

动态规划理論(續上)

原 著: R. Bellman

編譯者: 数学力学系 黎国良

馬麟浚 邓永录

12 引言

在本文的第一部分中, 我們已經十分詳細地討論了一个必然性类型問題——“资源的最优分配問題”。在第二部分中我們將討論純粹的随机类型問題并且再次应用泛函方程的方法。

当提出的随机类型問題数学化以后, 我們將討論其泛函方程的存在性和唯一性定理。然后求問題的解和解释它的意义。当利益函数是非綫性时, 我們將轉向研究連續的变分問題。采用古典的变分方法可以看出是另外一种逼近法。这个方法和我們从离散变分所得到解的性質相結合就能够得到連續变分的完全解, 因此归根到底它是原来过程有价值的信息。

13 金矿問題

設有两个金矿: 金矿 A 的黄金貯藏量为 x , 金矿 B 的黄金貯藏量为 y , 此外又設它們共同使用一个很容易损坏的采金机器。

当在金矿 A 使用采金机器时, 开采了黄金数量 r_1x 而沒有损坏机器也就是說可繼續进行开采的概率为 p_1 , 机器遭到不可挽救的损坏因此終止开采的概率为 $1-p_1$, 类似地金矿 B 具有概率 q_1 和 $1-q_1$ 以及数量 r_2y 。

問題就是如何确定使用过程, 使得在采金机器损坏以前所开采到的黄金数量为最多。

在下节中, 我們將从数学推演这个問題。

14 数学推演

因为我們所研究的是随机过程, 它不能在某一点談收益。那么为了研究某个量的最大化問題就必须引入度量。首先我們着重研究在机器破坏以前开采的黄金数量的数学期望为最大的策略。由于度量是綫性的, 显然得出在每一阶段开采多少黄金是相同的。在每一时刻的过程情况, 可完全由上面所定义的 x, y 来描述。当金矿 A 和金矿 B 的初始貯藏量分別为 x 和 y 时, 我們用 $f(x, y)$ 表示在机器损坏以前使用最优策略时所开采黄金数量的数学期望。

为方便起见, 我們用 A, B 分別表示在金矿 A, 金矿 B 使用采矿机器的行为。如果选择金矿 A 开采时, 我們得到黄金数量为 r_1x 和繼續工作的概率是 p_1 , 而無論現在或将来什

么也不能得到的概率是 $1-p_1$ 。因为最优策略在开始动作以后仍是最优的。那末当用从选择 A 作为开始的策略时总的收入为数学期望。

$$E_A = p_1 \{r_1 x + f[(1-r_1)x, y]\}$$

类似地选择 B 作为开始的策略时, 总的收入为数学期望

$$E_B = q_1 \{r_2 y + f[x, (1-r_2)y]\}$$

因为我们的目的是使收入为数学期望达到最大, 因此有

$$f(x, y) = \text{Max}(E_A, E_B)$$

用详细的写法就得出泛函方程

$$f(x, y) = \text{Max} \begin{pmatrix} p_1 \{r_1 x + f[(1-r_1)x, y]\} \\ q_1 \{r_2 y + f[x, (1-r_2)y]\} \end{pmatrix} \quad (14)$$

15 存在性与唯一性

虽然方程(14)是和第 7 节所讨论的方程同一类型, 但形式却不同, 因此需要研究其独立的存在性与唯一性定理

$$\text{定理 5: 如方程 } f(p) = \text{Max}_{1 \leq k \leq m} [g_k(p) + h_k(p)f(T_k p)] \quad (15)$$

满足条件(a), (b), (c)则有唯一有限解。条件(a), (b), (c)如下

a) 点 P 约束在区域 R 内。其中 R 是具有这样的性质, 如 $p \in R$ 时经变换后之点 $p' = T_k p$ 也属于 R。

(b) $|g_k(p)| \leq C_1$ 对一切 $p \in R$ 都成立,

(c) $|h_k(p)| \leq C_2 < 1$ 对一切 $p \in R$ 都成立

这个定理的证明过程大部分与第一部分所给出证明过程相同。这时利用关系式

$$f_{n+1}(p) = \text{Max}_k [g_k(p) + h_k(p)f_n(T_k p)] \quad n=0, 1, 2, \dots$$

所确定的序列逼近。

这里 $f_0(p)$ 是在 R 中的任意有界函数。容易证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f_{n+1}(p) - f_n(p)]$$

对于 $p \in R$ 是一致收敛的。唯一性的证明同样可按以前方法得出。

用同样的方法我们可得出下列结果。

定理 6: 如果函数 $g_k(p)$ 和 $h_k(p)$ 在区域 R 中连续且满足上述条件, 则函数 $f(x)$ 也在 R 中连续, 特别的如果 g_k 和 h_k 是参数 q 的连续函数则 $f(p)$ 也是 q 的连续函数。

16 解

我们将求出比(15)式更一般的泛函方程的解。

即方程

$$f(x, y) = \begin{cases} A: \sum_{k=1}^N p_k [c_k x + f(c_k' x, y)] \\ B: \sum_{k=1}^N q_k [d_k y + f(x, d_k' y)] \end{cases} \quad (16)$$

这里

$$a) p_k \geq 0, q_k \geq 0, \sum_{k=1}^N p_k < 1, \sum_{k=1}^N q_k < 1$$

$$b) 1 \geq c_k \geq 0, 1 \geq d_k \geq 0, c_k + c'_k = d_k + d'_k = 1$$

$$c) x \geq 0, y \geq 0$$

方程(16)的推导类似于第13节所描述的过程,但这里由于允许连续的初始解选择而具有很多可能的收入。

定理7: 方程(16)的初始解是这样的,

如果

$$\frac{\sum_{k=1}^N p_k c_k}{1 - \sum_{k=1}^N p_k} x > \frac{\sum_{k=1}^N q_k d_k}{1 - \sum_{k=1}^N q_k}$$

