# 混合型微分方程

許毅然 黄焕良 杜之明

（数学力学系）

1950年 A.B.Бицадзе 研究了 Лаврентьев 方程的一系列边值問題[1]，最近华罗庚教授在研究空間混合型方程中順带把 Лаврентьев 方程的 Tricomi 問題解决得透彻无遗[2]。作者根据华教授的手稿所提的思想，利用复变函数来研究 Лаврентьев 方程各种边值問題的唯一性和混合問題的解的存在性，大大地放松了 A.B.Бицадзе 的 $c$ 条件并允許边界已知函数有奇异性，文章还用簡单的方法解决了前所未解决的混合問題。文中各唯一性的証明是許毅然提供的，混合問題解的存在性証明是黄焕良、杜之明提出的。作者对华教授的关怀指导以及吳兹潛同志的帮助表示感謝。

## 一 几个引理

引理1[2]：設 $f(z)$ 在 $r<|z|<R$ 内解析，当 $z$ 在域内实軸、虚軸上取实值时 $f(z)$ 取实值，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{2n}z^{2n} \qquad r<|z|<R$$

这儿 $b_{2n}$ 为实数。

由引理1有：

引理2：設 $D=\{z\ |z|<r,\ x>0,\ y>0\}$，$f(z)$ 在 $\bar{D}$ 除 $z=0$ 外解析，当 $z$ 在虚軸时 $f(z)$ 的值落在直綫 $u+v=0$ 上，当 $z$ 落在实軸上时，$f(z)$ 落在实軸上，即 $v=0$。則"$u(z)$ 在 $\bar{D}$ 連續"$\rightleftarrows \lim\limits_{z\to 0} z^{1/2}f(z)=0 \rightleftarrows \lim\limits_{z\to 0} z^{3/2}f'(z)=0$。

証明：置 $F(z)=z^{1/2}f(z)$，$z\in D$. 其中 $z^{1/2}$ 取当 $z$ 为实数时为正实数那支。

按对称原理，可把 $F(z)$ 解析开拓到区域 $0<|z|<r$，且知当 $z$ 在区域内实軸或虚軸时，$F(z)$ 均取实值。

据引理1，$F(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_{2n}z^{2n} \qquad 0<|z|<r \qquad (1)$

或 $z^{1/2}f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{2n} z^{2n}$ $\qquad 0 < |z| < r$ (1′)

$$z^{3/2}f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n-\tfrac{1}{2})b_{2n} z^{2n} \qquad 0 < |z| < r \tag{2}$$

1° 若 $u(z)$ 在 $\overline{D}$ 上連續，則 $\lim\limits_{z\to 0} z^{1/2}f(z) = 0$.

$u(z)$在 $\overline{D}$ 上連續則 $|u(z)|$ 在$\overline{D}$ 有界，設为$M$. 从(1′)表达式 $z^{1/2}f(z)$ 以 0 为其孤立异点，后面将証明它是可消去奇点，且以 0 为零点。

由于 $z$ 取实軸时 $z^{1/2}f(z)$取实数值，且以 $r^{1/2}M$为界，故 0 不是 $z^{1/2}f(z)$的极点。其次証 0 不是本性异点。事实上，任給出一条自 0 点出发的射綫 I，以 I 为平分綫、角为 $\varepsilon(\varepsilon < \frac{\pi}{2})$ 的角形（指落在 $|z| < r$ 那部分）內，$\sqrt{z}\, f(z)$所取不到之值非常之多，根据 Julia 关于本性奇点的定理（參見〔3〕第二章§.7定理 5）便知 0 不是$\sqrt{z}\, f(z)$的本性奇点。所以 0 是$\sqrt{z}\, f(z)$的可去奇点。

当 $z$ 取实軸趋于 0 时，$\sqrt{z}\, f(z)$取实值且趋于 0，故 0 是$\sqrt{z}\, f(z)$的零点。即

$$\lim_{z\to 0} z^{1/2}f(z) = 0$$

2° 若 $\lim\limits_{z\to 0}\sqrt{z}\, f(z) = 0$，則 $\lim\limits_{z\to 0} z^{3/2}f'(z) = 0$.

