_1, x_2)$ 。我们不妨搬用那里的V:

$$2V = \frac{b}{a}(ax_1 + x_2)^2 + (ax_2 + x_3)^2 + 2 \int_0^{x_2} \left(\varphi(x_1, x) - \frac{b}{a}x \right) dx$$

在积分中的 x_1 看作参变量, 此时它通过(12)的全导数为:

$$\frac{dv}{dt} = \left(b - a \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2} \right) x_2^2 + x_2 \int_0^{x_2} \frac{\partial \varphi(x_1, x)}{\partial x_1} dx$$

于是按文[1]定理4, 我们有:

定理1 若a, b, $\varphi(x_1, x_2)$ 满足条件: $a > 0, b > 0, \frac{\varphi}{x_2} - \frac{b}{a} > 0 \quad x_2 \neq 0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \leq 0, \int_0^{\pm\infty} \left[\varphi(x_1, x) - \frac{b}{a}x \right] dx = \infty$$

则方程组(12)的零解是全局渐近稳定的。

§2 下面考虑一些四阶方程

$$4. \quad \frac{d^4 x_1}{dt^4} + \varphi \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \frac{d^3 x_1}{dt^3} + c \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + ax_1 \quad (13)$$

化为等价组:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -ax_1 - bx_2 - cx_3 - \varphi(x_3)x_4 \quad (14)$$

其中a, b, c为常数, $\varphi(x_3)$ 为连续函数。并满足广义霍维茨条件:

$$\varphi > 0, \quad c\varphi - b > 0, \quad bc\varphi - a\varphi^2 - b^2 > 0, \quad a > 0 \quad (15)$$

设所求的V为形式(1)(n=4), 则它通过组(14)的全导数为:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{x}^* \begin{pmatrix} -a_{14}a, & a_{11}-a_{14}b, & a_{12}-a_{14}c, & a_{13}-a_{14}\varphi \\ -a_{24}a, & a_{12}-a_{24}b, & a_{22}-a_{24}c, & a_{23}-a_{24}\varphi \\ -a_{34}a, & a_{13}-a_{34}b, & a_{23}-a_{34}c, & a_{33}-a_{34}\varphi \\ -a_{44}a, & a_{14}-a_{44}b, & a_{24}-a_{44}c, & a_{34}-a_{44}\varphi \end{pmatrix} \vec{x} \quad (16)$$

按照 §1.1 那里所说的两个原则考虑, 我们知道(16)式除 x_2^2, x_2x_4, x_4^2 三项外, 其余的各项均可为零。因而得:

$$\begin{cases} a_{14}a = 0, & a_{11}-a_{14}b-a_{24}a = 0, & a_{12}-a_{14}c-a_{34}a = 0 \\ a_{13}-a_{14}\varphi-a_{44}a = 0, & a_{22}-a_{24}c+a_{13}-a_{34}b = 0 \\ a_{23}-a_{34}c = 0, & a_{33}-a_{34}\varphi+a_{24}-a_{44}c = 0 \end{cases} \quad (17)$$

解(17)得:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a\lambda_1, a_{12} = a\lambda_2, a_{13} = a\lambda_3, a_{14} = 0, a_{22} = \lambda_1 c + \lambda_2 b - a\lambda_3 \\ a_{23} &= \lambda_2 c, a_{24} = \lambda_1, a_{33} = \lambda_2 \varphi + \lambda_3 c - \lambda_1, a_{34} = \lambda_2, a_{44} = \lambda_3 \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为任意参数。把(18)代入(16)得

$$\frac{dV}{dt} = (a\lambda_2 - \lambda_1 b)x_2^2 + (\lambda_2 c - \lambda_1 \varphi - \lambda_3 b)x_2 x_4 + (\lambda_2 - \lambda_3 \varphi)x_4^2$$

为了使得 $\frac{dV}{dt} < 0$, 則必須且只須

$$\lambda_2 - \lambda_3 \varphi < 0, (a\lambda_2 - \lambda_1 b)(\lambda_2 - \lambda_3 \varphi) - \frac{1}{4}(\lambda_2 c - \lambda_1 \varphi - \lambda_3 b)^2 > 0$$

参数 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 的选择应使这两不等式与广义霍維茨条件相同或相近, 对照(15), 我們可取: $\lambda_1 = 2a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$ 。于是求得:

$$2V = x^* \begin{pmatrix} 2a^2 & ab & ac & 0 \\ ab & b^2 + ac & bc & 2a \\ ac & bc & c^2 - 2a + \frac{b^2}{c} & b \\ 0 & 2a & b & c \end{pmatrix} x + 2b \int_0^{x_3} \left(\varphi(x) - \frac{b}{c} \right) x dx \quad (19)$$

$$\frac{dV}{dt} = -abx_2^2 - 2a\varphi x_2 x_4 + (b - c\varphi)x_4^2 \quad (20)$$

