

方陣的实相合⁽¹⁾

华 罗 庚

引言。除非特别声明外，本文所考虑的基础域是实域。

二实方阵 A, B 称为实相合，如果有一实方阵 Γ 使

$$(1) \quad \Gamma A \Gamma' = B$$

这儿 Γ' 表 Γ 的转置。

本文的目的在于解决实相合问题并给出一些应用。比起代数封闭域来，这是稍为复杂些的。

由(1)立得

$$(2) \quad \Gamma A' \Gamma' = B'$$

故由 A, B 的相合可知 $\lambda A + \mu A'$ 与 $\lambda B + \mu B'$ 有相同的初等因子。在代数封闭域上这一条件也就是充分的了，但在实域上，这些不变量之外，我们还要引起新不变量“号标系”。

命

$$S = A + A', \quad K = A - A'.$$

前者是对称，后者是斜对称。因此我们所研究的问题也就变为一对方阵的分类问题；其中一个是对称的，一个是斜对称的。

又命

$$K = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

如果方阵 T 适合于

$$TKT' = K,$$

则 T 称为辛方阵。因此我们这儿所研究的问题可以作为“对称方阵的辛分类”看。其相仿的问题“Hermitian 方阵的辛分类”已为作者所处理⁽²⁾。

命 S 表一对角线方阵只有 ± 1 在其对角线上。如果

$$TST' = S$$

则 T 称为对 S 的 Lorentz 方阵。作为本文的应用之一，我们在 Lorentz 群下研究 Lorentz 方阵的相似问题。

(1) 这是1944年旧稿。作为配合1962年在中山大学讲课的补充发表于此。

(2) Hua, On the theory of automorphic functions of a matrix variable II, Amer. Jour. of Math. 66(1944), 531-563.

在論述之前,先引述一條有用的

引理⁽¹⁾:任一滿秩的,僅有非負特征根的(即有正的,或復的)實方陣一定有一實的平方根,而且它可以表為原方陣的實系數的多項式。

也就是如果 M 是這樣的方陣,則有一實系數多項式 $f(x)$, 使 $f(M)^2 = M$ 。

§ 1. 分 解

用 S 及 K 典型地各表一實對稱或實斜對稱方陣。形如

$$\lambda S + \mu K$$

的方陣稱為組成一串 P 。

定理1. 命 P 與 P_1 為二串有相同的初等因子。則有二實的滿秩方陣 Γ 與 Γ_1 使

$$\begin{aligned}\Gamma'P\Gamma &= p^{(\tau_1)} + q^{(\tau_2)}, \\ \Gamma_1'P\Gamma_1 &= p_1^{(\tau_1)} + q_1^{(\tau_2)},\end{aligned}\quad \tau_1 + \tau_2 = n, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$$

並且有二實的滿秩方陣 $g = g^{(\tau_1)}$, $g_0 = g_0^{(\tau_2)}$ 使

$$g'pg = p_1$$

及

$$g_0'qg_0 = -q_1.$$

証: 由假定, 有二實方陣 Q 與 R 使

$$QPR = P_1$$

這儿 $P = \lambda S + \mu K$ 及 $P_1 = \lambda S_1 + \mu K_1$ 。

用 P 及 R 來代表 QPQ' 及 $Q'^{-1}R$, 則並不失去普遍性可以假定 $Q = I$ 。

我們有 T 使

$$TRT^{-1} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

這儿 r 的特征根都是非負的, 而 r_0 的都是負的。並不失去普遍性, 我們就假定

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}.$$

現在我們有

$$S_1 = SR = R'S, \quad K_1 = KR = R'K.$$

由此推得

$$S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s_0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k_0 \end{pmatrix}.$$

