

波雷耳測度的一些性質

刘 良 深

在拓撲空間中每一個有限可加貝爾測度均為完全可加測度的充分必要條件已被 A. Д. Александров 及 I. Glicksberg 研究過,^[1]他們的結果可敘述如下:

設 $\mathcal{X}$ 是任意拓撲空間, 記 $\mathcal{X}$ 中一切 Z -集[†]所生成的代數為 $\mathcal{J}$, m 為定義在 $\mathcal{J}$ 上的非負、有限、有限可加集函數, 並滿足如下條件

$$m(E) = \sup \{ m(Z) : Z \subset E \}, \quad \forall E \in \mathcal{J}.$$

將一切這樣的 m 所組成的集記作 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$

若將上述定義中 m 為有限可加集函數這一條件換作完全可加集函數 (而其他條件照旧), 那末這時將一切這樣的 m 所組成的集記作 $\mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$

引理 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$ 的必要充分條件是 $\mathcal{X}$ 上的每一個連續實函數都是有界的。

下面的定理 2 給出了 $\mathcal{X}$ 上每一個有限可加波雷耳測度為完全可加的充分必要條件。

定義 設 $\mathcal{X}$ 是拓撲空間, $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 中一切閉集所生成的代數。 μ 是定義在 $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ 上的非負、有限、有限可加集函數, 並滿足如下條件:

$$(*) \quad \mu(E) = \sup \{ \mu(F) : F \subset E, F \text{ 閉于 } \mathcal{X} \}, \quad \forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{X}).$$

將一切這樣的 μ 所組成的集記作 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$.

定理 1 設 $\mathcal{X}$ 為正規拓撲空間, 則 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$ 中每一元恒可唯一地开拓而成為 $\mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$ 中的元。反之, 每一 $\mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$ 中之元限制在 $\mathcal{J}$ 上便成為 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$ 中之元。

證明 設 $m \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X})$. 作泛函 Λ :

$$\Lambda(f) = \int_{\mathcal{X}} f dm, \quad f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}).$$

其中 $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 上一切圓連續實函數所成之集, 按 [2], Λ 可表成

$$\Lambda(f) = \int_{\mathcal{X}} f d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$$

此處 $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X})$, 由條件 (*) 便知對 $\mathcal{X}$ 中開集 G 有

$$\mu(G) = \sup \{ \mu(F) : F \subset G \}.$$

† Z -集的定义是: $Z = f^{-1}(F)$, F 是直線上的閉集, f 是 $\mathcal{X}$ 上的圓連續實函數, 以後凡是符号 Z (附以下标或不附下标), 均指 Z -集。

現証明

$$\mu(G) = \sup \{ \mu(Z) \mid Z \subset G \}. \quad (1)$$

事实上, 不妨設 $\mu(G) \neq 0$ 及 $G \neq \mathcal{X}$, 那末对 $0 < \varepsilon < \mu(G)$, 存在閉集 F , $F \subset G$, 使

$$\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon > 0$$

从而 $F \neq \emptyset$, 作連續函数 g 如下: $0 \leq g \leq 1$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in F \\ 1, & \text{当 } x \in \mathcal{X} - G. \end{cases}$$

令 $Z = f^{-1}\{0\}$, 則 $F \subset Z \subset G$, 故

$$\mu(Z) > \mu(G) - \varepsilon$$

故(1)式成立。

下面証明 μ 是 m 的开拓。設 $\mathcal{U}$ 表示一切 Z 之余集所組成的集, 对于 $U \in \mathcal{U}$, 由(1)式得

$$\mu(U) = \sup \{ m(Z) \mid Z \subset U \}, \quad (2)$$

又由 m 的正則性得

$$m(U) = \sup \{ m(Z) \mid Z \subset U \}. \quad (3)$$

对 $\varepsilon > 0$, 由(2), (3)两式可知存在 $Z \subset U$ 使

$$\mu(Z) > \mu(U) - \varepsilon \quad (4)$$

$$m(Z) > m(U) - \varepsilon \quad (5)$$

同时成立。今作連續函数 f , $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 使

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in Z \\ 0 & \text{当 } x \in \mathcal{X} - U \end{cases}$$

由(4)式得

$$m(U) \geq \int_{\mathcal{X}} f dm = \int_{\mathcal{X}} f d\mu \geq \mu(Z) > \mu(U) - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $m(U) \geq \mu(U)$. 同理, 由(5)式得 $\mu(U) \geq m(U)$. 故 $\mu(U) = m(U)$.

