

关于数学分析的一个定理

許毅然 黃炎明

在数学分析中，我們都熟知如下事实：单调函数的不連續点至多可列个^[1]，此外，我們还看到比这个定理更强的結果：如果 $f(x)$ 的左右极限均存在(指有限的极限)則 $f(x)$ 的不連續点至多可列个^{[2][3]}。

我們在本文中証明一个比上述命題都更强的一个事实如下：

定理 定义在 $[a, b]$ 区間的实函数至多除去可列个点外，它在有有限左极限(或右极限)的点連續。

[証明] 只对左极限的情形来証，关于右极限的命題証法相同。

設 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的实函数

置 $F = \{x: f(x) \text{ 在 } x \text{ 沒有有限的左极限}, a \leq x \leq b\}$

$E = \{x: f(x) \text{ 在 } x \text{ 点不連續} a \leq x \leq b\}$

我們要証明的是 $(E - F)$ 至多是一可列集。

置 $E_k = \{x: \omega(x) > \frac{1}{k}\}$. ($k = 1, 2, \dots$)

其中 $\omega(x)$ 是 $f(x)$ 在 x 点的左振幅。

則 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

及 $E - F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k - F)$

于是我們只要証明每个 $(E_k - F)$ 不超过可列便行了，我們断言，对于 $(E_k - F)$ 中任一点 x_0 ，必存在一个形如 $(x_0 - \delta, x_0)$ 的开区間，在其中沒有 $(E_k - F)$ 的点。

事实上，由 $x_0 \in (E_k - F)$ ，按规定 $f(x)$ 于 x_0 有左极限，据哥西准則，必存在 $\delta > 0$ 使当 $x' x'' \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{k}$$

因而在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 区間中的每个 x 均有不等式

$$\omega(x) \leq \frac{1}{k}$$

成立。

即 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中沒 E_k 的点，因而沒 $(E_k - F)$ 的点，按照上面的作法，每一个 $(E_k - F)$ 中

的点 x_0 都有一个如上述性质的区间 $(x_0-\delta, x_0)$, 显然 (E_k-F) 中不同的两点 x_1, x_2 , 它们所带的区间必不相交, 而在实轴上不相交的开区间不超过可列个, 因而 (E_k-F) 至多是一个可列集, 于是定理证毕。

作这样直接的且有趣的推论有:

推论 1 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处有有限的左极限或右极限, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续。

推论 2 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除了可列个点外均有左极限或右极限, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的不连续点至多可列个。

单调函数的不连续点至多可列个, 同样 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上每点均有左右极限时不连续点也至多可列个, 这些都可看作推论 2 的特款。

被引用的文献

[1] П.С.Александров

集与函数泛论初阶(中译本, 上册, 145页)

高等教育出版社 1959

[2] 杨宗磐

数学分析入门(74页定理4、4、3之系)

科学出版社 1958

[3] E.W.Hobson

The theory of functions of a real
variabl (Volume. I, 286页)

Cambridge university press 1921