V的二次型判别式为: $\Delta_1 = 2a^2, \Delta_2 = a^2b^2 + 2a^3c, \Delta_3 = \frac{a^2b^4}{c} + a^3c(c^2 - 4a)$

$$\Delta_4 = \frac{2a^3b^2}{c}(c^2 - 4a) + a^3(c^2 - 4a)^2$$

$$\frac{dV}{dt} \text{ 的判别式: } \Delta'_1 = -ab \quad \Delta'_2 = a(bc\varphi - a\varphi^2 - b^2)$$

由V为定正, $\frac{dV}{dt}$ 常負的条件, 再根据文[1]定理4 我們有:

定理2 若 $a, b, c, \varphi(x_3)$ 满足条件:

$$a > 0, b > 0, c > 0, \varphi > 0, bc\varphi - a\varphi^2 - b^2 > 0$$

則方程(13)的零解是全局漸近稳定的。

5. 所得的(19)式的V可应用于方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = x_4, \frac{dx_4}{dt} = -ax_1 - bx_2 - cx_3 - \varphi(x_2, x_3)x_4 \quad (21)$$

其中 a, b, c 为常数, $\varphi(x_2, x_3)$ 为連續函数, 对 x_2 有連續的偏导数。它与組(14)的区别只是把 $\varphi(x_3)$ 换为 $\varphi(x_2, x_3)$ 。我們取(19)式的V, 它通过(21)的全导数, 比(20)多一項

$$bx_3 \int_0^{x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x) x dx, \text{ 因而得:}$$

定理2' 若 $a, b, c, \varphi(x_2, x_3)$ 满足条件:

$$a > 0, b > 0, c > 0, \varphi > 0, bc\varphi - a\varphi^2 - b^2 > 0, x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \leq 0$$

则方程(21)的零解是全局渐近稳定的。

$$6. \quad \frac{d^4 x_1}{dt^4} + c \frac{d^3 x_1}{dt^3} + b \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} \right) + ax_1 = 0 \quad (22)$$

化为等价组:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -ax_1 - \varphi(x_2) - bx_3 - cx_4 \quad (23)$$

其中a, b, c, 为常数, $\varphi(x_2)$ 连续, 且满足解的唯一性条件, 此外 $\varphi(0)=0$. 它的广义霍维茨条件为:

$$c > 0, bc - \frac{\varphi}{x_2} > 0, bc \frac{\varphi}{x_2} - ac^2 - \left(\frac{\varphi}{x_2} \right)^2 > 0, x_2 \neq 0 \quad a > 0 \quad (24)$$

同 § 2.4 一样的办法不难求得:

$$2V = \vec{x}^* \begin{pmatrix} ab & ac & 2a & 0 \\ ac & b^2 - 2a + \frac{ac^2}{b} & bc & b \\ 2a & bc & c^2 + b & c \\ 0 & b & c & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + 2c \int_0^{x_2} \left(\varphi(x) - \frac{ac}{b}x \right) dx$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(ac - b \frac{\varphi}{x_2} \right) x_2^2 - 2 \frac{\varphi}{x_2} x_2 x_4 - cx_4^2$$

下面给出的定理, 和定理 2 的推证过程是一样的, 不再重复。

定理 3 若 a, b, c, $\varphi(x_2)$ 满足条件:

$$a > 0, b > 0, c > 0, \frac{\varphi}{x_2} > 0, bc \frac{\varphi}{x_2} - ac^2 - \left(\frac{\varphi}{x_2} \right)^2 > 0 \quad x_2 \neq 0$$

则方程(22)的零解是全局渐近稳定的。

7. 正如第 5 款一样, 上述的 V 也可用于方程:

$$\frac{d^4 x_1}{dt^4} + c \frac{d^3 x_1}{dt^3} + b \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \varphi \left(x_1, \frac{dx_1}{dt} \right) + ax_1 = 0 \quad (25)$$

其中 a, b, c 为常数, $\varphi(x_1, x_2)$ 为连续函数, 对 x_1 有连续的偏导数此外 $\varphi(0,0)=0$. 我们有

定理 3' 若 a, b, c, $\varphi(x_1, x_2)$ 满足条件:

$$a > 0, b > 0, c > 0, \frac{\varphi}{x_2} > 0, bc \frac{\varphi}{x_2} - ac^2 - \left(\frac{\varphi}{x_2} \right)^2 > 0, x_2 \neq 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \leq 0$$

则方程(25)的零解是全局渐近稳定的。

下面两个定理可仿照上述办法证明, 我们只给出结果:

$$8. \quad \frac{d^4 x_1}{dt^4} + c \frac{d^3 x_1}{dt^3} + \varphi \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + b \frac{dx_1}{dt} + ax_1 = 0 \quad (26)$$

其中 a, b, c 为常数, $\varphi(x_3)$ 连续, 且满足解的唯一性条件, 此外 $\varphi(0)=0$.

