中山大学学报　1964年　第4期

Σ族和S族的平均直径和超限直径下界

譚兆信

設E是平面上含有无穷多个点的閉集，

令
$$d_n(E)=\sup_{\substack{a_k\in E\\ k=1,2\cdots n}}\left(\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}|a_k-a_j|\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\qquad(n\geqslant 2)$$

$d_n(E)$称为E的n級平均直径，$d(E)=\lim\limits_{n\to\infty}d_n(E)$称为$E$的超限直径。当$E$是无界集合时$d_n(E)=\infty$　$(n=2,3\cdots\cdots)$，　$d(E)=\infty$。

設G是边界多于一点的单連通区域，$w=f(z)$是G內的单純函数，它的值域边界是閉集Γ_f，$d_n(f)=d_n(\Gamma_f)$称为$w=f(z)$的n級平均直径$(n=2,3\cdots\cdots)$，而$d(f)=d(\Gamma_f)$称为$w=f(z)$的超限直径。

区域$|z|<1$上单叶的正则函数$w=f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$的全体叫做$S$族。区域$1<|z|<\infty$上单叶的正則函数$w=F(z)=z+a_1/z+a_2/z+\cdots\cdots$的全体叫做$\Sigma$族。

令
$$Q_n(s)=\inf_{f\in s}d_n(f)\qquad(n=2,3\cdots\cdots)。$$
$$Q_n(\Sigma)=\inf_{F\in\Sigma}d_n(F)\qquad(n=2,3\cdots\cdots)。$$
$$Q(s)=\inf_{f\in s}d(f)。$$

夏道行[1]証明了$Q_n(\Sigma)=n^{\frac{1}{n-1}}$，并且此极值为函数$F(z)=z$所达。本文証明了只有函数$F(z)=z$才能达到这个极値，在証明过程中顺便指出了$Q_n(\Sigma)=d_n(z)=n^{\frac{1}{n-1}}$。对于$S$族成立着同样的結論。本文还討論了超限直径的下界。

引理1：对任意正整数m,n $(n\geqslant 2)$成立着：

$$\Delta(m,n)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}\left(m+\frac{1-\omega_j^{-m}}{1-\omega}\right)\neq 0\quad(\text{其中}\ \omega_j=e^{i\frac{2\pi}{n}j},j=1,2\cdots n-1)。$$

証明：首先来証 $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}=\frac{n-1}{2}$

考虑方程 $x^n=1$，令 $1-x=y$，則 $(1-y)^n=1$，卽：

$$n(-y)^{1-n}+\frac{n(n-1)}{2}(-y)^{2-n}+\cdots\cdots+n(-y)^{-1}+1=0\cdots\cdots\qquad(*)$$

$\because$ $1,\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_{n-1}$ 是方程 $x^n=1$ 的 n 个根，故 $y_j=1-\omega_j$ $(j=1,2,\cdots n-1)$ 是方程$(*)$的 $n-1$ 个根，由根的性質卽得

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{y_j}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n-1}{2}\text{。}$$

再来計算 $\Delta(m,n)$，設 $m=np+m'$（p 是非負整数，$0\leqslant m'\leqslant n-1$）。

当 $m'=0$ 时，$\Delta=m\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}=m\frac{n-1}{2}\neq 0$；

当 $m'\neq 0$ 时，

$$\Delta(m,n)=m\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-\omega_j^{-m'}}{(1-\omega_j)^2}$$

$$=m\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega_j}\left[\omega_j^{-m'}+\omega_j^{-(m'-1)}+\cdots\cdots\omega_j^{-1}\right]\text{。}$$

但

$$\frac{1}{\omega_j^{m'}(1-\omega_j)}=\frac{1}{\omega_j^{m'}}+\frac{1}{\omega_j^{m'-1}}+\cdots\cdots\frac{1}{\omega_j}+\frac{1}{1-\omega_j},$$

$$\frac{1}{\omega_j^{m'-1}(1-\omega_j)}=\frac{1}{\omega_j^{m'-1}}+\cdots\cdots\frac{1}{\omega_j}+\frac{1}{1-\omega_j},$$

$$\frac{1}{\omega_j(1-\omega_j)}=\frac{1}{\omega_j}+\frac{1}{1-\omega_j}\text{。}$$