事实上，由于(1′)表达式及 $\lim\limits_{z\to 0} \sqrt{z}\, f(z) = 0$ 知，$\sqrt{z}\, f(z)$ 以 0 为可去奇点，且以 0 为零点。即

$$z^{1/2}f(z) = b_2z^2 + b_4z_4 + \cdots$$
$$z^{3/2}f'(z) = (2-\tfrac{1}{2})b_2z^2 + (4-\tfrac{1}{2})b_4z^4 + \cdots$$

即得 $\lim\limits_{z\to 0} z^{3/2}f'(z) = 0$

3° 若 $\lim\limits_{z\to 0} z^{3/2}f'(z) = 0$，則 $u(z)$ 在 $\overline{D}$上連續.

事实上，由于(2)及 $\lim\limits_{z\to 0} z^{3/2}f'(z) = 0$ 知 $z^{3/2}f'(z)$ 以 0 为可去奇点，且以 0 为零点。即

$$z^{3/2}f'(z) = (2-\tfrac{1}{2})b_2z^2 + (4-\tfrac{1}{2})b_4z^4 + \cdots\cdots$$

亦即 $b_{2n} = 0$，$n \leqslant 0$

$$\therefore \qquad f(z) = b_2z^{2-1/2} + b_4z^{4-1/2} + \cdots\cdots \qquad 0 < |z| < r$$

此示 $f(z)$ 在 0 点連續，因而 $u(z)$在 $\overline{D}$ 連續。

引理 3 設 $D' = \{z: |z| < r、x > 0，y < 0\}$，$f(z)$ 在$\overline{D}'$上除 $z = 0$ 外处处解析，当 $z$ 在实軸时$f(z)$的値落在实軸上，即 $v(z) = 0$，当 $z$ 落在虛軸上时，

$f(z)$落在直綫$u+v=0$上，则"$u(z)$在$\bar{D}'$連續"$\rightleftarrows$"$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in D'}} z^{3/2}f(z)=0$"$\rightleftarrows$

"$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in D}} z^{5/2}f'(z)=0$"。

証明仿照引理 2．

附記：引理 2、3 中的$D$、$D'$的直綫边界改为正交的园弧，$f(z)$的値所落的二条直綫只要相交于原点，且交角为$\pi/4$，引理亦成立。

## 二　唯一性定理

設$D$是由$|z|=1$，$y\geqslant 0$及$AC: x+y=-1$，$BC: y-x=-1$所圍成的域，$A_1$是$AC$上的一点，$B_1$是$BC$上的一点，而$A_1E_1: x-y=h$；$E_1B_1: x+y=h$，$0<h<1$記域$D$于上半平面的部分为$D_1$．

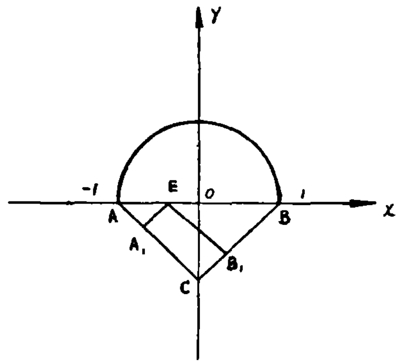

图 1

$$
(T_1')\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Sgny\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u|\sigma=\varphi\\ u|_{AA_1}=\psi_1\\ u|_{B_1B}=\psi_2\end{cases}
$$

其中$\varphi$、$\psi_1$、$\psi_2$为已知函数。

（1）若$u(z)$是适合下列条件的解：(i)在$D$、$y\neq 0$及$z\bar{\in} A_1E_1$，$z\bar{\in} B_1E_1$满足$(T_1')$；(ii)$u_x$、$u_y$在$AB$上除$A$、$E_1$、$B$外連續；(iii)$u$在$\bar{D}$上連續，则$u(z)$是唯一的。

〔証〕这問題相当于：$f(z)=u+iv$在$\bar{D}_1$除$A$、$E_1$、$B$外解析，$u(z)|_\sigma=0$，$(u+v)|_{AE_1}=0$，$(u-v)_{E_1B}=C$及$u$在$\bar{D}_1$上連續，求証$u(z)\equiv 0$ $z\in D_1$。