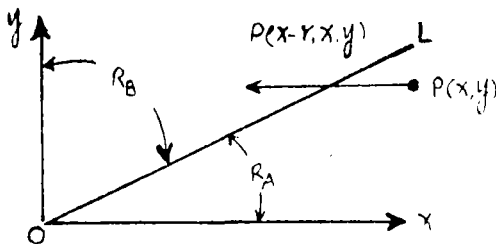


图 1

就选择 A。如果相反的不等式成立就选择 B。当等号成立时选择 A 或 B 都是能满足方程的。

在几何上解可以表示成很优美的样子。设直线 L (见图 1) 由方程

$$\frac{\sum_{k=1}^N p_k c_k}{1 - \sum_{k=1}^N p_k} x = \frac{\sum_{k=1}^N q_k d_k}{1 - \sum_{k=1}^N q_k} y$$

给出。如果初始情况(x,y)点在直线 L 之下,则选用策略 A。如果初始情况(x,y)点在直线 L 之上,则选用策略 B。如果点(x,y)就在直线 L 中,那么选用策略 A 或选用策略 B 都是一样的。

17 解的说明

$$\text{量} \quad \frac{\left(\sum_{k=1}^N p_k c_k \right) x}{1 - \sum_{k=1}^N p_k}$$

具有很有趣的解释。分子 $\left(\sum_{k=1}^N p_k c_k \right) x$ 表现为由于行为 A 而直接获得的数学期望,

分母 $1 - \sum_{k=1}^N p_k$ 表现为直接损失的数学期望,亦即机器损坏的概率。因此整个表示式等于获得的数学期望与损失的数学期望之比。这个比值是个别行为的价值的最适当和直观的度量。

可惜,在比较复杂的情况下,这个优美的解失去效力。例如在已经证明,相应于同一机器可以同时利用在两个矿山的情形时泛函方程

$$f(x, y) = \text{Max} \begin{pmatrix} A: p_1 \{ r_1 x + f[(1-r_1)x, y] \} \\ B: q_1 \{ r_2 x + f[x, (1-r_2)y] \} \\ C: p_2 \{ r_3 x + r_4 y + f[(1-r_3)x, (1-r_4)y] \} \end{pmatrix}$$

具有参数值使获得图2所示形式的解来代替图3所示形式的企图解。

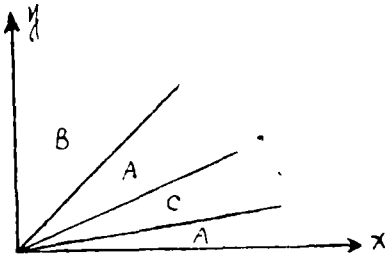


图2表示对于某些参数值的广义金矿方程解的几何表示

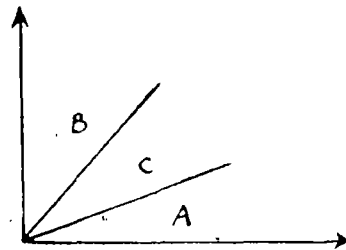


图3表示由于参变量的变化而引起的广义金矿方程的变化解

然而,对于初始近似来说,获得的数学期望与损失的数学期望之比的准则是非常重要的。

16非线性效益

以上,我们是要求获得的数学期望为最大。但在很多情形中,我们可以对完全不同的效用标准来进行研究。例如我们可以希望使总开采量超过给定数量M的概率为最大。这个概率是总开采量R的函数 ϕ 的数学期望。这里

$$\phi(R) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq R < m \\ 1 & R \geq m \end{cases}$$

一般来说,如果 ϕ 是非线性的,那么过程状况的描述不仅需要知道剩余在矿中的黄金数量x和y,而且还需知道已开采黄金数量z。

于是设 $f(x, y, z)$ 等于函数 $\phi(R)$ 的数学期望。这里z为已开采的数量,x和y分别为剩余在两个矿的数量。

对于f的泛函方程为

$$f(x, y, z) = \text{Max} \begin{cases} A: p_1 f[(1-r_1)x, y, z+r_1x] + (1-p_1)\phi(z) \\ B: q_1 f[x, (1-r_2)y, z+r_2y] + (1-q_1)\phi(z) \end{cases}$$

从方程式可以明显地看出初始条件是 $f(0, 0, z) = \phi(z)$

解已经不能象以前那样简单地得到,虽然可以证明在附加某些适当的假定后它有同样的形式。

当 $\phi(R) = e^{bR}$ 时特别有趣。这里由于泛函是超越方程,已开采的黄金数量对于确定目前的策略是无关重要的。当利用最优策略时,如 $f(x, y)$ 为 e^{bR} 的数学期望,即

$$f(x, y) = E\{e^{bR}\}$$

那末 f 的泛函为

$$f(x, y) = \text{Max} \begin{cases} A: \{p_1 e^{br_1 x} f[(1-r_1)x, y] + (1-p_1)\} \\ B: \{q_1 e^{br_2 x} f[x, (1-r_2)y] + (1-q_1)\} \end{cases}$$

它的解是具有这样

$$\text{如 } \frac{p_1 (e^{br_1 x} - 1)}{1 - p_1} > \frac{q_1 (e^{br_2 x} - 1)}{1 - q_1}$$

則采用策略 A。如果相反的不等式成立則采用策略 B。如果等式成立則可采用这个策略其中之一。

显然, 当 $b \rightarrow 0$ 时的极限形式和第16节对于綫性情形的規則是完全一样的。

19 連續版本

因为离散的公式要引进一系列沒有解决的問題, 我們轉向這個問題的連續版本, 在这里强有力的連續会对我有帮助的。

为了获得連續的模型, 我們假設对每一个行为得到少量黄金而沒有损坏机器的概率为很少。

对于任意小的 $\delta > 0$, 設 $1 - q_1 \delta$ 等于采用策略 A 得到黄金数量为 $r_1 x \delta$ 而沒有损坏机器的概率。又設 $1 - q_2 \delta$ 等于采用策略 B 得到黄金数量 $r_2 y \delta$ 而沒损坏机器的概率。在这里 $q_1, q_2 > 0$ 。

和从前一样, 我們有方程

$$f(x, y) = \text{Max} \begin{cases} A: (1 - q_1 \delta) [r_1 x \delta + f(x - r_1 x \delta, y)] \\ B: (1 - q_2 \delta) [r_2 y \delta + f(x, y - r_2 y \delta)] \end{cases}$$