又

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_j^k}=-1\qquad(k=1,2\cdots\cdots n-1)\text{。}$$

$$\therefore\quad\Delta(m,n)=m\cdot\frac{n-1}{2}-\left[\frac{m'(n-1)}{2}-m'-(m'-1)+\cdots\cdots-2-1\right]$$

$$=\frac{m(n-1)}{2}+\frac{(1+m')m'}{2}-\frac{m'(n-1)}{2}=np\frac{n-1}{2}+\frac{m'(m'+1)}{2}\neq 0$$

定理1：若 $w=F(z)\in\Sigma$，$d_n(F)=Q_n(\Sigma)$（n 为某一整数），則 $F(z)\equiv z$

証明：設 $w=F(z)\in\Sigma$，$d_n(F)=Q_n(\Sigma)$

令 $$F_\rho(z)=\frac{1}{\rho}F(\rho z)\quad(|z|>1)(|\rho|>1)。$$

$$g(\rho,\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_n)=\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left(F_\rho(e^{i\theta k})-F_\rho(e^{i\theta j})\right),\quad(|\rho|>1)$$

（其中$\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_n$是实数，$\rho$是复数）。

对任意n个固定的实数$\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_n$，函数$g(\rho,\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_n)$是区域$|\rho|>1$内的正则解析函数，且$g(\infty,\theta_1,\theta_2\cdots\cdots\theta_n)=\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left(e^{i\theta k}-e^{i\theta j}\right)$。

根据最大模原理，必存在$\{\rho_p:p=1,2\cdots\}$，使$\rho_p\to e^{i\theta_0}$（θ_0是实数），而

$$|g(\rho,\theta_1,\theta_2\cdots\theta_n)|\leqslant\sup_{|\rho|>1}g(\rho,\theta_1\cdots\theta_n)=\lim_{p\to\infty}g(\rho_p,\theta_1,\theta_2\cdots\theta_n)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left[F(\rho_p e^{i\theta k})-F(\rho_p e^{i\theta j})\right]\leqslant\left[d_n(F)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$=\left[Q_n(\Sigma)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdots\cdots\qquad(\text{I})$$

对任意固定的$\rho(|\rho|>1)$，可选$\theta_1,\theta_2\cdots\theta_n$，使$|g(\rho,\theta_1\cdots\theta_n)|^{\frac{2}{n(n-1)}}=d_n(F\rho)$

$$\therefore\quad d_n(F_\rho)\leqslant d_n(F)\cdots\cdots\cdots\qquad(\text{II})$$

注意到$F_\rho\in\Sigma$，由（II）即得$d_n(F_\rho)=d_n(F)=Q_n(\Sigma)$，注意到当$\rho$充分大时，$d_n(F_\rho)$与$d_n(z)$相差任意小，在等式$d_n(F_\rho)=Q_n(\Sigma)$中，令$\rho\to\infty$就得到

$Q_n(\Sigma)=d_n(z)$，

亦即：

$$Q_n(\Sigma)=d_n(z)=\left(\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left|e^{i\frac{2\pi}{n}k}-e^{i\frac{2\pi}{n}j}\right|\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}=n^{\frac{1}{n-1}}$$

选$\theta_1=0$，$\theta_2=\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\theta_n=\frac{n-1}{n}2\pi$。根据（I），就得到

$$\left|g(\rho,o,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|\leqslant\left[Q_n(\Sigma)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

但
$$\left|g\left(\infty,o,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi\right)\right|=\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left|e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}-e^{i\frac{2\pi}{n}(j-1)}\right|=\left[Q_n(\Sigma)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

函数$g(\rho,o,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)$是区域$|\rho|>1$内的正則解析函数，在区域的内点$\rho=\infty$达到最大模，因而$g(\rho,o,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)$必是常数。于是

$$\left|g(\rho,o,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|\equiv\left|g(\infty,0,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|=\left[Q_n(\Sigma)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