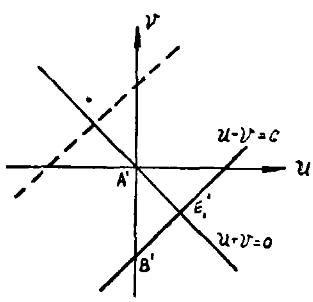

图 2

用輻角原理可証$f(z)$在$D_1$内的値只可落在三条直綫：$u=0$、$u+v=o$，$u-v=C$所圍成的閉区域$\Delta A'B'E'$上。又由于$f(z)$在$\bar{D}_1$边界上除$A$、$B$、$E_1$点外点点解析，若$f(z)\neq const$，则$f'(z)$在$\bar{D}_1$的边界上除$A$、$B$、$E_1$点外不等于0，否則$f(z)$在$D_1$内可取$\Delta B'A'E'$的外点为値此与上面的結論矛盾，

因而知当$z$划$D_1$的边界$BAE_1B$时$f(z)$划$\Delta A'B'E_1'$的边界但走向恰相反，此违背于保角原則，故得証$f(z)=const.$由$u|_\sigma=0$，便得$u\equiv 0$。

（2） 若$u(z)$是适合下列条件解：i）在$D$，$y\neq 0$及$z\bar{\in}A_1E_1$，$z\bar{\in}E_1B_1$滿足方程；ii）$u_x$、$u_y$在$AB$上除$A$、$E_1$、$B$外連續，iii）且$u_x,u_y=o(|z-A|^{-3/2})$，$z\to A$，$u_x$、$u_y=0(|z-B|^{-7/2})$，$z\to B$，$u_x,u_y=o(|z-E_1|^{-1/2})z\to E_1$.則解$u(z)$是唯一的。

〔証〕 此問題相当于$f(z)=u+iv$在$D_1$除$A$、$E_1$、$B$外解析，$u(z)|_\sigma=0$，$(u_x+v_x)_{AE_1}=0$，$(u_x-v_x)_{E_1B}=0$及iii)，求証$u(z)\equiv 0$.

下变换$Z=\dfrac{z-A}{B-z}$把$D_1$映为$XY$平面中的第一象限、$\sigma$映为虚軸，$AB$映为整条实軸，$E_1$映为$E_1'$

置$F(Z)=U(Z)+iV(Z)=f(z)$，把$f(z)$的性质反映到$F(Z)$便得：$F'(Z)$在第一象限上除$O,E_1',\infty$点外点点解析，且$V_X(O.Y)=O$，$Y>O$，（$\because U(O.Y)=O$及$U_Y(O.Y)=O$而得）；$(U_X+V_X)_{OE_1'}=O$，$(U_X-V_X)_{E_1'\infty}=O$（$E_1'\infty$指正实軸一段）。若能証明$F'(Z)$在$O$，$E_1'$，$\infty$点連續且有界，应用幅角原理可証得$F'(Z)=O$，从而得$f'(z)=O$，而得$u(z)=O$。不难知$F'(z)$在$O$、$E_1'$处的連續性等价于$f'(z)$在$A$、$E_1$点的連續性。而后者根据引理它等价于：$u_x$、$u_y=o(|z-A|^{-3/2})$，$z\to A$及$u_x$，$u_y=o(|z-E_1|^{-1/2})$，$z\to E_1$。

至于$F'(Z)$在$\infty$点的情况，由于$e^{-\frac{\pi}{4}i}\sqrt{Z}F'(Z)$在$|Z|>|E_1'|$解析，且把其中的实軸部分、虚軸部分映为实数。据引理1，

$$F'(Z)=\cdots\cdots+\alpha_{-2}Z^{-2-\frac{1}{2}}+\alpha_0Z^{-\frac{1}{2}}+\alpha_2Z^{2-\frac{1}{2}}+\cdots\cdots,|Z|>|E_1'|$$