命

$$p = \lambda s + \mu k, \quad q = \lambda s_0 + \mu k_0,$$

(1) 上文, § 6 引理。

并且相应地定义 p_1 与 q_1 。則得

$$p_1 = pr = r'p, \quad q_1 = qr_0 = r'_0q.$$

由引理, 有一个实系数多项式 $g(x)$, 使

$$(g(r))^2 = r.$$

因此

$$p_1 = pg(r)^2 = pg(r)g(r) = g(r')pg(r).$$

又有一实多项式 g_0 使

$$(g_0(r))^2 = -r_0.$$

故

$$q_1 = -qg_0^2 = -g'_0qg_0.$$

定理已經証明。

§ 2. 构造

在一个代数封闭域上, 习知: “一个方阵串可以分解为具有以下五种初等因子的方阵串的直和”。⁽¹⁾ (而这五种不能再分解)

$$(i^0) \quad (\lambda - \alpha\mu)^r, (\lambda + \alpha\mu)^r, \alpha \neq 0,$$

$$(iv) \quad \lambda^r, \quad r \text{ 奇数},$$

$$(v) \quad \lambda^r, \lambda^r, \quad r \text{ 偶数},$$

$$(vi) \quad \mu^r, \quad r \text{ 偶数},$$

$$(vii) \quad \mu^r, \mu^r, \quad r \text{ 奇数},$$

在实数域上, 后四者都能出现, 但 (i^0) 又可以分为以下三种:

$$(i) \quad (\lambda - \alpha\mu)^r, (\lambda + \alpha\mu)^r, \alpha \text{ 实数};$$

$$(ii) \quad (\lambda - \alpha\mu)^r, (\lambda + \alpha\mu)^r, (\lambda - \overline{\alpha}\mu)^r, (\lambda + \overline{\alpha}\mu)^r$$

α 是复数, 但非实及纯虚的; 及

$$(iii) \quad (\lambda - \alpha\mu)^r, (\lambda + \alpha\mu)^r$$

这几 α 是纯虚的。

现在作出具有以上七种初等因子的方阵。我们用以下的符号:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \text{ 对实 } \alpha$$

(1) 見 Turnbull - Aitken, Theory of Canonical Matrices, 138-9 頁。

及

$$L_\theta = \begin{pmatrix} u & j & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u & j & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

这儿

$$u = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且特别命

$$L = L_{\frac{\pi}{2}}.$$

又以 U 表对綫方陣

$$U = [1, 0, \cdots, 0]$$

及 u 表矢量

$$u = (1, 0, \cdots, 0).$$

下表表示具有初等因子 (i)–(vii) 的方陣串:

	S	K	S+K	阶数
(i)	$\begin{pmatrix} 0 & J_\alpha \\ J'_\alpha & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & J_\alpha + I \\ J'_\alpha - I & 0 \end{pmatrix}$	$2r$
(ii)	$\rho \begin{pmatrix} 0 & L_\theta \\ L'_\theta & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = \rho e^{i\theta}$	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \rho L_\theta + I \\ \rho L'_\theta - I & 0 \end{pmatrix}$	$4r$
(iii) _e	$\rho \begin{pmatrix} 0 & L \\ L' & U \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \rho L + I \\ \rho L' - I & U \end{pmatrix}$	$2r$ r 偶数
(iii) _o	$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0^{(r-1)} & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u' & L' & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 1 & \rho u \\ 0 & 0 & 0 & \rho L + I \\ -1 & 0 & \rho & 0 \\ \rho u' & \rho L' - I & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2r$ r 奇数
(iv)	$J^{(r)}$	$\begin{pmatrix} 0^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \\ 0 & -J & 0 \end{pmatrix}$	例如当 $r=5$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	r 奇数
(v)	$J^{(2r)}$	$\begin{pmatrix} 0 & JJ_0 \\ -(JJ_0)' & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & JJ_1 \\ -JJ_{-1} & 0 \end{pmatrix}$	$2r$ r 偶数
(vi)	JJ_0	$\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & JJ_1 \\ JJ_{-1} & 0 \end{pmatrix}$	$2r$ r 偶数
(vii)	$\begin{pmatrix} 0 & J_0 J \\ J_0 J & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & J_1 J \\ J_{-1} J & 0 \end{pmatrix}$	$2r$ r 奇数