再結合式(Ⅰ)就可知道：对一切实数t，在区域$|\rho|>1$内，成立着：

$$\left|g(\rho,t,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|\leqslant\left|g(\rho,0,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|$$

故
$$ln\left|g(\rho,t,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|\leqslant ln\left|g(\rho,0,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|,$$

从而
$$\frac{d}{dt}\left[ln\left|g(\rho,t\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right|\right]\Bigg|_{t=o}=0,$$

即
$$R_e\left\{\frac{d}{dt}\left[lng(\rho,t,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right]\right\}\Bigg|_{t=0}=0\ (|\rho|>1)。\cdots(\text{Ⅲ})$$

现在用反証法，若$F(z)\ \ z$，则可設：

$$F(z)=z+\frac{a_m}{z^m}+\cdots\cdots\qquad(|z|>|)\qquad(\text{其中 }a_m\neq0,m\geqslant1)$$

于是
$$\frac{d}{dt}\left[lng(\rho,t,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right]\Bigg|_{t=0}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{F_\rho(1)-F_\rho\left(e^{i\frac{2\pi}{n}k}\right)}\cdot\frac{dF\rho(e^{it})}{dt}\Bigg|_{t=0}$$

$$=i\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}\right)+\frac{a_m}{\rho^{m+1}}\left(1-e^{-i\frac{2\pi}{n}km}\right)+\cdots\cdots}\right)\cdot\left[1-\frac{ma_m}{\rho^{m+1}}-\frac{(m+1)a_{m+1}}{\rho^{m+2}}+\cdots\cdots\right]$$

$$=i\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}}-\frac{am}{\rho^{m+1}}\cdot\frac{1-e^{-i\frac{2\pi}{n}km}}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}\right)^2}+\cdots\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{ma_m}{\rho^{m+1}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=i\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}}-i\frac{a_m}{\rho^{m+1}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}}+\frac{1-e^{-i\frac{2\pi}{n}km}}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}k}\right)^2}\right)+\cdots\cdots。$$

由于$a_m\neq0$，注意到引理1，就可知：$\frac{d}{dt}\left\{lng(\rho,t,\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right\}\Big|_{t=0}$是区域$|\rho|>1$內的解析函数，并且不是常数。但另方面，由式(Ⅲ)知$\frac{d}{dt}\left\{ln\ g(\rho,t、\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}2\pi)\right\}\Big|_{t=0}$是虚常数，这就互相矛盾。

我們同样可以考虑S族函数的平均直径下界問題，上述的結論对于S族仍然成立，証明方法也完全相同。

对于超限直径的下界，S族与Σ族有着完全不同的性质。Σ族中每个函数的超限直径都是1，而S族函数的超限直径下确界是1，并且此下界只有函数$f(z)\equiv z$才达到。

引理2：設单連通区域G_0和G_∞分别以$z=0$和$z=\infty$为內点，G_0与G_∞不相交，G_0和G_∞分别在$z=0$和$z=\infty$的映射半径为$R(G_0,0)$和$R(G_\infty,\infty)$则$R(G_0,0)\leqslant R(G_\infty,\infty)$其中等号当且只当$G_0$和$G_\infty$是园周$|z|=R$分开平面所得的两部分时才成立。

这个引理是在Bummux的书[2]中叙述并証明了的。

引理3：設$w=f(z)\epsilon s$，$f_\rho(z)=\frac{1}{\rho}f(\rho z)$ $(|z|<1)$ $(0<\rho<1)$则

$$d_n(f_\rho)\leqslant d_n(f)\ (n=2,3\cdots\cdots),\quad d(f_\rho)\leqslant d(f)\quad(\text{对一切}\rho\text{：}0<\rho<1)。$$

証明：不等式$d_n(f_\rho)\rho\leqslant d_n(f)$的証明与定理1中不等式(Ⅱ)的証明相似。而不等式$d(f_\rho)\leqslant d(f)$可以在不等式$d_n(f_\rho)\leqslant d_n(f)$中令$n\to\infty$得到。