由此看出当"$F'(Z)=o(Z^{3/2})$，$Z\to\infty$"成立时，$F'(Z)$在$\infty$邻域連續且有界。

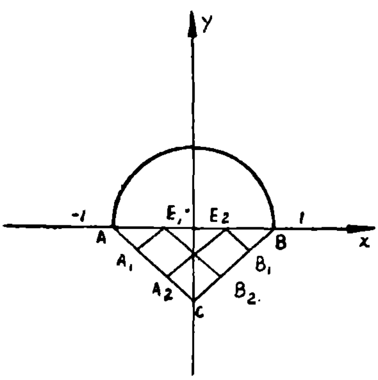


图3

$$\text{由于}f'(z)=\frac{B-A}{(B-z)^2}F'(Z)$$

故当"$f'(z)=o(|z-B|^{-7/2})$，$z\to B$"成立时，"$F'(Z)=o(|Z|^{3/2}),Z\to\infty$"成立，因而$F'(Z)$在$\infty$邻域連續且有界，故(2)得証。

$$(T_1{}^2)\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+Sgny\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=O\\ u|_\sigma=\varphi\\ u|_{AA_1}=\psi_1,\ u|_{A_2C}=\psi_3\\ u|_{B_1B_2}=\psi_2\end{cases}$$

其中$\varphi$、$\psi_1$、$\psi_2$、$\psi_3$、为已知函数。

若$u(z)$满足下列条件：(i)在$D$，$y\neq 0$及$z$不在$A_1E_1$，$A_2E_2$，$B_1E_1$，$B_2F_2$上时满足$(T_1{}^2)$；(ii)$u$、$u_x$、$u_y$在$A_1$、$E_1$、$E_2$、$B$之外在$AB$上处处連續；(iii)$u_x$、$u_y=o(|z-A|^{-3/2})$，$z\to A$；$u_x$、$u_y=o(|z-B|^{-5/2})$，$z\to B$；$u_x$、$u_y=o(|z-E_i|^{-1/2})$，$z\to E_i$，$i=1$、$2$。則$u(z)$是唯一的。

証明与以上相似，在此从略。

例：$B'A'E'_1E_2'$如图所示的四边形。設$F(z)=u(z)+iv(z)$是把区域$D_1$映为四边形$B'A'E_1'E_2'$的单叶保角映射，且它把

$A\longleftrightarrow A'$；　　$B\longleftrightarrow B'$；

$E_1\longleftrightarrow E_1'$；　　$E_2\longleftrightarrow E'_2$。

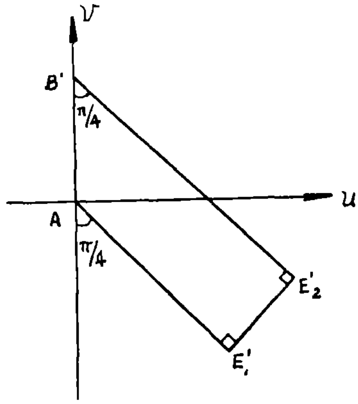


图 4

作函数：

$$f(t)=\begin{cases}u(t,0)-u(E_1,0) & A<t<E_1\\ 0 & E_1<t<E_2\\ u(t,0)-u(E_2,0) & E_2<t<B.\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}0 & A<t<E_1\\ u(t,0)-u(E_1,0) & E_1<t<E_2\\ u(E_2,0)-u(E_1,0) & E_2<t<B.\end{cases}$$

$$u_1(z)=\begin{cases}u(z) & z\epsilon\overline{D}_1\\ f(x+y)+g(x-y)+u(E_1,0) & z\epsilon(D-D_1)\end{cases}$$

不难驗証$u_1(z)$滿足：(i$_0$)在$D$，$y\neq 0$及$z$不在$A_1E_1$，$A_2E_2$，$B_1E_1$，$B_2E_2$时滿足$(T_1{}^2)$这里$\varphi$，$\psi_1$，$\psi_2$，$\psi_3$为0；ii$_0$)$u_x$，$u_y$在$AB$上除$E_1$、$E_2$、$B$外連續，在$E_1$、$E_2$、$B$点附近有：