(註: 为了方便起见, 我们把初等因子稍作修改, 例如 (i) 的初等因子是 $(\alpha\lambda + \mu)^r$, $(\alpha\lambda - \mu)^r$ 这和原来给的稍有不同)。

可以直接验证: 在 (i), (ii), (v) 与 (vii) 中 P 与 $-P$ 是实相合的, 其理由是

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}' = - \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii), (iv) 与 (vi) 中的 S 的标号各为 2, 1, 1, 故在这三种情况下 P 与 $-P$ 是不实相合的。

今往证明在 (iii) 时, P 与 $-P$ 也不能实相合的。为了容易说明问题, 我们选取最简单的但有代表性的例子。例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不实辛相合。命

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

并假定有实辛方阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

使

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & L \\ L' & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O & L \\ L' & -U \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

可知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L & O \\ -U & L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & O \\ U & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

由此得出

$$BL' = -LB$$

$$DL' = UB + L'D.$$

由这两方程推得 $B=0$ 。

写出

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ SA & A'^{-1} \end{pmatrix}$$

这 S 是对称方阵。于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ SA & A'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L & O \\ -U & L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & O \\ U & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ SA & A'^{-1} \end{pmatrix},$$

由此推出

$$-SAL - A'^{-1}U = UA + L'SA,$$

即

$$-U = A(U + L'S + SL)A'.$$

左边是一个半定负方阵, 而 $U + L'S + SL$ 的对角线上二元素各为

$$1 + S_{12}, -S_{12}$$

不能同时非正。故得所证。

由上表及定理1可知

定理2. 任一方阵串 P 可以实分解为以下诸类方阵的直和: 表上所给的 (i)-(vii) 及表上所给的 (iii)_e, (iii)_o, (iv) 及 (vi) 的变号。

系1. 假定 $|\lambda S + \mu K| = 0$ 的根不是 $\lambda : \mu = \eta : i\xi$ (η, ξ 实数), 则 $\lambda S + \mu K$ 与 $\lambda S_1 + \mu K_1$ 实相合的必要且充分的条件是它们有相同的初等因子。

系2. 任一方阵实相合于以下诸类方阵的直和: 表上“ $S+K$ ”栏中各方阵及 (iii)_e, (iii)_o, (iv) 与 (vi) 的变号方阵。

§ 3. 各种应用

定理3. 在实辛变换下, 一个对称方阵一定相合于以下的一些类型的方阵的直和:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 0 & J_\alpha \\ J_\alpha' & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{对实 } \alpha,$$

$$(b) \quad \rho \begin{pmatrix} 0 & L_\theta \\ L_\theta' & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho > 0, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2},$$

$$(c) \quad \pm \rho \begin{pmatrix} 0 & L \\ L' & U \end{pmatrix},$$

$$(d) \quad \pm \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u' & L' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(e) \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ J_0' & V \end{pmatrix}, \quad V = [0, \dots, 0, 1]$$

及

$$(f) \quad \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ J_0' & 0 \end{pmatrix}.$$

这是定理2的推论, 我们仅需注意

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ J_0' & V \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

及

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ J'_0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

各与 (vi) 及 (vii) 实辛相合就够了。

定理4. 命 S 的标号是 s 。则方阵串 P 的初等因子的重数 $\leq n - |s| + 1$ 。特别如果, S 是定正的 (即 $s = n$) , 则串 P 的初等因子都是单的。

这也是定理2的推论, 只要逐一检查表中 S 的标号即足。

由此可以推得:

定理5. 经过实辛变换, 任何一个定正二次型一定可以化为标准型

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (x_i^2 + y_i^2).$$

定理6. 一个非奇异的斜对称方阵可以用正交方阵变为标准型

$$\sum \rho_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_i > 0.$$

由此也偶然证明了, 方程式

$$|I - \lambda K| = 0$$

的根只能是纯虚的, 这是大家都知的结果。

§ 4. 关于标号的註記

命

$$|\lambda S + \mu K| = 0$$

的根为

$$\frac{\mu}{\lambda} = \xi_1, \dots, \xi_l \quad (\xi_v = \infty \text{ 表示 } \lambda = 0 \text{ 是根}).$$