定理2：$Q(s)=1$

証明：对$f(z)\epsilon s$，由引理3得$d(f_\rho)\leqslant d(f)$。令$\rho\to\infty$得$d(z)\leqslant d(f)$但$f(z)\equiv z\epsilon s$。故得$Q(s)=\inf\limits_{f\epsilon s}d(f)=d(z)=1$

定理3：若 $w=f(z)\epsilon s$，$d(f)=Q(s)$ 则 $f(z)\equiv z$

証明：先假設 $f(z)$ 在閉园 $|z|\leqslant 1$ 上正則解析，它将单位园映射为区域 G_0，G_0的边界是解析曲綫 l，G_0 的外部是区域 G_∞。

由引理2得 $R(G_\infty,\infty)\geqslant R(G_0,0)=1$，由黎曼定理知存在单叶保角映射 $w=F^*(z)$，它将园 $|z|>1$ 映射为区域 G_∞ 并且 $F^*(\infty)=\infty$ 而 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}F^*(z)=R(G_\infty,\infty)$

則 $\quad d(l)=d(f)=d(F^*)$

令 $\quad F(z)=\dfrac{F^*(z)}{R(G_\infty,\infty)}$

則 $\quad d(f)=R(G_\infty,\infty)\,d(F)=d(F^*)$ 　　(Ⅰ)

∵ $\quad R(G_\infty,\infty)\geqslant R(G_0,0)=1$,

∴ $\quad d(F)\leqslant d(f)=Q(s)=1$。 　　(Ⅱ)

又∵ $\quad F(z)\epsilon\,\Sigma$,

∴ $\quad d(F)\geqslant Q(\Sigma)=1$。…… 　　(Ⅲ)

由(Ⅱ)，(Ⅲ)即得 $d(F)=d(f)=1$，代入(Ⅰ)即得 $R(G_\infty,\infty)=R(G_0,0)=1$ 再根据引理2可知 G_0 是一个园。∴ $f(z)\equiv z$

当 $f(z)$ 不在閉园 $|z|\leqslant 1$ 上解析时，可考慮 $f_{\frac{1}{2}}(z)=2f\left(\dfrac{z}{2}\right)$($|z|\leqslant 1$

由引理3易推得 $d(f_{\frac{1}{2}})=1$，根据上述的証明可得 $f_{\frac{1}{2}}(z)\equiv z$，因而 $f(z)\equiv z$。

定理3的証明方法也适用于討論 S 族的 n 級平均直径下界的极值函数，但不适用于 Σ 族的情形。

本文是毕业論文的一部分，在写作过程中得到刘俊賢教授的热誠的指导，在此表示衷心的感謝。

参 考 文 献

〔1〕夏道行："单叶函数的一种平均直径的下界"复旦学报1958年第2期.

〔2〕Т. Виттих: новейщие исследования по однозначным аналитически функциям.

Нижная граница средного диаметра и трансфинитноло диаметра по классу Σ и классу S

Тан Зао—синь

Резюме

Пуств функция $w=f(z)$ аналитина и одналистна в односвязной области G pасширенной плоскости, граница которой содержит более одной точки. Функция $w=f(z)$ отображает область G на область D. Пусть граница области D —— замкнутое множество л пусть

$$d_n(f)=\sup_{\substack{a_k\in l\\ k=1,2\cdots n}}\left(\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}|a_k-a_j|^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)\quad(n=2,3\cdots)$$

$$d(f)=\lim_{n\to\infty}d_n(f)$$

В этой статье доказаны следующие теоремы:

Теорема 1: Если $w=F(z)\in\Sigma$ и $d_n(F)=\inf\limits_{g\in\Sigma}d_n(g)$, то $F(z)\equiv z$ $(|z|>1)$.

Теорема 2: $\inf\limits_{g\in S}d(g)=1$.

Теорема 3: Если $w=f(z)\in S$ и $d(f)=1$, то $f(z)\equiv z$ $(|z|<1)$.