形式地运算, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时我們得到

$$f(x, y) = \text{Max} \begin{cases} A: f(x, y) + r_1 x \delta - q_1 \delta f(x, y) - r_1 x \delta \frac{\partial f}{\partial x} + 0(\delta^2) \\ B: f(x, y) + r_2 y \delta - q_2 \delta f(x, y) - r_2 y \delta \frac{\partial f}{\partial y} + 0(\delta^2) \end{cases}$$

或者

$$0 = \text{Max} \begin{cases} A: r_1 x - q_1 f(x, y) - r_1 x \frac{\partial f}{\partial x} \\ B: r_2 y - q_2 f(x, y) - r_2 y \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \quad (17)$$

但由于存在性和唯一性定理的建立及方程(17)分析研究的困难, 因此这个办法不一定是有效的。

現在我們采用积分近似代替上面的微分近似。設我們采取行为 A 和行为 B 的选择序列所組成的策略 S , 又設我們完成了这个策略(即 S_n)的 n 步, 相应的泛函方程为

$$f(x, y) = \text{Max}_{S_n} [R_n(x, y) + \sum_k P_{n_k}(x, y) f(x_{n_k}, y_{n_k})] \quad (18)$$

其中 $R_n(x, y)$ 是当采用策略 S_n 时, 经过 n 步收益的数学期望而 $P_{n_k}(x, y)$ 为当采用策略 S_n 时在点 (x_{n_k}, y_{n_k}) 未损坏机器的概率。

如果选取这样的 $n\delta$, 当 $\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ 时仍然是有限的且等于 t , 那么将得到类似方程(18)的泛函方程, 其形状为

$$f(x, y) = \max_{S(t)} [R_n(x, y, t) + \int_{r=0}^1 \int_{s=0}^1 f(xr, ys) dG_s(x, y, r, s)] \quad (19)$$

这类泛函方程可以出现在动态规划问题的各种不同的版本中。由于随机决策问题的连续策略这一个概念在思维上和数学上的困难, 我们在这里不打算深入讨论这个问题, 代替这个我们应用第三种近似。

在讨论细节之前, 我们指出连续过程的引入产生了新的和在离散过程中所没有的困难。当 $\delta \rightarrow 0$ 时在第16节所描述的最优程序的极限如图4。亦即是说它在 $p(x, y)$ 上没有得到直线 L 时而采用 A 而后来则沿着这直线走。

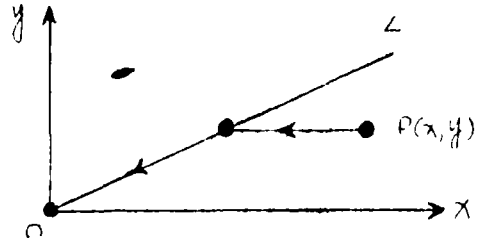


图4 金矿方程连续变分解的几何表示。在达到直线 L 之后工作沿着这根直线继续进行

困难在于引向水平或垂直移动的行为 A 或 B 无论在什么时候都没有给出沿直线 L 的移动。

为了得到沿着直线 L 的道路, 我们应当使用策略 A 或策略 B 的无穷小混合。然而引入点的混合将带来一系列物理上和数学上的多种多样的困难。在数学上, 我们遭到要放弃方程(19)的同样困难。在物理上, 我们不愿接受这类型的策略应用到开始的问题。在那里要求在每个时刻在 A , B 之间作出选择。

为了避开这个瞬时混合的概念, 我们利用一种在这类问题中常常是有用的方法, 这个方法的本质是附加以某些很自然的连续性假设后, 那末在包含该点的一个小区间的混合相当于时刻 t 的混合。[4, 31, 40, 41]

因此, 我们讨论在时刻 $0, \Delta, 2\Delta, \dots$, 等等作出 A, B 之间的选择过程。在区间 $[k\Delta, (k+1)\Delta]$ 内, 对于 $[k\Delta, k\Delta + \phi_1\Delta]$ 部分, 我们采用 A 。对于 $[k\Delta + \phi_1\Delta, (k+1)\Delta]$ 部分, 我们采用 B 。这里 ϕ_1 依赖于 k 。

设 Δ 很小, 那末过程的描述用一次项是足够的。我们将推导出确定过程的一组微分方程。

20 微分方程的推导

设 $x(t)$ 等于生产一直继续到 t 时刻时, 剩余在金矿 A 的黄金数量, $y(t)$ 为剩余在金矿 B 的黄金数量, $p(t)$ 为机器到时刻 t 时没有损坏的概率, 而 $f(t)$ 为时刻 t 时开采黄金数量的数学期望, 这里 $t = n\Delta$; $n = 0, 1, 2, \dots$

忽略关于 Δ 的二次项后我们有

$$x(t + \Delta) = x(t) - r_1 \phi_1(t) x(t) \Delta$$

$$y(t + \Delta) = y(t) - r_2 \phi_2(t) y(t) \Delta$$

$$p(t + \Delta) = p(t) [1 - q_1 \phi_1(t) \Delta - q_2 \phi_2(t) \Delta]$$

$$f(t + \Delta) = f(t) + p(t) [\phi_1(t) r_1 x(t) + \phi_2(t) r_2 y(t)] \Delta$$

这里 $\phi_2 = 1 - \phi_1$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 我們得到了微分方程組

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\phi_1(t)r_1x(t) & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= -\phi_2(t)r_2y(t) & y(0) &= y_0 \\ \frac{dp}{dt} &= -p(t)[\phi_1(t)r_1x(t) + \phi_2(t)r_2y(t)] & p(0) &= 1 \\ \frac{df}{dt} &= p(t)[\phi_1(t)r_1x(t) + \phi_2(t)r_2y(t)] & f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

現在問題歸結為要確定具有約束条件

$$0 \leq \phi_1(t) \leq 1 \quad (21)$$

的函数 ϕ_1 而使 $f(T)$ 在給定的時間 T 內达到极大值。

在应用变分法处理时問題的非綫性是特別重要的。这个特性和关于解的概率形的先驗信息結合起来就得到問題的完滿解。然而更重要的是；很多在离散形式不能得到解的类似問題可以在这种变分中得到完全解决。