则方阵串 P 实相合于

$$C_{\xi_1}, \dots, C_{\xi_l}$$

的直和, 这 l 个 C_{ξ_i} 中以 $\xi_i, \xi_i^{-1}, \bar{\xi}_i$ 及 $\bar{\xi}_i^{-1}$ 为根。

若 ξ_i 非纯虚的复数, 则

$$C_{\xi_i} = \sum_j p_j$$

这 l 个

$$p_j = \lambda \begin{pmatrix} 0 & J_{\xi_j} \\ J'_{\xi_j} & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

若 ξ_i 是純虛的 (但 $\neq 0, \neq \infty$), 則

$$C_\xi = \sum_j \varepsilon_j p_j$$

這几 p_j 由 (iii)_e 或 (iii)_o 給出。把相等 p 加在一起

$$\sum_{1 \leq i \leq \tau} \{a_i - b_i\} p_i^{(r_i)}, \quad r_1 > r_2 > \dots > r_\tau,$$

這几 $\{a_j - b_j\} p_j$ 表示 p_j 出現 a_j 次, $-p_j$ 出現 b_j 次。

整数

$$(a_i, b_i), \quad 1 \leq i \leq \tau$$

称为方陣串 P 对根 ξ_i 的标号系。同法定义 $\xi_i = 0$ 及 $\xi_i = \infty$ 的标号系。

与作者前文同法⁽¹⁾可以証明

初等因子及标号系完全刻划一个非奇异串 P 的实相合問題。

作者不进入具体的証明, 但必須指出由 (iii)_e 型的支量所引出的困难可以用 § 2 中的方法来解决。

§ 5. Lorentz 方陣的分解

命 F 表一对角綫方陣, 在其主对角綫上仅有 $+1$ 或 -1 。一个实方陣 T 如果适合于

$$TFT' = F$$

則称为对 F 的 Lorentz 方陣。

(注意: 我們可以假定 S 是任一給定的滿秩实对称方陣, 这样做並沒有本質的推广。)

如果一个方陣代表置換, 則称为置換方陣。例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代表一个置換, x_1, x_2 互換, x_3 不动。

定理7. 命

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(r)}, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(n-r)}.$$

假定 α_1 与 α_2 无公共的特征根并假定 $B^{(n)}$ 是对 F 的 Lorentz 方陣。若方陣

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B$$

有相同的初等因子, 則 B 是可以分解的。更确切些說: 有一置換方陣 C 使 $CFC' = F_0$,

(1) 見前引文献。

而有一对 F_0 的 Lorentz 方陣 T 它把 CBC^{-1} 变为

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

証: 有一滿秩的 P 使

$$P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1} = B.$$

由 $BFB' = F$ 可知

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} Q = Q \begin{pmatrix} \alpha_1'^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2'^{-1} \end{pmatrix},$$

这儿 $Q = P^{-1}FP'^{-1}$. 由于 α_1 与 $\alpha_2'^{-1}$ 无公共特征根, 因此

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix},$$

这儿 q_1 与 q_2 是对称方陣. 有一实方陣

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

使

$$RQR' = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} = F_0$$

这儿 f_1, f_2 仍为 F 的形式, 但行列較少耳. 有一置換方陣 C 使

$$CFC' = F_0.$$

命 $T = RP^{-1}C^{-1}$, 則

$$TF_0T' = F_0.$$

由于 $BFB' = F$, 故

$$(CBC^{-1})F_0(CBC^{-1})' = F_0.$$

由于

$$CP \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1}C^{-1} = CBC^{-1},$$

我們有

$$T^{-1}R \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} R^{-1}T = CBC^{-1}.$$