定理4 若 $a, b, c, \varphi(x_3)$ 滿足條件:

$$a > 0, b > 0, c > 0, b - a > 0, c + \frac{b}{c} < \frac{\varphi}{x_3} < c + \frac{b}{c} + 4(b - a) \quad x_3 \neq 0$$

則方程(26)的零解是全局漸近穩定的。

$$9. \quad \frac{d^4 x_1}{dx^4} + c \frac{d^3 x_1}{dt^3} + \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} \right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{dx_1}{dt} + ax_1 = 0 \quad (27)$$

其中 a, b, c 為常數, $\varphi(x_2)$ 連續。

定理5 若 $a, b, c, \varphi(x_2)$ 滿足條件:

$$a > 0, b > 0, c > 1, \frac{ac + b^2}{b} < \varphi < \frac{ac + b^2}{b} + 4(c - 1)$$

則方程(27)的零解全局漸近穩定。

下面轉入方法的敘述。

§3 方法与步驟

已給方程組:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

其中 p_{ij} 是常數或 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函數。並且 p_{ij} 滿足解的唯一性條件。

求作形如(1)式的定號李雅普諾夫函數 V 。下面敘述的方法其實是針對方程組(28)只含有一個變元的非線性函數而言, 如果含有幾個變元的非線性函數, 我們可先從最簡單的情形着手, 然後應用常數換為變數的辦法, 例如 §1.1 那樣。

1. 關於 a_{ij} 的方程組的建立方法。由 $\frac{dV}{dt} = x^* B x$, ($B = A_p$) 選取尽可能多的項為零,

只要它不違反兩個原則:

1) 所確定的 a_{ij} 除 a_{ii} 可以為 x_i 的函數外, 其餘的皆為常數。

2) 余下的項是關於 $k (k < n)$ 個變元的完全二次型(即包含此 k 個變元的平方項), 因為我們要求 $\frac{dV}{dt}$ 是常號型(對 k 個變元來說是定號型)。

顯然, 如果 $\frac{dV}{dt}$ 中所有常系數的項取為零, 不違反1), 但可能違反2)。因此我們可以考察含變系數的項, 如果某一項的系數選為零: $b_{pq} + b_{qp} = 0$, 將使得某些 $a_{ij} (i \neq j)$ 不是常數, 則這一項保留, 根據2)的要求, 連 x_i^2 項和 x_j^2 項也要保留, 凡不屬保留範圍的項, 皆取為零, 這就得到關於 a_{ij} 的 $m (m < \frac{n(n+1)}{2})$ 個齊次方程。

2. a_{ij} 的解系中參數的選擇。由於所得的方程個數少於未知數, 所以一定有解, 並且是一族解, 這族解中的參數, 可以隨意確定, 它的選擇原則應該使得 v 定正, $-\frac{dV}{dt}$ 常負

的条件不要太强,最好是与广义霍维茨条件相同。 v 定正 $\frac{dV}{dt}$ 常负的判别式与广义霍维茨条件对照可以帮助我们确定所需的参数。如果这种对比给我们没有多少启发,则要按照问题的要求和其他方面的考虑采取机巧的办法。应该指出,参数选择的任意性,给我们很大的活动余地。对具体的问题,要作具体的研究。

3. 解的全局渐近稳定条件之探索。原先我们不知道所给的方程在什么条件下是全局稳定的,但是求得 v 和 $\frac{dV}{dt}$ 以后,按照文^[1]定理 4 所要求的条件,我们就可得到解为稳定的条件。因此我们可用寻求特殊形式的 v 函数的办法去探索渐近稳定的条件。

如果我们对一个方程求得 v 函数,则我们可充分应用它去判断与所给方程相类似的方程的解的稳定性问题。例如,已给方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \frac{dx_n}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + p(x_p) x_k + \dots + a_n x_n \quad (29) \text{ 其中 } a_i (i \neq k)$$

为常数, $p(x_p)$, $(p < n)$ 为连续函数。如果对它求得形如(1)式的定正的 v 函数:

$$2V = \sum a_{ij} x_i x_j + b \int_0^{x_p} p(x) x dx \quad (30)$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$, a_{ij} , b 皆为常数。并且断定在某条件 P 下,方程组(29)的零解是全局渐近稳定的。则在方程(29)中把 $p(x_p)$ 换为 $p(x_{p-1}, x_p)$ 而得的方程(29)' 的零解也是渐近稳定的,如果条件 P 中再加上 $b \frac{\partial p}{\partial x_{p-1}} x_p \leq 0$ 。事实上把(30)式的 $p(x)$ 换为 $p(x_{p-1}, x)$ 取作方

程(29)' 的 v , 则它通过此组的全导数只增多一项: $b x_p \int_0^{x_p} \frac{\partial p(x_{p-1}, x)}{\partial x_{p-1}} x dx$ 。

最后,感谢胡金昌教授,许滋庆教授和黎百恬老师的指导。

参 考 文 献

1. Барбашин Е.А. и Красовский Н.Н. Об Устойчивости движения в целом. ДОКЛ. АН. СССР ТЛ XXXVI №3 1952.

2. Лурье А.И. и Понтяков В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем ПММ 1944.

3. Барбашин Е.А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка ПММ 1952.

4. Огурцов А.И. Об устойчивости решения двух нелинейного дифференциальных уравнения третьего и четвертого порядков ПММ 1959.