2.1 解

下述結果包含了使 $f(\infty)$ 最大化問題的解。

定理 8：在方程 (20) 和約束条件 (21) 的情形下， $f(\infty)$ 的最大值可以采用下述策略而得到。

$\phi_1 = 1$ 当 $q_1r_2y < q_2r_1x$ 时

$\phi_2 = 1$ 当 $q_1r_2y > q_2r_1x$ 时

$$\phi_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad \phi_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{当 } q_1r_2y = q_2r_1x \text{ 时}$$

文献 [11] 所指出的解是唯一的。

对于有限 T 的解，可以同样地得到。但由于具有短期策略因而复杂得多了。

“狹窄地带問題”

2.2 引言

在这一部分，我們將討論一类这样的問題，它們是产生在牵涉若干不同工厂的生产过程的研究中。

特別是，我們將研究若干称为“狹窄地带問題”的問題。在这些問題里面，积极性水准被最少供应中资源所調节。

对于这种类型的問題，适当的提法是成功的保証。所有的数学形式必然是近似的。

在这里,极重要的是获得一个允许最有效利用数学分析的近似构造。

在所讨论过基于连续近似的概念之上的提法之后,这种方法在本文的第二部分已被使用过了,我们将提供一个具有广阔应用,基于泛函方程的思想之上的理论技巧,这也是在前面被使用过。有信心与坚决地使用这个方法就常常能很快地得出解。

•为了证明我们实际上能得到解,我们利用问题的线性性,构造一个对偶问题。这个对偶问题在作为一个重要理论工具的同时也是一个实用方法。

在说明这些方法的应用之后,我们将回过头来简略地讨论一下非线性问题与牵泛到特征值问题。

这个泛函方程的利用产生出在变分法中某些古典问题一个全新的形式。

2.3 一个典型的问题

我们将讨论一个三个工厂的生产过程的简单模型。在这里,基本的工厂是汽车工厂,钢铁工厂与工具工厂。

这些工厂均被用来在一个给定时间长为 T 的周期中要生产尽可能多的汽车。

在任何时间 t ,我们先假设 t 取离散值 $0, 1, 2, \dots, T$, 定义

$x_1(t)$ = 到时刻 t 为止已生产的汽车数量

$x_2(t)$ = 汽车制造厂的生产能力

$x_3(t)$ = 钢铁的存储量

$x_4(t)$ = 钢铁厂的生产能力

$x_5(t)$ = 工具的存储量

$x_6(t)$ = 工具厂的生产能力

我们首先简略地讨论离散模型,但应注意到在这类问题中,连续型会比离散型切合实际。

“基本原则”是这样的:

- a) 为了增加汽车、钢铁或工具的生产能力,需要钢铁与工具。
- b) 为了生产汽车需汽车生产能力与钢铁。
- c) 为了生产钢铁仅仅需要钢铁生产能力。
- d) 为了生产工具要求工具生产能力与钢铁。

此外,我们假设:在有充裕原料的时候,产量一定正比于生产能力,在有充足的生产能力的时候,产量正比于原料的分配量。

在每一单位区间的开始,为了生产汽车、钢铁与工具及增加汽车、钢铁与工具的存储量,我们从现存的钢铁和工具中分配以不同的数量。

令 $z_i(t)$ 等于在时间 t 为了增加 $x_i(t)$ 而分出的钢铁数量, $\omega_i(t)$ 等于在时间 t 为了增加 $x_i(t)$ 而分出的工具数量。

利用上述的基本规则,我们得出

$$z_3 = 0 \quad \omega_1 = \omega_3 = \omega_5 = 0$$

于是便得到了下列在时刻 $t+1$ 的 x_i 依赖于在时刻 t 的 x_i , z_i 和 ω_i 的方程。

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \min[\gamma_i x_2(t), \alpha_i z_i(t), \beta_i \omega_i(t)]$$

$$\begin{aligned}
x_2(t+1) &= x_2(t) + \min[\alpha_2 z_2(t), \beta_2 \omega_2(t)] \\
x_3(t+1) &= x_3(t) - z_1(t) - z_2(t) - z_4(t) - z_5(t) - z_6(t) - \gamma_3 x_4(t) \\
x_4(t+1) &= x_5(t) + \min[\alpha_4 z_4(t), \beta_4 \omega_4(t)] \\
x_5(t+1) &= x_5(t) - \omega_2(t) - \omega_4(t) - \omega_6(t) + \min[\gamma_5 x_6(t), \alpha_5 z_5(t)] \\
x_6(t+1) &= x_6(t) + \min[\alpha_6 z_6(t), \beta_6 \omega_6(t)]
\end{aligned} \tag{22}$$

这里 α_i, β_i 与 γ_i 均为常数

z_i 与 ω_i 显然要有如下約束

$$z_1 \geq 0, \omega_1 \geq 0, z_1 + z_2 + z_4 + z_5 + z_6 \leq x_3, \omega_2 + \omega_4 + \omega_6 \leq x_5,$$

及通常意义的約束。

$$\alpha_1 z_1 = \beta_1 \omega_1 \leq \gamma_1 x_2$$

$$\alpha_2 z_2 = \beta_2 \omega_2$$

$$\alpha_4 z_4 = \beta_4 \omega_4$$

$$\alpha_5 z_5 = \gamma_5 x_6$$

$$\alpha_6 z_6 = \beta_6 \omega_6$$

依靠这些約束，我們就可以完全消去 ω_i ，而代替方程(22)，得到

$$\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x_1(t) + \alpha_1 z_1(t) \\
x_2(t+1) &= x_2(t) - \alpha_2 z_2(t) \\
x_3(t+1) &= x_3(t) - z_1(t) - z_2(t) - z_4(t) - z_5(t) - z_6(t) + \gamma_3 x_4(t) \\
x_4(t+1) &= x_4(t) + \alpha_4 z_4(t) \\
x_5(t+1) &= x_5(t) - \epsilon_2 z_2(t) - \epsilon_4 z_4(t) - \epsilon_6 z_6(t) + \alpha_5 z_5(t) \\
\epsilon_i &= \alpha_i / \beta_i \\
x_6(t+1) &= x_6(t) + \alpha_6 z_6(t)
\end{aligned} \tag{23}$$