故得定理。

定理8. 假定 A, B 是二对 F 的 Lorentz 方陣, 并且相似, 而且 A 不可分解. 如果 F 的标号非 0, 則有一对 F 的 Lorentz 方陣將 B 变为 A . 如果 F 的标号等于 0, 命

$$F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

則有两种可能：有一对 F 的 Lorentz 方陣將 B 变为 A ，或

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

証：由于 A, B 的相似性，有一滿秩的 P 使

$$B = P^{-1}AP.$$

由于 $BFB' = F$ ，可立得

$$QA = AQ, \quad Q = PFP'F.$$

并有

$$PFP' = QF = FQ'.$$

如果 Q 无負特征根，由引理，我們有一实系数的多项式 $f(x)$ 使 $R = f(Q)$, $R^2 = Q$ 。于是

$$PFP' = R^2F = RFR'.$$

因此方陣 $R^{-1}P = T$ 是对 F 的 Lorentz 方陣而且

$$TBT^{-1} = R^{-1} \cdot PBP' \cdot R = R^{-1}AR = A.$$

故定理正确。

若 Q 仅有負特征根，則有一实系数的多项式 $f(x)$ 使 $R = f(Q)$ 及 $R^2 = -Q$ 。于是

$$PFP' = -R^2F = -RFR'.$$

这仅当 F 的标号等于 0 才有可能性。命

$$F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -F,$$

$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} R^{-1}P$ 是一对 F 的 Lorentz 方陣。于是有

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

若 Q 既有負根，又有非負根，則有一方陣 D 使

$$DQD^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix},$$

这儿 q_1 仅有負根， q_2 仅有非負根。由

$$DQD^{-1} \cdot DAD^{-1} = DAD^{-1} \cdot DQD^{-1},$$

及

$$DQD^{-1} \cdot DFD^{-1} = DFD^{-1} \cdot D'^{-1}Q'D',$$

可以推得

$$DAD' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

及

$$DFD' = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}.$$

有一方陣

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

使

$$T \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}.$$

此处 f_1 及 f_2 与 F 有相同的形式。則

$$A_1 = TDAD^{-1}T^{-1}$$

是一直和, 而且是对

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}$$

的 Lorentz 方陣。这与 A 的不可分解性相違背。

§ 6. 摆 出 来

由定理 7 与 8, 每一个 Lorentz 方陣可以分解为一些支量之和, 而这些支量的特征根各为:

- | | | |
|-----|---|---------------------------------|
| (1) | $\alpha, \alpha^{-1},$ | 实 $\alpha \neq \pm 1,$ |
| (2) | $\alpha, \alpha^{-1}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^{-1},$ | α 复数, $ \alpha \neq 1,$ |
| (3) | $\alpha, \alpha^{-1},$ | α 复数, $ \alpha = 1,$ |

及

- (4) $\alpha = \pm 1.$

命 T 为 (1) — (4) 类的支量之一。命

$$T = (I + Q)(I - Q)^{-1}.$$

由 $TFT' = F$ 推得

$$QF + FQ = 0,$$

即 QF 是斜对称。如果 $\det(I - Q) = 0$, 則考虑

$$T = (I - Q)(I + Q)^{-1}.$$

因此問題一变而为研究方陣对

$$\{F, QF\}$$

的相合問題。

我們現在檢閱一下所有的不可分解的支量⁽¹⁾。假定 F 的标号等于 0, 对应于 (i), (ii),

(1) 参考本學報前文。

(iii)_e 及 (v) (仍用前文的符号), 对 F 的 Lorentz 方陣的特征方陣的初等因子如下:

- (i) $(\lambda - \alpha)^r, (\lambda - \alpha^{-1})^r, \quad \alpha \text{ 实 } \neq \pm 1,$
 (ii) $(\lambda - \alpha)^r, (\lambda - \bar{\alpha})^r, (\lambda - \alpha^{-1})^r, (\lambda - \bar{\alpha}^{-1})^r, \quad \alpha \text{ 复, } |\alpha| \neq 1,$
 (iii) $(\lambda - e^{i\theta})^r, (\lambda - e^{-i\theta})^r, \quad 0 < \theta < \pi$

及

- (v) $(\lambda \pm 1)^r, (\lambda \pm 1)^r, \quad r \text{ 偶数.}$

取

$$F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{标号为 } 0)$$

对 F 的不可分解的 Lorentz 方陣可以列举如下:

- (i) $\begin{pmatrix} J_\alpha & 0 \\ 0 & J'_\alpha{}^{-1} \end{pmatrix},$
 (ii) $\begin{pmatrix} \rho L_\theta & 0 \\ 0 & \rho^{-1} L'_\theta{}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \rho e^{i\theta},$
 (iii)_e $\begin{pmatrix} L_\theta & K L'_\theta{}^{-1} \\ 0 & L_\theta{}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

及

- (v) $\begin{pmatrix} J_{\pm 1} & 0 \\ 0 & J'_{\pm 1}{}^{-1} \end{pmatrix}.$

由 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, 我們得出一新类型

- (iii)_e' $\begin{pmatrix} L_\theta & -K L'_\theta{}'^{-1} \\ 0 & L_\theta{}'^{-1} \end{pmatrix}.$

再考虑标号为 1 的方陣 F, 不妨取

$$F = F^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这几 r 是奇数。对 F 的不可分解的 Lorentz 方陣是

$$(iv) \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{等等。}$$

($r=3, 5, \dots$)。其一般作法是：用 $M^{(2p+1)}$ 表对 $F^{(2p+1)}$ 的一个 Lorentz 方陣（如上式形的）。它的构造可由归纳法作 M^{2p-1} 作出之：

$$M^{(2p+1)} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{M^{(2p-1)}}} & \begin{matrix} (-1)^{r-1}/2^{r-1}, (-1)^r/2^r \\ (-1)^{r-1}/2^{r-2}, (-1)^r/2^{r-1} \end{matrix} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这儿 $\boxed{\phantom{M^{(2p-1)}}}$ 与 $\boxed{\phantom{M^{(2p-1)}}}$ 皆代表 M^{2p-1} 。而 $M^{(2p+1)}$ 的初等因子是 $(\lambda \pm 1)^r$ 。

最后考虑：标号等于 2 的

$$F = \begin{pmatrix} 1^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 1^{(1)} & 0 \\ 0 & I^{(r-1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对它的 Lorentz 方陣是

$$(iii)_0. \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & u & \sin \theta & 0 \\ 0 & L_{\theta}^{(r-1)} & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta L'^{-1}u' & -\frac{1}{2}u'uL'^{-1} & -\sin \theta L'^{-1}u' & L'^{-1} \end{pmatrix},$$

$$u = (1, 0, \dots, 0),$$

它的初等因子是 $(\lambda - e^{i\theta})^r, (\lambda - e^{-i\theta})^r$ 。

总之得

定理9. 一个实对称方陣 F 的 Lorentz 方陣可以被对 F 的 Lorentz 方陣变为方陣 (i), (ii), (iii)₀, (v), (iii)₀, (iv) 及 (iii)₀ 的直和。

作为一个顺带的收获：

定理10. Lorentz 方陣的初等因子的重数 $\leq n-|s|+1$, 这儿 s 是 F 的标号。
特别有, 正交方陣的初等因子是单的。这是熟知的事实。

§7. 应 用

a) 球几何。

在研究球几何与 Hyperbolic 函数的时候, 以方陣

$$\begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ 0 & -I^{(2)} \end{pmatrix}$$

为基础的 Lorentz 方陣起重要作用。

作者的目的在于给出它的显明的标准型。由定理 8 共有十种:

- | | |
|---|---|
| (1) $\begin{pmatrix} n & 2 \\ +, & - \end{pmatrix},$ | (2) $\begin{pmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 \\ +, & + & -, & - \end{pmatrix},$ |
| (3) $\begin{pmatrix} n-1 & 1 & 2 \\ +, & + & - \end{pmatrix},$ | (4) $\begin{pmatrix} n-2 & 1 & 1 & 1 \\ +, & + & -, & + & - \end{pmatrix},$ |
| (5) $\begin{pmatrix} n-2 & 2 & 2 \\ +, & + & - \end{pmatrix},$ | (6) $\begin{pmatrix} n-2 & 2 & 1 & 1 \\ +, & + & -, & - \end{pmatrix},$ |
| (7) $\begin{pmatrix} n-3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ +, & + & -, & + & - \end{pmatrix},$ | (8) $\begin{pmatrix} n-3 & 3 & 2 \\ +, & + & - \end{pmatrix},$ |
| (9) $\begin{pmatrix} n-4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ +, & + & -, & + & - \end{pmatrix},$ | (10) $\begin{pmatrix} n-4 & 4 & 2 \\ +, & + & - \end{pmatrix},$ |