令

$$\underline{M} = \{ E \mid E \in \mathcal{F}, \mu(U - Z) < \varepsilon, Z \subset E \subset U \}.$$

由 μ 的有限可加性可知 $\underline{M}$ 是环, 又从(2)式知 $\underline{M}$ 包含全体 Z -集, 故 $\underline{M} = \mathcal{F}$. 換言之, 我們有

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(Z) \mid Z \subset E \}, \quad \text{凡 } E \in \mathcal{F}$$

但按 m 之定义有

$$m(E) = \sup \{ m(Z) \mid Z \subset E \}, \quad \text{凡 } E \in \mathcal{F}.$$

故在 $\mathcal{F}$ 上 $\mu = m$, 即 μ 是 m 之开拓。

現証唯一性, 設 $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X})$ 且 μ 为 m 之开拓, 那末 $\mu(Z) = m(Z)$. 由(1)式得

$$\mu(G) = \sup \{ m(Z) \mid Z \subset G \},$$

再注意

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(G) \mid E \subset G, G \in \mathcal{A}(F) \}$$

便知开拓是唯一的。

下面证明定理之第二部分。

设 $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X})$. 将 μ 限制在 $\mathcal{F}$ 上 (记作 $\mu|_{\mathcal{F}}$), 显然 $\mu|_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 上非负、有限、有限可加集函数。对任一 Z -集, 因 $Z \in \mathcal{A}(F)$, 故

$$\mu(Z) = \inf \{ \mu(G) \mid Z \subset G, G \text{ 开于 } \mathcal{X} \}.$$

对 $\varepsilon > 0$. 取 $G \supset Z$ 使 $\mu(G) < \mu(Z) + \varepsilon$. 作连续函数 $f, 0 \leq f \leq 1$ 使

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Z \\ 1, & x \in \mathcal{X} - G. \end{cases}$$

令 $U = \{x \mid x \in \mathcal{X}, f(x) < \frac{1}{2}\}$. 则 $Z \subset U \subset G$, 故有 $\mu(U) < \mu(Z) + \varepsilon$. 即

$$\mu(Z) = \inf \{ \mu(U) \mid Z \subset U \}$$

从而

$$(\mu|_{\mathcal{F}})(Z) = \inf \{ (\mu|_{\mathcal{F}})(U) \mid Z \subset U \}.$$

令

$$\underline{M} = \{ E \mid E \in \mathcal{F}, Z \subset E \subset U, (\mu|_{\mathcal{F}})(U - Z) < \varepsilon \}.$$

由 $\mu|_{\mathcal{F}}$ 的有限可加性知 $\underline{M}$ 是环。但 $\underline{M} \supset \{ \text{一切 } Z \text{ 集} \}$, 故 $\underline{M} = \mathcal{F}$. 这证明了

$$(\mu|_{\mathcal{F}})(E) = \inf \{ (\mu|_{\mathcal{F}})(U) \mid E \subset U \}, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

故 $\mu|_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X})$. 定理证完。

由上述定理可知 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 与 $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ 有相同之势。

现记

$$\mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X}) = \{ \mu \mid \mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}), \mu \text{ 是 } \sigma\text{-光滑, 即 } E_n \downarrow \phi, E_n \in \mathcal{A}(F) \Rightarrow \mu(E_n) \downarrow 0 \}$$

$$\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{X}) = \{ m \mid m \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}), m \text{ 是 } \sigma\text{-光滑, 即 } E_n \downarrow \phi, E_n \in \mathcal{F} \Rightarrow m(E_n) \downarrow 0 \}.$$

定理 2 设 $\mathcal{X}$ 为正规 T_1 型拓扑空间, 则 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$ 的充分必要条件是 $\mathcal{X}$ 上每一个连续函数都是有界的。

证明 充分性 先注意正规、 T_1 型拓扑空间必是可数紧空间 (Countably compact)*。

故对 $\mathcal{X}$ 中的闭集列 $\{F_n\}$, $F_n \downarrow \phi$, 有自然数 m 使 $\bigcap_{n=1}^m F_n = F_m = \phi$ 故对 $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ 有 $\mu(F_n) \rightarrow 0$. 再注意

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(F) \mid F \subset E \},$$

从而亦有 $E_n \downarrow \phi, E_n \in \mathcal{A}(F) \Rightarrow \mu(E_n) \rightarrow 0$. 充分性证完。

必要性 设 $\mathcal{M}^+(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_\sigma^+(\mathcal{X})$. 取 $m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. 由定理 1 可知 m 可开拓为 $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, 故 μ 在 $\mathcal{A}(F)$ 上是 σ -光滑的。但 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(F)$, 故 μ 在 $\mathcal{F}$ 上亦 σ -光滑。注意在 $\mathcal{F}$ 上 $\mu = m$, 故 m 在 $\mathcal{F}$ 上 σ -光滑, 即 $m \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{X})$. 由引理知 $\mathcal{X}$ 上每一个连续函数必为有界的。证完。

现引进记号:

* 本文中有關拓扑空間的概念均按 J. L. Kelley 一书中的用法。

$\mathcal{M}_\tau(\mathcal{X}) = \{ \mu \mid \mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}); \mu \text{ 是 } \tau\text{-光滑, 即对定向列 } F_\alpha \downarrow \phi, F_\alpha \text{ 闭于 } \mathcal{X} \Rightarrow \mu(F_\alpha) \rightarrow 0 \}.$

$\mathcal{M}_\tau(\mathcal{X}) = \{ m \mid m \in \mathcal{M}^+(\mathcal{X}), m \text{ 是 } \tau\text{-光滑, 即对定向列 } Z_\alpha \downarrow \phi, \text{ 有 } m(Z_\alpha) \rightarrow 0 \}.$

定义 設 $\mathcal{X}$ 为拓扑空间, 若对 $\mathcal{X}$ 的任一族 U 复盖 $\{ U_\alpha \}, \mathcal{X} \subset \bigcup U_\alpha$, 及 $m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, 存在 $\{ U_\alpha \}$ 的一个可数子集 $\{ U_n \}$, 使 $m(\mathcal{X} - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = 0$, 則称 $\mathcal{X}$ 为 殆林得雷夫空间.