现在，对于每个 t ， $z_i(t)$ 的約束为，

$$z_i \geq 0$$

$$z_1 + z_2 + z_4 + z_5 + z_6 \leq x_3 \tag{24}$$

$$\epsilon_2 z_2 + \epsilon_4 z_4 + \epsilon_6 z_6 \leq x_5 \tag{25}$$

$$z_1 \leq \eta_1 x_2$$

$$z_5 = \eta_5 x_6, \eta_i = \gamma_i / \alpha_i,$$

我們应当选择滿足上面的約束而使得 $x_1(T)$ 最大的 $z_i(t)$ ， $t=0, 1, 2, \dots, T-1$ 。

在这种形式里，問題完全属于綫性规划范围，且对于任意給定的約束集合，可用由 G. Dantzig 与其他人所发展的各种各样的优良叠代过程去解决。

但是只要我們約略的数一数变量的数目，就看出，甚至这个这样简单的三个工厂的問題都导致一大堆服从于大量約束条件的独立变量 z_i 。假如我們希望去确定最优策略的形式(即使得 $x_1(T)$ 最大的分配策略)从很多不同的初始情况与取比例常数的不同集合出发(即进行灵敏分析)。那末，我們就会面临一个十分巨大的数值工作。

因而，就产生了这样的問題：是否可以确定一个依赖于这些数值的結構。

这就是我們將要在下一节里部分回答的問題。我們的第一步将是作重要的变形。

24 連續的版本

在前面处理金矿方程的时候, 我們已經注意这样一点: 問題的連續版本常常較之离散版本易于处理。要注意, 在这里討論的問題, 連續的版本常常較离散版本更切合实际的經濟問題。

在23节中所得出的問題的連續版本中, 在時間區間 $[t, t+1]$ 上的分配 $z_i(t)$ 现在由在時間區間 $[t, t+\Delta t]$ 上的分配 $z_i(t)\Delta t$ 代替。这个重要的量 $z_i(t)$ 现在是分配的率, 当 $\Delta t \rightarrow 0$, 方程(23)就全面变为

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 z_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 z_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -z_1(t) - z_2(t) - z_4(t) - z_5(t) - z_6(t) + \gamma_3 x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \alpha_4 z_4(t)$$

$$\dot{x}_5(t) = -\epsilon_2 z_2(t) - \epsilon_4 z_4(t) - \epsilon_6 z_6(t) - \alpha_5 z_5(t)$$

$$\dot{x}_6(t) = \alpha_6 z_6(t)$$

关于 z_i 的約束现在是

$$z_i \geq 0$$

$$z_1 + z_2 + z_4 + z_5 + z_6 \leq \infty \quad (26)$$

$$\epsilon_2 z_2 + \epsilon_4 z_4 + \epsilon_6 z_6 \leq \infty \quad (27)$$

$$z_1 \leq \eta_1 x_2$$

$$z_5 \leq \eta_5 x_6$$

显然, 不等式(26)与(27)可不要而代以

$$x_3 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

这些不等式在离散版本中通常是滿足的。

在(28)中的第一个不等式的重要性是, 当 $x_3 = 0$ 时, 我們必須附加約束

$$z_1 + z_2 + z_4 + z_5 + z_6 \leq \gamma_3 x_4$$

同样地, 当 $x_5 = 0$ 时我們必須有

$$\epsilon_2 z_2 + \epsilon_4 z_4 + \epsilon_6 z_6 \leq \alpha_2 z_5$$

25 关于符号的一些注記

在研究一般理論途径之前, 讓我們导入一些向量——矩陣符号。令 $X(t)$ 与 $Z(t)$ 代表 n 維向

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

对于以后遇到的 i 与 j , 令 A_i, B_j 表示 $m \times n$ 矩陣。

向量 $X(t)$ 称为非負的, 写为 $X \geq 0$, 如果它的分量都是非負的, 即 $x_i \geq 0$, 不等式 $X \geq Y$ 等价于 $X - Y \geq 0$ 。

在这些符号的意义下, 前面的方程与約束有如下形式

$$\frac{dX}{dt} = A_1 X + A_2 Z \quad X(0) = C$$

$$Z \geq 0$$

$$B_1 Z \leq B_2 X$$

为了简化目标函数的表示式，我們引入向量的内积

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

于是，我們可写

$$x_1(T) = (X(T), \alpha)$$

这里 α 的第一个分量是 1，而其余的分量为 0，

最后，們我将写

$$\sup_X (X(T), \alpha) = f(C, T) \quad (29)$$

这里 f 是向量 C 与時間变量 T 的純量函数，即

$$f(C, T) = f(c_1, c_2, \dots, c_n; T)$$

要注意，在方程(29)中用 $\sup$ 的原因就是最大值可能达不到。下面我們將詳細地討論这点。

26 基本泛函方程。

在写上面的方程(29)时，我們已經暗中利用了这样一个极为重要的事实：一当控制过程的基本方程已給定，那么，最优的出产 $x_1(T)$ 仅仅是这个过程的初始状况与过程的持續時間的函数。

讓我們进一步注意到，最优解的本質是：它在任何有限子区間，例如說 $[S, T]$ 上的連續必定是一个具有初始状况 $C(S)$ 和持續時間为 $T-S$ 的过程的最优策略。

自然，这不过是在第二节中所叙述的“最优化原則”的一个特殊情形而已。

这个原則的数学翻譯給出基本泛函方程

$$f(C, S+T) = \max_{[0, S]} f[C(S), T] \quad (20)$$

这里 $\max_{[0, S]}$ 是对于 $0 \leq t \leq S$ ，滿足約束的所有 $Z(t)$ 求最大。为了简单起见，讓我們暫時假設

这个最大是能够达到的。

27 无穷小的类似

为了完全地利用方程(30)，我們將令 S 为一无穷小及由此得到等价于方程(30)的非綫性偏微分方程。为此，設 $C(S) = X(S)$ 具有分段連續导数以及 f 对于 C 与 T 的分量亦有同样性質。