这儿例如: $\begin{pmatrix} n-3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ +, & + & -, & + & - \end{pmatrix}$ 表示是

$$F = I^{(n-3)} + \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的 Lorentz 方陣 (当 $n=3$ 时, 仅有 8 种不同)

命

$$T_{11} = \pm \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix},$$

$$T_{21} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$T_{22}^n = \pm \begin{pmatrix} \cosh \psi & 1 & \sinh \psi & 1 \\ -1 & \cosh \psi & -1 & \sinh \psi \\ \sinh \psi & -1 & \cosh \psi & -1 \\ 1 & \sinh \psi & 1 & \cosh \psi \end{pmatrix},$$

$$T_{22}^b = \begin{pmatrix} \cosh \psi \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, & \sinh \psi \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \sinh \psi \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, & \cosh \psi \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$T_{22}^c = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$T_{22}^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T_{43} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 3\cos \theta & 0 & 0 & 3\sin \theta & -2\sqrt{2}\cos \theta & -2\sqrt{2}\sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2}\cos \theta & 0 & 0 & -2\sqrt{2}\sin \theta & 3\cos \theta & 3\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

这几 T_{ij} 是一 $\begin{pmatrix} i & j \\ + & - \end{pmatrix}$ 方阵。利用这些 T_{ij} 及正交方阵的标准型可以作出：对

$$F = \begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ 0 & -I^{(2)} \end{pmatrix}$$

的 Lorentz 方阵的标准型的具体表达式来。

在球几何上这些标准型都是有它们的几何意义的。留作将来讨论。

b) 普通的 Lorentz 群。

在相對論中, Lorentz 群是指

$$F = \begin{pmatrix} I^{(3)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的 Lorentz 群。這是相對論中的一個重要東西。我們這兒也列出它所有的標準型的具体表达式來。其中前兩者的物理意義是大家所熟知的, 第三種的物理意義我不知道。

現在當然有三種: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ +, - \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ +, + & - \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ +, + & - \end{pmatrix}$ 。

它們的具体表达式是:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{旋轉与时空对称}),$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & 0 & \pm \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & 0 & \pm \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

§ 8. Hermitian 方陣的自形群

以上所講的, 可以称为以 S 为基本二次型的自形群, 即使以 S 为方陣的二次型不变的諸變換所形成的群。

关于 Hermitian 方陣也应有相仿的結果。因为它比較容易些, 我們述要如下:

• 命 F 代表 Hermitian 方陣, 而适合于

$$\bar{T}FT' = F$$

的方陣 T 成一群, 称为 F 的自形群。

显然有

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \bar{J}_\alpha & 0 \\ 0 & J_\alpha'^{-1} \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} J_1 & UJ_1'^{-1} \\ 0 & J_1'^{-1} \end{pmatrix}$$

是 Hermitian 方陣

$$\begin{pmatrix} 0 & Ii \\ -Ii & 0 \end{pmatrix}$$

的自形变换。

对奇数 r , § 6(iv) 所給的 M_{2p+1} 是 Hermitian 方陣

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的自形变换。

适当地选择 F , Hermitian 方陣的自形变换 T 可以分解为以下形式变量的直和

$$\begin{pmatrix} \bar{J}_\alpha & 0 \\ 0 & J'_\alpha \end{pmatrix}, \quad e^{i\theta} \begin{pmatrix} J_1 & \pm UJ_1'^{-1} \\ 0 & J_1'^{-1} \end{pmatrix}, \quad e^{i\theta} M_p$$