例如, 通常之林得雷夫空间必为殆林得雷夫空间.

定理 3 設 $\mathcal{X}$ 为可数仿紧, 正规、 T_1 型拓扑空间, 則下述两命题等价:

(I) $\mathcal{X}$ 是殆林得雷夫空间.

(II) $\mathcal{M}_\tau^+(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_\tau^+(\mathcal{X})$.

证明 (I) $\Rightarrow$ (II). 設 $\mu \in \mathcal{M}_\tau^+(\mathcal{X})$. 不妨將 μ 认为是定义在由 $\mathcal{X}$ 的一切闭集所生成的 σ -代数 $\sigma(\underline{F})$ 之上, 此时仍記作 μ .

將 μ 限制在由一切 Z -集所产生的 σ -代数 $\sigma(\underline{Z})$ 上, 記作 $\mu|_{\sigma(\underline{Z})}$, 由于

$$(\mu|_{\sigma(\underline{Z})})(Z_n) \rightarrow 0, \quad \text{当 } Z_n \downarrow \phi$$

故有 (見 [1] 中的定理 25 推論 IV)

$$(\mu|_{\sigma(\underline{Z})})(Z_\alpha) \rightarrow 0, \quad \text{当 } Z_\alpha \downarrow \phi$$

故依 [3] 中的一条定理知 $\mu|_{\sigma(\underline{Z})}$ 可开拓至 $\sigma(\underline{F})$ 上, 并具有如下性质: (开拓后記作 μ_2)

1) $\mu_2(F_\alpha) \rightarrow 0$ 当 $F_\alpha \downarrow \phi, F_\alpha$ 闭于 $\mathcal{X}$.

2) $\mu_2(E) = \inf \{ \mu_2(G) \mid E \subset G, G \text{ 开于 } \mathcal{X} \}, \quad \text{凡 } E \in \sigma(\underline{F}).$

今为书写簡便起見, 將原来之 μ 記作 μ_1 , 注意 $\mu_i (i=1, 2)$ 在 $\sigma(\underline{Z})$ 上均等于 $\mu|_{\sigma(\underline{Z})}$, 故在 $\sigma(\underline{Z})$ 上 μ_1 与 μ_2 相等, 从而更在 $\mathcal{A}(\underline{Z})$ 上有 $\mu_1 = \mu_2$. 注意

$$\mu_i(E) = \inf \{ \mu_i(G) \mid E \subset G \} \quad \text{凡 } E \in \mathcal{A}(\underline{F}) \quad i=1, 2.$$

$$\mu_i(G) = \sup \{ (\mu|_{\mathcal{A}})(Z) \mid Z \subset G \}.$$

便知在 $\mathcal{A}(\underline{F})$ 上 $\mu_1 = \mu_2$. 再据 μ_2 的性质 1) 便有 $\mu_1(F_\alpha) \rightarrow 0$ 当 $F_\alpha \downarrow \phi$. 即 $\mu \equiv \mu_1 \in \mathcal{M}_\tau(\mathcal{X})$ 証完.

(II) $\Rightarrow$ (I). 設 $m \in \mathcal{M}_\tau^+(\mathcal{X})$. 不妨將 m 认为是定义在由 $\mathcal{X}$ 的一切 Z -集所产生的 σ -代数 $\sigma(\underline{Z})$ 上, 依 [4] 可將 m 开拓成为 $\sigma(\underline{F})$ 上的非負、完全可加集函数 μ . 显然 $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{M}_\tau(\mathcal{X})$. 从而对 $Z_\alpha \downarrow \phi$ 有 $m(Z_\alpha) = \mu(Z_\alpha) \rightarrow 0$. 这証明了 $m \in \mathcal{M}_\tau(\mathcal{X})$. 据 [1] 便知 $\mathcal{X}$ 为殆林得雷夫空间. 証完.

参 攷 文 献

- [1] V. S. Varadarajan. Меры на топологических пространствах. Матем. сборник 55(97), (1961), 35—100.
- [2] N. Dunford & J. T. Schwartz Linear Operators. Part I 1958.
- [3] 郑曾同: 函数空间上的非負綫性泛函的积分表示.
- [4] Jan Marik. The Baire and Borel Measure Czecho-Slovak Math. Journ. (92)No2 (1957). 248—253.