$u_x$、$u_y=O(|z-E_i|^{-1/2})$，　$z\to E_i$　$(i=1, 2)$

$u_x$、$u_y=O(|z-B|^{-1/2})$，　$z\to B$

(iii$_0$)$u$在$\overline{D}$上連續。

从这个例子可以看出：$u(z)$在$\overline{D}$上連續并滿足(i$_0$)、(ii$_0$)条件下不是唯一的。又$u(z)$在$E_1$、$E_2$点附近有低于$\frac{1}{2}$阶$\infty$的一阶偏导数的条件不能減弱。由此可知Бицадзе在[1]中所提的$u(z)$可以有低于一阶的奇性这結果是不当的。

关于一般的問題$T_1$，[1]完全可仿以上作出。

利用以上方法，可以把它推广到其他边界問題，現列举于后：

問題$T_2$：設$D$是二通連域，它的边界是由下面六部分組成：上半园周 $\sigma_1$：$x^2+y^2=B_1^2$；$\sigma_2$：$x^2+y^2=A_1^2$及特征綫$L_1$：$x+y=A$；$L_2$：$x+y=B$；$L_3$：$x-y=A_1$；$L_4$：$x-y=B_1$。

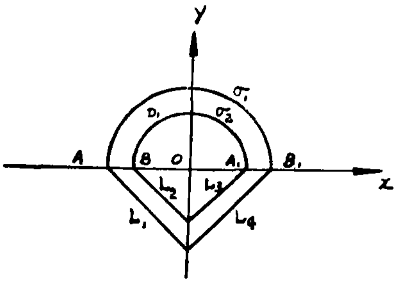


图 5

$$(T_2)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+sgny\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u|\sigma_1=\varphi_1\\ u|\sigma_2=\varphi_2\\ u|L_1=\psi_1\\ u|L_3=\psi_2\end{cases}$$

其中$\varphi_1$、$\varphi_2$、$\psi_1$、$\psi_2$为已知函数。

若$u(z)$滿足：(i)在$D$上当$y\neq0$滿足($T_2$)；(ii)$u_x$、$u_y$在$D$連續；(iii)$u_x$、$u_y$在$A$、$A_1$、$B$、$B_1$附近滿足：

$u_x$、$u_y=o\left(|z-A|^{-3/2}\right)$　　$z\to A$；

$u_x$、$u_y=o\left(|z-A_1|^{-3/2}\right)$　　$z\to A_1$；

$u_x$、$u_y=o\left(|z-B|^{-5/2}\right)$　　$z\to B$；

$u_x$、$u_y=o\left(|z-B_1|^{-5/2}\right)$　　$z\to B_1$。

則$u(z)$唯一。

問題$T_3$：設$D$由$\sigma$：$|z|=1, y\geqslant0$及$AC$：$y+x=-1$和$BC$：$y-x=-1$所圍成的。

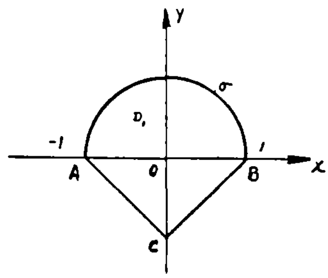


图 6

$$(T_3)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Sgny\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma=\varphi(\xi)\\ u|_{AC}=\psi(x)\end{cases}$$

其中$\varphi$、$\psi$为已知函数。

若$u(z)$适合下列条件：(i)在$D$内当$y\neq0$时滿足($T_3$)；(ii)除$z=1$及$z=-1$外在$\overline{D}$連續；(iii)$u_x$、$u_y=o\left(|1+z|^{-5/2}\right)$，$z\to-1$；$u_x$、$u_y=o\left(|1-z|^{-3/2}\right)$，$z\to1$。則解$u(z)$唯一。