并且也易于証明 T 的初等因子的重数 $\leq n - |s| + 1$ (F 的标号 s)。

附录 (1961年12月加于鹿迴头): § 7 的结果也可以不太困难地从 Möbius 群推出来。

命

$$(1) \quad H = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}, \quad b = y + iz, \quad a = t + x, \quad d = t - x$$

表一二行二列的 Hermitian 方陣, 这儿 t, x, y, z 都是实数。

命

$$(2) \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

代表一 Möbius 变形, 这儿 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是复数。但須注意 $\pm T$ 代表同一 Möbius 变形。

把方陣变形

$$(3) \quad H^* = TH\bar{T}'$$

写成为 t, x, y, z 的綫性变换

$$(4) \quad (t^*, x^*, y^*, z^*) = (t, x, y, z)A \quad (A = A(T)),$$

这儿 A 是一四行四列的实方陣, 不难写出

$$(5) A=A(T)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2) & \frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2+|\gamma|^2-|\delta|^2) \\ \frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-|\gamma|^2-|\delta|^2) & \frac{1}{2}(|\alpha|^2-|\beta|^2-|\gamma|^2+|\delta|^2) \\ \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma+\beta\bar{\delta}+\bar{\beta}\delta) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma-\beta\bar{\delta}-\bar{\beta}\delta) \\ \frac{1}{2}(-\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma-\beta\bar{\delta}+\bar{\beta}\delta) & \frac{1}{2}(-\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma+\beta\bar{\delta}-\bar{\beta}\delta) \\ \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\bar{\gamma}\delta+\gamma\bar{\delta}) & \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\gamma\bar{\delta}-\bar{\gamma}\delta) \\ \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}-\bar{\gamma}\delta-\gamma\bar{\delta}) & \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-\gamma\bar{\delta}+\bar{\gamma}\delta) \\ \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta}+\bar{\alpha}\delta+\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma) & \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta}-\bar{\alpha}\delta-\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma) \\ \frac{1}{2}(-\alpha\bar{\delta}+\bar{\alpha}\delta-\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma) & \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta}+\bar{\alpha}\delta-\beta\bar{\gamma}-\bar{\beta}\gamma) \end{pmatrix}$$

(3) 式两边取行列式得

$$t^{*2}-x^{*2}-y^{*2}-z^{*2}=t^2-x^2-y^2-z^2.$$

因此, 变形(4)使 $t^2-x^2-y^2-z^2$ 不变, 也就是 $A=A(T)$ 是一个 Lorentz 方阵。A 所成的群以 L^{++} 表之。首先其行列式等于 $|\alpha\delta-\beta\gamma|^2=1$, 其次其(1, 1)位置的元素

$$\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2)>0. \text{ Lorentz 变换不止这些, 例如有(1, 1)位置为负的}$$

元素如

$$(6) \quad [-1, 1, 1, 1],$$

也有(1, 1)位置为正而行列式为负的元素如

$$(7) \quad [1, -1, 1, 1].$$

前者代表时对称, 后者代表空对称。不难证明, L^{++} 中添进(6)与(7)便得整个的 Lorentz 群。

特别值得注意的是:

$$A(T)A(P)=A(TP), \quad A(\pm I)=I$$

二行二列的方阵有以下两个标准型

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

由于行列式等于1及 $\pm P$ 代表同一 Möbius 变形, 因此 Möbius 变形有以下两种标准型

$$(i) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 1, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

(当 $\rho = 1$ 时, 可以进一步限制 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 及

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对应于 (i), (5) 等于 ($\rho = e^\psi$)

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \cosh 2\psi & \sinh 2\psi & 0 & 0 \\ \sinh 2\psi & \cosh 2\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

而对应于 (ii), (5) 等于

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \\ 1, -1, 1, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix}.$$

也就是在群 L^{++} 下, 任何一个时空定向的 Lorentz 变换一定等价于 (8) 或 (9)。

又如果取 T 是一酉方阵 U , 即 $U\bar{U}' = I$, 则

$$A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix},$$

而 Γ 代表一旋轉。