取 $S=0$ 为一个导数的連續点，我們有

$$X(S) = C + [A_1 C + A_2 Z(0)]S + o(S)$$

$$f(C, S+T) = f(C, T) + S \frac{\partial f}{\partial T} + o(S)$$

$$f[C(S), T] = f\{C + [A_1 C + A_2 Z(0)]S, T\} \quad (31)$$

$$= f(C, T) + S(A_1 C + A_2 Z(0), \frac{\partial f}{\partial C}) + o(S)$$

这里

$$\frac{\partial f}{\partial C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial c_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial c_n} \end{pmatrix}$$

把在方程(31)中的表示式代入方程(30), 并且令 $S \rightarrow 0$, 我们就得到方程(30)的微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \text{Max}_{Z(0)} \left[(A_1 C + A_2 Z(0), \frac{\partial f}{\partial C}) \right]$$

这里, 最大值现在是对在 $T=0$ 时由约束所确定的 n 维区域而取的。

无穷小的类似的重要性在于要使我们能够去确定在 $[0, T + \Delta T]$ 上的解, 假如对所有初始状况在 $[0, T]$ 上已经确定。因为在大多数的这类问题中, 对于小的 T 困难是容易解决的, 所以我们有了兼有计算与理论优越性的一个可行途径。

因为我们一直都在直观与假设之上进行工作, 所以有一个证明我们事实上能得到一个解的方法是极端重要的。

28 对偶问题

设我们采取的基本方程具有形式

$$\frac{dX}{dt} = AZ \quad X(0) = C$$

及约束 $Z \geq 0 \quad BZ \leq X$

这是常常可由添加某些变量来完成。

因为

$$X = C + \int_0^t AZ dt$$

所以约束可写为

$$BZ + \int_0^t CZ dt \leq C \quad (C = -A)$$

同样地, 最大化 $(X(T), \alpha)$ 的问题等价于最大化

$$\int_0^T (AZ, \alpha) dt = \int_0^T (Z, \alpha') dt$$

于是, 本来的问题就可以提如下面的形式:

对所有满足下列约束的 Z 确定 $\int_0^T (Z, \alpha') dt$ 的最大值

$$Z \geq 0 \quad BZ + \int_0^t CZ dt \leq C \quad (32)$$

在一般情形, 这个最大值将不存在。这就造成要引入求斯蒂阶积分或 δ -函数的困难, 在这篇介绍性的文章里, 我们打算作任何复杂的叙述。

設 $W(t)$ 為一和 C 同維數的非負向量, 則利用(32)中的第二個不等式就有

$$\int_0^T (W, BZ + \int_0^t CZ dt_1) dt \leq \int_0^T (W, C) dt$$

令 B', C' 分別代表 B 與 C 的轉置矩陣, 則有

$$(BZ, W) = (Z, B'W)$$

$$\int_0^T (W, \int_0^t CZ dt) dt = \int_0^T (\int_0^t C'W dt_1, Z) dt$$

這裡第二個結果是由部分積分法得到的。

綜合這兩個結果, 我們有

$$\int_0^T (W, BZ + \int_0^t CZ dt_1) dt = \int_0^T (B'W + \int_0^t C'W dt_1, Z) dt$$

讓我們假設可以找一個這樣的向量 $W = W(t)$, 使得

$$W \geq 0$$

$$\text{與 } B'W + \int_0^t C'W dt \geq \alpha' \quad (33)$$

於是我們就有下面的關係

$$\begin{aligned} \int_0^T (W, C) dt &\geq \int_0^T (W, BZ + \int_0^t CZ dt_1) dt \\ &= \int_0^T (B'W + \int_0^t C'W dt_1, Z) dt \geq \int_0^T (\alpha, Z) dt \end{aligned} \quad (34)$$

由此, 顯然

$$\min_W \int_0^T (W, C) dt \geq \max_Z \int_0^T (Z, \alpha') dt \quad (35)$$

這裡的最小與最大均是對於所有滿足不等式(32)與(33)的 W 與 Z 而取。我們注意, 甚至假如對 Z 的最大值存在亦沒有保證對 W 的最小值存在。當最大值與最小值事實存在時, 這個問題與經濟的假設是有密切關係的。

假如方程(35)中, 兩端相等, 我們便可見下面的關係一定成立 (自然, 在零測集上可除外):

$$\begin{aligned} w_i &= 0 \text{ 當 } c_i > (BZ + \int_0^t CZ dt)_i \\ z_j &= 0 \text{ 當 } \alpha'_j < (B'W + \int_0^t C'W dt)_j \end{aligned} \quad (36)$$

反之, 讓我們建立這重要的事實, 任一對非負的 Z 與 W , 如它滿足不等式(36)與原來的約束, 都將給出這個最大與最小的解。

為了證明這點, 我們注意, 假如不等式(36)成立, 則在(34)中的關係均相等。現設 Z 為另一個滿足所有約束的向量及

$$\int_0^T (Z, \alpha) dt < \int_0^T (\bar{Z}, \alpha') dt$$

則對於相應於 Z 的 W , 有

$$\int_0^T (\bar{Z}, \alpha') dt \leq \int_0^T (\bar{Z}, B'W + \int_0^t A'W dt_1) dt$$

$$= \int_0^T (B\bar{Z} + \int_0^t A\bar{Z}dt_1, W) dt \leq \int_0^T (C, W) dt = \int_0^T (Z, \alpha') dt$$

这就产生矛盾。

于是我们就得到一个检验被推测的解的系统程序。对于所给的 Z ，我們由不等式 (36) 确定 W ，然后确定 W 是否满足所给的约束。这个对于一特殊问题的分析詳論可于文献 [4, 16, 42] 找到。

29 更一般的问题

在数学物理与数学經濟中，很大一部分的问题是求一组 $x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m$ 使

$$J(z) = \int_0^T F(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m) dt$$

达到最大值。其中 x 与 z 由下面的方程联系着

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x, z) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

及满足下列的约束

$$R_k(x, z) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

这些问题亦可以由前面所描述的泛函方程方法处理之。因为确定 Sturm-Liouville 問題

$$\begin{aligned} u''(t) + \lambda \phi(t) u(t) &= 0 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