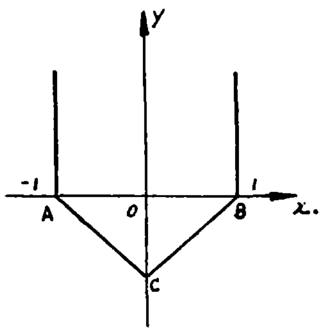


图 7

带形問題：$D$是由$x=-1$，$y\geqslant0$，$x=1$，$y\geqslant0$及$AC$：$x+y=-1$；$BC$：$y-x=-1$所圍成的域。

$$(T_d)\begin{cases}\dfrac{\sigma^2 u}{\sigma x^2}+Sgny\dfrac{\sigma^2 u}{\sigma y^2}=0\\ u|_{x=-1}=\varphi_1,\\ u\Big|_{x=1}=\varphi_2,\quad u\Big|_{AC}=\varphi_3\end{cases}$$

这儿 $\varphi i$，$(i=1,2,3)$为已知函数。

若 $u$ 是适合下列条件的解：(i)在 $D$ 内当 $y\neq o$ 时适合$(T_d)$；(ii)在 $\overline{D}$ 上除 $A$.$B$ 外到处連續；$u$ 在 $y>1$ 有界；(iii) $u_x, u_y = o\left(|z-1|^{-5/2}\right)\ z\to 1$；$u_x, u_y =$ $= o\left(|z+1|^{-3/2}\right)\ z\to -1$ .

則解 $u(z)$ 唯一。

附記1°：不难举出例子来說明 $u$ 在 $y>1$ 有界条件不能减弱。

附記2°：关于$(T_3)$及$(T_d)$問題，我系偏微組和复变組的很多同学用各种方法亦得同样結果。

## 三　混合边界問題

設 $D$ 是由 $\sigma: x^2+y^2=1$ 及特征綫 $AC: x+y=-1$，$BC: -x+y=-1$ 所圍成的区域。$E$ 为园周 $\sigma$ 上的任一点，記 $\sigma_1$: $\overset{\frown}{AE}$；$\sigma_2$: $\overset{\frown}{EB}$

$$
(Tc)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Sgn\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u_n\Big|_{\sigma_1} = \varphi_1 \\ u\Big|_{\sigma_2} = \varphi_2 \\ u\Big|_{AC} = \varphi_3 \end{cases}
$$

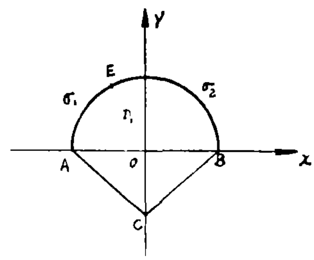


图 8

这儿 $\varphi_1$、$\varphi_2$、$\varphi_3$ 为已知函数。

若$u(z)$满足下列条件：i)在$D$内 $y\neq o$ 时满足$(Tc)$；ii)$u$、$u_x$、$u_y$在$\overline{D}$除$A$、$E$、$B$外到处連續，且$u_x$、$u_y=o(|z-A|^{-5/2})$，$z\to A$，$u_x$、$u_y=o\,(|z-B|^{-5/2})$，$z\to B$，$u_x$、$u_y$ $=$ $= o\,(|z-E|^{-3/2})$，$z\to E$ 。則問題的解唯一。

唯一性的証明可变为在 $D_1$ 中求証解析函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$，在满足：

$u_n\Big|_{\sigma_1}=0$、$u\Big|_{\sigma_2}=0$、 $u+v\Big|_{AB}=0$及$f(z)$在$\overline{D_1}$上連續的条件下，$u\equiv 0$.

仿照上面的方法，利用幅角原理可得 $f(z)\equiv 0$. 从而 $u(z)\equiv 0$. 唯一性得証。

存在性：設 $v$ 是 $u$ 的調和共軛函数，則

$f=u+iv$ 在 $D$ 内解析，且 $v\Big|_{\sigma_1}=\int\varphi_1(\zeta)d\zeta=\Phi(\zeta)+C$. 这儿 $C$ 为任正常数

$u\Big|_{\sigma_2}=\varphi_2$； $u+v\Big|_{AB}=2\varphi_3\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$，$-1<x<1$，

作单叶正則变換 $\omega=\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)^2=\xi+i\eta$，它把 $D_1$ 映为上半平面，把 $A$、$B$、$E$