的特征值的问题，在关于 ϕ 的合理假设下，等价在给定 $\int_0^1 \phi u^2(t) dt = 1$ 时确定 $\int_0^1 u'(t)^2 dt$ 的相对极小，这个问题可由类似于泛函方程的方法处理之。

这个引导到非线性偏微分方程的讨论可以在参考文献 [4, 17, 26] 中找到。

30 调节问题

由于在给定时间区间内系统的调节所产生的问题构成一类具有重要技术经济意义的特殊问题。在某些情况下，我們想要用最小的代价把起源于物理上和經濟上的动力系统控制在给定的状态或接近于给定的状态，其中代价是由两部份合成的，第一部份由系统与所要求的状态的偏离来度量，而第二部分是由利用于调节的资源的代价来度量。

設系统的状态由满足线性偏微分方程

$$\frac{dX}{dt} = AX + f(t), \quad X(0) = C$$

的向量 $X(t)$ 来描述。这里 A 是常数， $f(t)$ 表示调节向量。

設 $\bar{y}(t)$ 表示系统所要求的状态，而 $F(X - \bar{y})$ 表示度量状态 X 偏离 $\bar{y}$ 的代价的泛函。类似地，設 $G(f)$ 表示度量调节的代价的泛函。这时总的代价是

$$J(f, C) = F(X - \bar{y}) + G(f)$$

及要求这样选择 f 使得总的代价最小。

依靠对被用到的泛函类和函数所作的假设。我們得到了較难或較易的变分问题 [5]。关于这种类型的某些问题的詳細討論讀者可参考 Bellman 原著“动态规划”一书以及

Bellman Glicksberg 及 Gross 的論文[33—38]。

生存博奕

31引言

前面所討論的問題都是人類和自然界鬥爭的問題。其實上面所用到的方法同樣地可以應用到兩個競爭者之間存在利益衝突的情形。這些情形是由 Von Neumann 所創立的，在很多實用部門都要涉及到博奕論的研究。

作為動態規劃方法在博奕論的應用例子。我們討論一類特殊的多步博奕——生存博奕。下面分零和與非零和的兩種情形討論。

33 零和生存博奕

設博奕由矩陣 $A = (a_{ij})$ 給出。又設在開始博奕時兩個博奕者 P 和 Q 分別具有初始總數 p 和 q 。每一個博奕者都力求使對方破產（即輸光）因為博奕是零和的。故在博奕過程中兩個博奕者所支配的錢的總和始終是一個常數 $C = p + q$ 。從而只須知道某一個博奕者所支配的錢的總數就可以完全描述博奕的情況了。

在這裡不準備對最優策略的存在性問題作詳細的討論。我們用 $f(x)$ 表示當 P 支配的總數為 x ($0 < x < p + q$) 和雙方均採用最優策略時 P 贏 Q（即 P 獲得生存）的概率。

因為博奕是零和的，故經過任何特殊的一局博奕之後，只能有一個博奕者破產。設

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } x \leq 0 \\ 1 & \text{當 } x \geq p + q \end{cases}$$

由此得出 $f(x)$ 應滿足方程

$$f(x) = \min_{p_i} \max_{q_j} \sum_{i,j=1}^N f(x + a_{ij}) p_i q_j = \max_{q_i} \min_{p_j} \sum_{i,j=1}^N f(x + a_{ij}) p_i q_j$$

這裡 $0 < x < p + q$

并以 $p_1, p_2, \dots, p_N$ 及 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 分別表示 P 和 Q 的混合策略。

从上式可以得到有關解的存在性與唯一性的不同結果。上述方程的研究不會比在前面所過的一些泛函方程來得複雜。不久以前 Shapley 獲得了某些與此相近的博奕的有趣結果[55]。

34 非零和生存對策

設博奕者 P 的贏得矩陣為 $A = (a_{ij})$ ，博奕者 Q 的贏得矩陣為 $B = (b_{ij})$ 。因為博奕是非零和的。那麼為了描述博奕過程就必須要知道每個博奕者所支配的錢的數量。設當 $x > 0$ ， $y > 0$ 時函數 $f(x, y)$ 表示當 P 支配的數量為 x ，Q 支配的數量為 y ，和雙方採用最優策略時，P 贏 Q 的概率。又設

$$f(0, y) = 0 \quad \text{當 } y > 0$$

$$f(x, 0) = 1 \quad \text{當 } x > 0$$

而 $f(0, 0)$ 的值不確定。但我們總可以通過稍為改變一下對策就能使 x 和 y 的值在任何

时候都不会同时为零。

类似于零和情形, 对于 $f(x, y)$ 我们有如下的泛函方程

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \min_{p_i} \max_{q_j} \sum_{i,j=1}^N f(x + a_{ij}, y + b_{ij}) p_i q_j \\ &= \max_{q_j} \min_{p_i} \sum_{i,j=1}^N f(x + a_{ij}, y + b_{ij}) p_i q_j \end{aligned}$$

这里 $x > 0, y > 0$ 。 $p_1, p_2, \dots, p_N$ 及 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 分别是 P 与 Q 的混合策略。

参 考 文 献

1. Arrow, K. J., D. Blackwell, and M. A. Girshick, Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems, *Econometrica*, vol. 17, pp. 214—244, 1949.
2. ———, T. E. Harris, and J. Marschak, Optimal Inventory Policy, Cowles Commission Paper, 1951.
3. Bellman, R, An Introduction to the Theory of Dynamic Programming, Report R-245, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
4. ———, Dynamic Programming and Continuous Processes, Report R-271, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
5. ———, A Survey of the Mathematical Theory of Time Lag, Retarded Control, and Hereditary Processes, Report R-256, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
6. ———, The Theory of Dynamic Programming, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 60, pp. 503-516, 1954.
7. ———, On Games Involving Bluffing, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), vol. 50, pp. 1-18, 1952.
8. ———, On the Theory of Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 38, pp. 716-719, 1952.
9. ———, Some Problems in the Theory of Dynamic Programming, *Econometrica*, vol. 22, pp. 37-48, 1954.
10. ———, On Bottleneck Problems and Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 39, pp. 947-951, 1953.
11. ———, On Computational Problems in the Theory of Dynamic Programming, "Symposium on Numerical Methods," *Amer. Math. Soc. Symposia in Applied Mathematics*, 1956.
12. ———, Some Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 39, pp. 1077-1082, 1953.
13. ———, Dynamic Programming and a New Formalism in the Calculus of Varia-

- tions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 40, pp. 231-235, 1954.
14. ———, Some Applications of the Theory of Dynamic Programming to Logistics, *Navy Quart. Logist.*, vol. 1, pp. 141-153, 1954.
 15. ———, Some Applications of the Theory of Dynamic Programming—a Review *Operations. Res. Quart.*, June, 1954.
 16. ———, Bottleneck Problems, Functional Equations, and Dynamic Programming, *Econometrica*, vol. 23, pp. 73-87, 1955.
 17. ———, Monotone Convergence in Dynamic Programming and the Calculus of Variations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 40, pp. 1073-1075, 1954.
 18. ———, Some Functional Equations in the Theory of Dynamic Programming—I, Point Functions and Point Transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).
 19. ———, An Iterative Procedure for the Determination of the Perron Root of a Positive Matrix, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 719-725, 1955.
 20. ———, On a Quasi-linear Equation, *Canad. J. Math.* (to appear)
 21. ———, Dynamic Programming and a New Formalism in the Theory of Integral Equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (to appear).
 22. ———, A Problem in the Sequential Design of Experiments, *Sankhya* (to appear).
 23. ———, Decision-making in the Face of Uncertainty—I, *Naval Res. Logist. Quart.*, vol. 1, pp. 230-232, 1954.
 24. ———, Decision-making in the Face of Uncertainty—II, *Naval Res. Logist. Quart.*, vol. 1, pp. 327-332, 1955.
 25. ———, Dynamic Programming and Multi-stage Decision Processes of Stochastic Type, "Symposium on Linear Programming," Washington, D.C., December 1954.
 26. ———, Dynamic Programming and a New Formalism in the Calculus of Variations, *Riv. Mat. Univ. Parma* (to appear).
 27. ———, Notes in the Theory of Dynamic Programming—I, Some Recent Results on the Optimal Inventory Problem; Paper P-630, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1955.
 28. ———, Notes in the Theory of Dynamic Programming—II, A Functional Equation Arising in Allocation Theory, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* (to appear).
 29. ———, Notes in the Theory of Dynamic Programming—III, Equipment Replacement Policy, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 3, pp. 133-136, 1955.
 30. ———, Notes in the Theory of Dynamic Programming—IV, A Variational Problem with Constraints, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* (to appear).
 31. ———, and D. Blackwell, Some Two-person Games Involving Bluffing, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 35, pp. 600-605, 1949.
 32. ——— and ———, On a Particular Non-zero Sum Game, unpublished paper,

- The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1949.
33. ———, I. Glicksberg, and O. Gross, On Some Variational Problems Occurring in the Theory of Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 39, pp. 298-301, 1953.
 34. ———, ———, and ———, On Some Variational Problems in the Theory of Dynamic Programming, *Rend. Circ. Mat. Paterno* (forthcoming).
 35. ———, ———, and ———, The Theory of Dynamic Programming as Applied to a Smoothing Problem, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 2, pp. 82-88, 1954.
 36. ——— and O. Gross, Some Combinatorial Problems Arising in the Theory of Multi-stage Processes, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* (to appear).
 37. ——— and ———, On Some Nonlinear Integral Equations Occurring in the Theory of Dynamic Programming, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 41, pp. 227-229, 1955.
 38. ——— and ———, On the Optimal Inventory Equation, *Management Sci.*, vol. 2, pp. 83-104, 1955.
 39. ———, T. E. Harris, and H. N. Shapiro, Studies on Functional Equations Occurring in Decision Processes, Paper P-382, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1952.
 40. ——— and R. S. Lehman, On the Continuous Gold-mining Equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 40, pp. 115-119, 1954.
 41. ——— and ———, On a Functional Equation in the Theory of Dynamic Programming and its Generalizations, *Riv. Mat. Univ. Parma* (to appear).
 42. ——— and ———, Studies on Bottleneck Problems in Production Processes, Paper P-492, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954.
 43. ———, W. Fleming, and D. V. Widder, Variational Problems with Constraints, *Ann. Mat. Pura Appl.* (to appear).
 44. Bush, R. R., And C. F. Mosteller, A Mathematical Model for Simple Learning, *Psychol. Rev.*, vol. 58, pp. 313-325, 1951.
 45. Dvoretzky, A. J., J. Kieser, and J. Wolfowitz The Inventory Problem—I: Case of Known Distributions of Demand, and The Inventory Problem—II: Case of Unknown Distributions of Demand, *Econometrica*, vol. 20, pp. 187-222, 1952.
 46. ———, A. Wald, and J. Wolfowitz, Elimination of Randomization in Certain Statistical Decision Procedures and Zero-sum Two-person Games, *Ann. Math. Statist.*, vol. 22, pp. 1-21, 1951.
 47. Estes, W. K., Toward a Statistical Theory of Learning, *Psychol. Rev.*, vol. 57 pp. 94-107, 1950.
 48. Flood, M. M., On Stochastic Learning Theory, Paper P-353, The RAND Cor-

- poration, Santa Monica, Calif., 1952.
49. Johnson, S., Optimal Two-and Three-stage Production* Schedules with Setup Times Included, Paper P-402, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
 50. ——— and S. Karlin, On Optimal Sampling Procedure for a Problem of Two Populations—I, Paper P-328, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1952.
 51. Karlin, S., A Mathematical Treatment of Learning Models—I, Research Memorandum RM-921, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1952.
 52. ——— and H. N. Shapiro, Decision Processes and Functional Equations, Research Memorandum RM-933, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1952.
 53. Peisakoff, M., More on Games of Survival, Research Memorandum RM-884, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1952.
 54. Robbins, H., Some Aspects of the Sequential Design of Experiments, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 58, pp. 527-536, 1952.
 55. Shapley, L., Stochastic Games, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 39, pp. 1095-1100, 1953.