分别映为 $A'(0,0)$，$\infty$，$E'(-\alpha,0)$，这儿 $\alpha>0$ 。

記 $F(w)=f(z(w))=U+iV$ 其中 $z(w)$ 为 $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ 的反函数，则

$$U\Big|_{-\infty,E'}=\varphi_1$$

$$V\Big|_{E'A'}=\Phi+C$$

$$U+V\Big|_{A',+\infty}=2\varphi_3\left(\frac{x(\xi,0)-1}{2}\right)$$

考虑函数 $G(w)=\dfrac{(1-i)F(w)}{\sqrt[4]{w}\cdot\sqrt{w+\alpha}}=R+iS$ 其中 $\sqrt[4]{w}$，$\sqrt{w+\alpha}$ 为上半平面的单叶正則函数，$0\leqslant arg(w+\alpha)\leqslant\pi$；$0\leqslant arg\,w\leqslant\pi$。于是：

$$R\Big|_{-\infty E'}=-\sqrt{2}\ \varphi_2\Big/\sqrt[4]{|w|}\cdot\sqrt{|w+\alpha|}$$

$$R\Big|_{E'A'}=+\sqrt{2}\ (\Phi+C)\Big/\sqrt[4]{|w|}\cdot\sqrt{|w+\alpha|}$$

$$R\Big|_{A'\infty}=2\varphi_3\left(\frac{x(\xi,0)-1}{2}\right)\Big/\sqrt[4]{|w|}\cdot\sqrt{|w+\alpha|}$$

由 Shwarz 公式立得：

$$G=\frac{1}{\pi i}\Big[\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{-\sqrt{2}\ \varphi_2}{\sqrt[4]{|t|}\cdot\sqrt{|t+\alpha|}}\frac{dt}{t-w}+\int_{-\alpha}^{0}\frac{+\sqrt{2}(\Phi+C)dt}{\sqrt[4]{|t|}\cdot\sqrt{|t+\alpha|}\ (t-w)}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{2\varphi_3\left(\frac{x(t,0)-1}{2}\right)}{\sqrt[4]{|t|}\cdot\sqrt{|t+\alpha|}}\cdot\frac{dt}{(t-w)}\Big]$$

$$\therefore\ u(z)=Re\left\{\left(\frac{1+i}{2}\right)G\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2+\alpha}\right\}$$

这就是方程 $(T_0)$ 在 $D_1$ 的解。至于双曲型部分的解，由 $u$ 在 $AB$ 之值及 $u\Big|_{AC}=\varphi_3$ 不难写出。

附記1°：若在上取 $G(w)=\dfrac{(1-i)\cdot\sqrt{w+\alpha}\ F(w)}{\sqrt[4]{w}}$，则同样可以得出另外一种解的表达式。而对于具体問題来說上述二种表达式中的那一种适用，由边界函数而定。

附記2°：若在上表达式中取 $c=o$，$\varphi_1$、$\varphi_2\in H(\mu)$，$\varphi_3\in C^{(2)}$ 而 $\varphi_1$ 在 $z_0$ 及 $A$ 点有低于 4/3 及 11/6 阶无穷大；$\varphi_2$ 在 $z_0$ 及 $B$ 点有低于 1/3 及 1/6 阶无穷大；$\varphi_3$ 在 $A$ 点有低

于5/6阶无穷大；则用Hölder不等式不难驗証在上所求得的解$u$满足唯一性条件。

附記3°：$T$、$T_1$、$T_2$、$T_3$、$T\alpha$ 諸問題的存在性完全可仿此求得，而且其方法要比A·B. 比察捷的簡单。

## 参考文献

〔1〕 A.B.比察捷：混合型微分方程，孙和生譯，1956，科学出版社.

〔2〕 华罗庚：On Лаврентьев's Partial differential equation of the mixed type.中国科学 vol.XIII No 11.

〔3〕 Г.М.Голузин：复变函数的几何理論，陈建功譯，1956，科学出版社。

## Дифференциальное уравнение смешанного типа

Сюй И-жань　Хуан Хуань-лиан　Ду Чжи-мин

Резюме

В настоящей статье мы даём более удовлетворительний результат об единствености решения задач $T_1$、$T_2$、$T_3$、$T_\alpha$、$T_0$ и выражение решения задачи $T_0$.